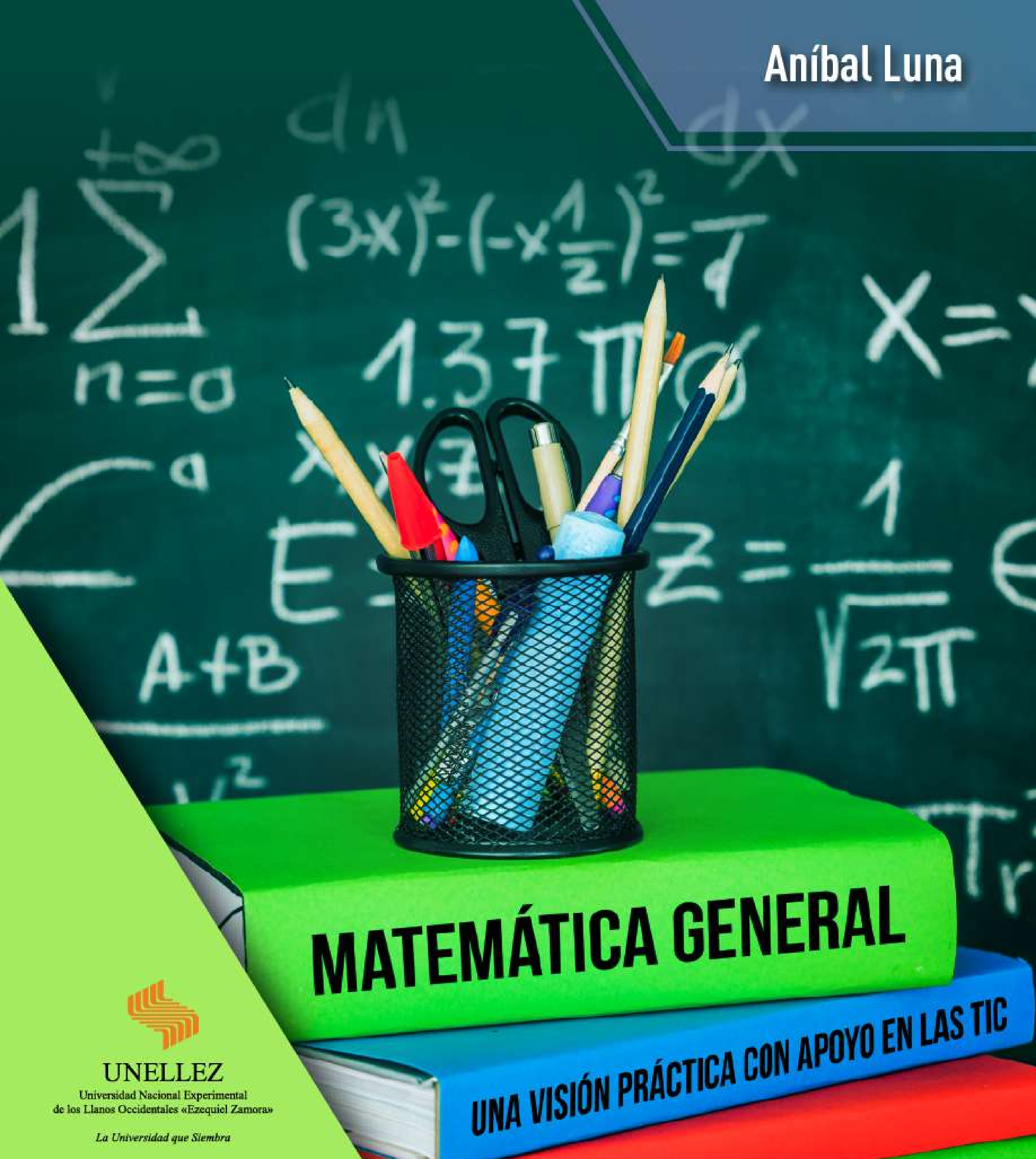
Aníbal Luna



MATEMÁTICA GENERAL

UNA VISIÓN PRÁCTICA CON APOYO EN LAS TIC

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Colección: **Docencia Universitaria**

Matemática general.
Una visión práctica con apoyo en las TIC

Primera edición, 2020

Diseño de cubierta:
Gustavo Quintana

Maquetación:
Aníbal Luna

Depósito Legal: BA2020000018
ISBN: 978-980-248-246-7

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»
La Universidad que Siembra

feduez

A mi esposa Leonor

Contenido

Prefacio

El presente libro de matemática general surge con la idea de ofrecer alternativas ante el estudio de dicha materia en los semestres iniciales de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora, Unellez, y ha sido producto de la conformación de material preparado para dictar cursos regulares e intersemestrales en dicha casa de estudios durante un largo período. El subtítulo del mismo obedece a la necesaria adaptación a la realidad tanto de parte de los docentes como de los estudiantes en aspectos relacionados con las tecnologías de la información y la comunicación de tal forma que sirva como guía y a la vez de agente estimulador ante el uso de dispositivos electrónicos de cálculo, de software matemático y de la enorme cantidad de información disponible en la web. Por supuesto que los temas tratados son de carácter general y son aplicables en cualquier contexto educativo donde se requiera conocer o reforzar las bases sobre las cuales se asienta el fascinante mundo de la matemática.

En ese sentido, se procuró hacer uso intensivo de las TIC para apoyar la resolución de situaciones de carácter práctico y se consideró el uso prioritario de software libre de tal forma que muchos ejemplos explicaciones están basadas en programas enmarcados en ese paradigma tales como Maxima en su versión Windows denominada wxMaxima y Geogebra, ambos ampliamente reconocidos por el mundo académico y de uso muy extendido por los docentes de educación media y de educación universitaria en otros países y que esperamos conserven esa tendencia en Venezuela. Otras situaciones prácticas fueron apoyadas con hoja de cálculo, para lo cual las explicaciones están dadas tomando como base Excel de Microsoft, el cual no es software libre, pero que tiene su contraparte en la hoja de cálculo de Open office con la que se pueden lograr los mismos fines.

Por ser las TIC sujetas a cambios en tan corto tiempo, no se incluyó en la obra un manual de instalación del software utilizado, sin embargo el lector puede en cualquier momento consultar el sitio web respectivo el cual con toda seguridad estará más actualizado que cualquier material que se pueda elaborar al respecto en este libro. Bajo esta misma idea, se procuró hacer pocas referencias a sitios web, puesto que se quiere evitar el riesgo que lo cambiante de éstos conduzcan al lector a enlaces rotos. No obstante, los ejercicios resueltos con apoyo en software están suficientemente explicados y tienen abundante apoyo gráfico.

De forma general, el libro está orientado para lograr unos objetivos mínimos que están señalados al comienzo de cada capítulo y que son cubiertos tanto con la parte teórica como con la práctica, para lo que se utiliza el esquema de ejemplos, respuestas y ejercicios propuestos en cada sección en que está estructurado cada capítulo. Al finalizar cada uno de ellos, se ofrece un resumen, las palabras clave, la bibliografía recomendada y se plantean interrogantes para que el estudiante autoevalúe su rendimiento.

En total son seis capítulos, tomando como base el contenido programático de la matemática general que se dicta en la Universidad Ezequiel Zamora. En el capítulo 1 se hace una introducción a las proposiciones lógicas, como una forma que permite la familiarización en el uso de los signos, tan importante como base para el estudio de cualquier tema de carácter matemático. En el capítulo 2, se estudian los conjuntos y las operaciones entre éstos incluyendo al final ejercicios de cardinal de un conjunto mediante aplicaciones prácticas derivadas de la vida real. En el capítulo 3 se avanza en el estudio de los conjuntos, esta vez enfoncando la atención los sistemas de numeración y en los conjuntos numéricos, tales como los números naturales, los númros enteros, los números racionales, los números irracionales y los números reales. El capitulo 4 está orientado hacia el estudio de las expresiones algebraicas, allí el lector tiene la oportunidad de comprender mediante la resolución de ejercicios y mediante el uso de software las operaciones de adición y multplicación de polinomios; de igual forma los diferentes casos de factorización y de productos notables, finaliza el capítulo con las ecuaciones primer y de segundo grados, orientadas algunas hacia la solución con programas como Geogebra y Maxima, los cuales tienen elevada capacidad para el cálculo simbólico. El capítulo 5 está orientado al estudio de las desigualdades y las inecuaciones, allí se procuró resolver gran cantidad de ejercicios suficientemente graficados con la ayuda tanto de Geogebra como del programa de dibujo Autocad. Finalmente, en el capítulo 6 se plantean las funciones reales, donde se hace uso intensivo de los mencionados programas Geogebra y Maxima para la construcción de gráficas.

Un trabajo de estas dimensiones fue posible entre otros factores por los años de experiencia como docente de matemática en sus diferentes modalidades en el Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Unellez, los cuales permitieron consolidar el piso epistémico necesario para poder desarrollar en un documento los ejercicios y las numerosas clases que con el tiempo fueron conformando gran cantidad de archivos sueltos en los que a pesar de estar trazada la idea básica se tuvo que dedicar mucho tiempo y esfuerzo para que adquirieran la forma de libro.

Aníbal Luna

CAPÍTULO 1

Introducción a la Lógica Proposicional

Objetivos:

General

Reconocer las estructuras conceptuales elementales de la lógica proposicional para comprender el lenguaje matemático formal y aplicarlo en la solución de problemas de la vida cotidiana.

Específicos

- Identificar los elementos sobre los cuales se apoya la lógica proposicional.
- Expresar proposiciones tanto en lenguaje natural como en lenguaje artificial o formal.
- Distinguir los conectivos lógicos en la conformación de proposiciones compuestas.
- Interpretar el valor de proposiciones compuestas con la ayuda de las tablas de verdad.
- Interpretar las leyes que rigen a las proposiciones lógicas.
- Reconocer herramientas derivadas de las TIC utilizadas en la lógica proposicional.

Introducción

El habla es una característica del ser humano que lo distingue del resto de los seres vivientes y constituye una las maneras más elementales de comunicación a través de la cual la humanidad ha logrado establecer los pilares sobre los cuales descansa su desarrollo y su capacidad de adaptación a condiciones adversas. Sin embargo, el principal problema del lenguaje hablado es que no perdura, a menos que se disponga de elementos auxiliares para lograr ese fin, los cuales a su vez han sido el resultado de avances tecnológicos producto del avance del conocimiento.

Pero antes de alcanzar los elevados niveles de tecnológicos en el campo de la electrónica de nuestros días, el ser humano ha tenido la capacidad de registrar sus ideas con la ayuda de elementos que a la distancia de los tiempos pueden parecer rudimentarios pero que quizás para el momento constituyeron una novedad tal como nos encontramos nosotros actualmente cuando disfrutamos de los diferentes dispositivos como un teléfono, una computadora, un vehículo, entre otros. Por ejemplo, los fenicios utilizaban un sistema de cuñas como una forma del lenguaje escrito, en las cuevas de Altamira, España, se encuentran como muestras del arte rupestre pinturas de animales, los cuales seguramente eran muy comunes en el paleolítico, los egipcios empleaban símbolos o jeroglíficos para hacer registros que consideraron importantes transmitir a otras generaciones.

Lo indicado anteriormente nos da una idea de la importancia que tiene el uso del lenguaje simbólico. Las palabras se las lleva el viento pero la escritura es un registro que puede permanecer intacto muchos años, para ello se requiere el uso de símbolos que permitan la conversión entre una y otra forma de expresión. Por lo tanto resulta importante analizar la forma de manifestar nuestras ideas de manera simbólica ya que ese conjunto de símbolos aún puede ser reducido y comunicar algo interesante para nosotros.

En tal sentido, usted se encuentra en este momento haciendo uso de símbolos que su mente ha interpretado y le ha dado forma hasta convertirla en frases entendibles, de lo contrario, este conjunto de letras le parecerían indescifrables. Es aquí donde entra en juego la lógica proposicional al permitir estudiar y entender las estructuras conceptuales elementales que conforman la palabra escrita con el fin de disponer de las herramientas que le permitirán el uso de símbolos y adentrarse con bases firmes en el estudio de la matemática, la cual es una materia que tiene sus propios códigos pero que la mayoría son afines a situaciones estudiadas previamente por un estudiante universitario en su proceso de formación.

Se recomienda que el estudiante realice los ejercicios de autoevaluación dispuestos al final del capítulo y que practique con ayuda de los recursos tecnológicos que se sugieren. Se procuró no incluir referencias web, debido a lo cambiante de esos recursos.

Elementos de apoyo de la lógica proposicional

Se hace una revisión breve de la lógica tomando en cuenta que es el punto de partida por medio del cual surge la lógica proposicional, de igual forma se hace referencia a al razonamiento como condición humana que conduce a la estructuración del pensamiento. Luego se estudia el concepto de signo tal como lo planteó Charles Sander Peirce, considerado el padre de la semiótica moderna, la cual es una fuente de importancia para entender la lógica proposicional.

Introducción al estudio de la lógica

Es un hecho que todos los seres humanos somos seres pensantes, siendo esta una de las características que nos distingue de otros seres vivientes y que es la base sobre la cual se apoya tanto el conocimiento como la propia evolución, puesto que la supervivencia de la especie en muchas circunstancias ha dependido de la toma de decisiones derivadas de la capacidad de razonamiento. Por supuesto que las interrogantes derivadas acerca de la generación y uso del pensamiento han sido motivo de discusión a lo largo de la historia, siendo los filósofos griegos los pioneros en establecer estructuras formales que permiten organizar las ideas.

Según Iriarte y otros (2010) citando a Saenz y Arrieta, *la lógica* es la ciencia que establece las reglas mediante las cuales se elaboran los pensamientos que permiten llegar a la verdad o plantear la solución a un problema. Continúan indicando los autores que se puede definir a la lógica como la ciencia y el arte del buen pensar, también indican que la lógica investiga la relación de consecuencia que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento correcto, aplicando de manera coherente un sistema de reglas establecido.

Se observa que la lógica se involucra en el pensamiento profundo del ser y que ayuda a éste a ordenar las ideas para de esa forma intervenir de manera directa en el proceso de transmisión de éstas, las cuales pueden ser interpretadas con cierta facilidad por el receptor debido a que ya se encuentran estructuradas en una secuencia, en un orden. Tal orden guarda estrecha relación con el establecimiento de las denominadas premisas que apoyan a la conclusión, conformando ambas categorías lo que se denomina argumento.

Figura 1: Con la ayuda de la lógica y particularmente la lógica proposicional, el individuo se empodera de herramientas que le ayudan a ordenar sus pensamientos.

Al respecto indica Iriarte y otros (2010) que todo razonamiento tiene una estructura que consiste en las premisas, la conclusión y el nexo lógico entre ellos, siendo este uno de los procesos cognitivos básicos por medio del cual utilizamos y aplicamos nuestro conocimiento. En la Figura 2 se muestran los elementos involucrados, donde se parte de las premisas para llegar a una conclusión. Por ejemplo, cuando se dice: El petróleo genera riquezas, Venezuela es un País Petrolero, por lo tanto Venezuela es un país con riquezas. Se está partiendo de dos premisas, una mayor y otra menor y se está llegando a una conclusión.

Figura 2: Esquema básico de la forma de razonar, donde se parte de dos premisas para llegar a una conclusión.

El esquema presentado en la Figura 2 corresponde a un silogismo, modelo de razonamiento cuyo pionero fue el filósofo griego Aristóteles, reconocido como el padre de la lógica. En tal sentido, no es extraño observar en textos relacionados con la lógica ejemplos como el siguiente:

Todo hombre es mortal
Sócrates es hombre

Sócrates es mortal

En el cual como se ha dicho están presentes dos premisas y una conclusión: Sócrates es mortal.

A pesar de lo interesante que puede resultar el estudio de la lógica aristotélica, se dedica en este capítulo atención a la revisión de los fundamentos de la lógica proposicional, la cual se ocupa de la validez de razonamientos donde se encuentren involucradas proposiciones, generalmente separadas por conectivos lógicos tales como: y, o, si…entonces, entre otros. Para esto es conveniente una revisión de la teoría relacionada con lo signos puesto que se ha dicho que uno de los fines del estudio de la lógica proposicional dentro de un curso de matemática es que el estudiante se familiarice con el uso del lenguaje simbólico.

Los signos. La Real Academia Española (2017), define a este término con varias acepciones, la primera de ella indica que un signo es un objeto, fenómeno o acción material, que por naturaleza o convención representa o sustituye a otro. Así se tienen como ejemplo los signos zodiacales que representan la influencia de constelaciones diferentes a lo largo de los doce meses del año, los signos de puntuación que indican al lector las pausas que debe realizar, los signos vitales que indican a un médico sobre el estado de salud de un paciente, la paloma blanca que representa a la paz, entre otros.

Figura 3: Este trazado puede ser un signo.

Se tiene el caso representado en la Figura 3, a usted le pueden pasar varias alternativas en su mente para tratar de darle significado a lo que está viendo. Pudo haber pensado que se trata del trazado de una carretera montañosa, también que es parte del ala de un pájaro, o de un árbol de navidad, entre una variedad de opciones. Pero en cualquier caso usted buscó en su mente en función de experiencias previas algo que se relaciona con lo que está observando. Es importante destacar que para que algo pueda ser considerado un signo, es necesario que ese algo tenga significado para alguien.

Al hablar de signos, es inevitable hacer referencia a Charles Sander Peirce (1839-1914), profesor de la universidad de Harvard, quien dedicó gran parte de su vida a su estudio, al punto de ser considerado el padre de la semiótica moderna conocida también como la ciencia de los signos. Al respecto Salguero (2001) indica que para Peirce cualquier cosa interpretable es un signo y el hecho de que los hombres usen signos para comunicarse los hace humanos, la Figura 4 es la concepción semiótica de Peirce, donde se observa que el signo depende del contexto o situación, del referente, del interpretante y del significante.

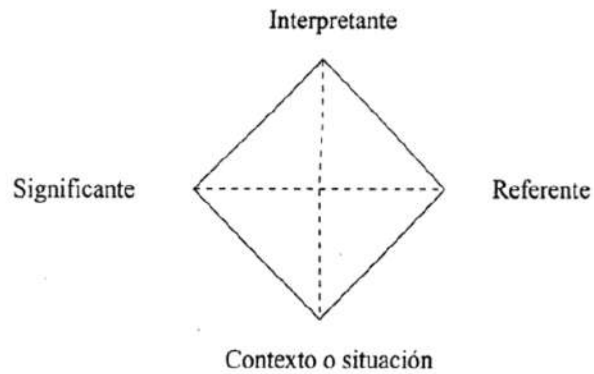


Figura 4: El signo según peirce, tomado de Salguero (2001).

La semiótica se divide en tres grandes ramas:

Sintaxis. Estudia los signos teniendo en cuenta solamente las relaciones que se establecen entre ellos sin tomar en cuenta su significado. Este tipo de estudio corresponde a la gramática.

Semántica. Estudia los signos teniendo en cuenta la relación que mantienen con su significado o referencia, es decir, con las cosas de la realidad por ellos representada. Esto es lo que hacen los diccionarios o las etimologías.

Pragmática. Estudia los signos teniendo en cuenta la relación que existe entre ellos y las personas que los utilizan para comunicarse o representar algo. Más específicamente, estudia el lenguaje (signos) tomando en cuenta a los usuarios y las circunstancias de la comunicación. Por ejemplo, un estudio centrado en el lenguaje utilizado por los habitantes de la región geográfica conocida como "cajón del Arauca apureño" entra dentro de esta división de la semiótica.

Lenguaje Natural y Lenguaje Artificial

La mayoría de las veces hacemos uso del lenguaje natural, sin embargo en otras oportunidades se requiere "ordenar" las ideas y expresarlas a través de signos que deben ser reconocidos en determinado entorno social. En ambos casos bien sea manera perceptible o imperceptible se manejan reglas y símbolos parte de los cuales entran dentro del dominio de la lógica proposicional. En esta sección se estudian las proposiciones expresadas como lenguaje natural, se define qué es una proposición y finalmente se revisa en qué consiste el denominado lenguaje artificial.

Lenguaje Natural. Se puede definir al lenguaje natural como el conjunto de símbolos utilizados por una sociedad para comunicarse. Es el lenguaje que aprendemos en sociedad y que usamos para comunicarnos y referirnos objetos, cosas y animales. También se denomina lenguaje cotidiano, lenguaje ordinario. El individuo en contacto con los seres que le rodean se va apropiando de una serie de signos, bien sean representados mediante sonidos, mediante gestos o en general con la ayuda de cualquiera de los sentidos para de esa manera poder transmitir sus ideas y hacerse entender con los seres de su entorno.

El lenguaje natural consta de un conjunto finito de símbolos (palabras y signos lingüísticos que forman el vocabulario) y un número finito de reglas (la sintaxis), las cuales determinan cómo combinar correctamente los símbolos del vocabulario

Para hacernos entender es necesario conformar una estructura integrada por palabras cuya combinación en el orden adecuado tienen sentido, dicha estructura recibe el nombre de oración.

Oración. Es una expresión lingüística sintácticamente correcta y posee sentido completo.

Ejemplos:

a. La Unellez es una universidad
b. ¿Cuál es tu nombre?
c. Es urgente que vengas
d. Caracas es la capital de Panamá.
e. No sé si podré ayudarte.
f. En Venezuela el billete de más alta denominación vale 100 bolívares.
g. ¡tan bueno que era!
h. Si x=3 entonces 3*x = 9.
i. ¡No hagas eso por favor!

Expresión lingüística. Es cualquier combinación de símbolos de un lenguaje.

Ejemplos de expresiones lingüísticas sintácticamente incorrectas:

a. El avión se estacionó matemática volando
b. Canción del usted negro viaje dio.
c. Aaaaah el edificio lleno de aves invertido dos hombres.
d. Esto sentido uno zapato matriz juego.

Oración enunciativa o enunciado. Es una expresión lingüística que tiene sentido completo y que puede ser verdadera o falsa.

Ejemplo

En las oraciones anteriores identifique cuales son enunciados:

a. La bicicleta tiene dos ruedas
b. ¿Cuándo llega el pedido?
c. Venezuela en un país petrolero
d. La novela Lanzas Coloradas fue escrita por Arturo Uslar Pietri.
e. ¡No puedes entrar!
f. El agua de mar es salada

Respuestas

a. Es un enunciado

b. No es un enunciado
c. Es un enunciado
d. Es un enunciado
e. No es un enunciado
f. Es un enunciado

Se debe tener en cuenta que el lenguaje natural es muy rico en expresiones lingüísticas situación que conduce a la presencia de ambigüedades, por ejemplo:

María compró un automóvil

No se sabe si es para ella, o para otra persona, tampoco si qué tipo de automóvil.

Antonio ingreso a la universidad

No se sabe si Antonio es un ladrón, si es empleado, profesor, obrero; si lo hizo de manera presencial o de manera virtual.

Nos reunimos en casa de Pedo

¿Quiénes se reunieron? ¿Dónde? ¿Cuándo?

Proposición. Es una oración que no admite ambigüedad es decir puede tomar el valor falso o el valor verdadero. Por ejemplo, cuando se dice "Amarillo, azul y rojo son los tres colores principales de la bandera venezolana" se está en presencia de una proposición verdadera, de igual forma, cuando se indica "Un año tiene 14 meses" se está formulando una proposición falsa.

Es importante distinguir dentro de las expresiones lingüísticas cuáles constituyen proposiciones y cuáles no. Para ello se cuenta con elementos de juicio como la no presencia de ambigüedades y que la oración sea enunciativa. De igual manera, es importante tomar en consideración que las oraciones interrogativas, exhortativas o imperativas, las exclamativas o admirativas, así como las dubitativas y los juicios de valor no constituyen proposiciones ya que ninguna de estas categorías afirman o niegan algo.

Considerando las reglas básicas de las proposiciones, estas deben cumplir las siguientes dos condiciones:

1. Una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo, denominado principio de no contradicción.
2. Una proposición debe ser verdadera o falsa, no existe una tercera posibilidad. Este principio se denomina tercero excluido. Es decir una proposición no puede ser "aproximadamente verdadera" o "casi falsa".

Ejemplo

En la siguiente lista, identifica cuáles oraciones constituyen proposiciones y cuáles no.

a. Los caballos comen pasto
b. El automóvil es azul

c. Algunos animales pueden imitar el habla humana
d. Las casas nubes escuela fruta
e. Esperamos que llegue la comida
f. $2x=14$
g. Me fastidia ver ese programa de televisión
h. No puedes hacer ejercicio
i. Es imposible ver en la oscuridad de la noche
j. No vengo a causar problemas
k. Achaguas es una ciudad del estado Apure
l. 2017 es un año bisiesto.

Respuestas

a. Es una proposición, puesto que el enunciado puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez.
b. Se trata de una proposición ya que el enunciado puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas.
c. No es una proposición, el término "algunos" conduce a imprecisión.
d. No es una proposición, la expresión lingüística está sintácticamente mal formada.
e. No es una proposición, se trata de un deseo.
f. No es una proposición ya que x puede ser cualquier número.
g. No es una proposición, se trata de una apreciación personal.
h. No es una proposición, se trata de una recomendación o exhortación.
i. No es una proposición, ya que si nos colocamos lentes infrarrojos podemos ver en la noche, pero si no los usamos no podemos ver.
j. No es una proposición, no es un enunciado, se trata de un juicio de valor.
k. Si es una proposición, no hay lugar a dudas que Achaguas es una ciudad del estado Apure.
l. Si es una proposición con valor falso.

Las proposiciones se dividen en proposiciones simples y proposiciones compuestas. Las primeras constan de solamente una proposición, las segundas están conformadas por proposiciones simples unidas a través de conectivos lógicos.

Lenguaje artificial. Para tratar de superar las limitaciones del lenguaje natural, se ha ido construyendo los lenguajes artificiales, es decir lenguajes bien definidos que poseen una estructura operativa eficaz Todas las ciencias emplean lenguajes artificiales y esta ha sido una de las condiciones para que evolucionen. Los elementos de un lenguaje artificial son los signos y las reglas.

Lenguaje formal. Se denomina lenguaje formal a un lenguaje artificial cuyos signos son formales (es decir, carecen de significado) y cuyas reglas sintácticas permiten operar con dichos signos como en un cálculo. La lógica y las matemáticas son lenguajes artificiales y además formales.

La lógica proposicional o de enunciados. Se ocupa de la validez formal de los razonamientos tomando en bloque las proposiciones que los forman.

Los signos de la lógica proposicional son las variables proposicionales (p,q, r, s, t…); los símbolos auxiliares (paréntesis, corchetes y llaves) y los conectivos lógicos.

Las variables proposicionales son letras minúsculas a partir de la letra p del alfabeto o combinación de esas letras y números que se usan para representar a las proposiciones.

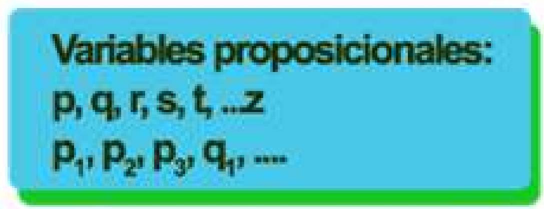


Figura 5: Notación usada para variables proposicionales.

Por ejemplo:
p: Ezequiel Zamora luchó en la guerra federal venezolana
q: En San Fernando de Apure no hay trenes de pasajeros
r: Aries es un signo del zodíaco
s: El sodio es un elemento químico
t: Un bongo remonta el Arauca
También se usan letras y números para identificar a una proposición:
q1: durante la Semana Santa siempre hay luna llena
q2: Si estudio en la Unellez entonces seré profesional universitario
q3: Algunos productos alimenticios estaban vencidos
q4: Magallanes es un equipo de la Liga Venezolana de Beisbol Profesional

Ejercicios

1. Indicar cuál de las expresiones siguientes constituyen un enunciado
   a. Tierra propicia para el esfuerzo como lo fue para la hazaña.
   b. El nivel del río Apure alcanzó en 2017 la cota máxima.
   c. Se dañó el motor de la lavadora.
   d. Ojalá llueva
   e. Retornen a casa temprano
   f. No se puede ver a través de ese cristal
   g. Dios te bendiga
   h. El automóvil alcanzó los 200 kilómetros por hora
2. Indicar cuál de las siguientes expresiones constituyen proposiciones
   a. Dos elevado al cuadrado es igual a cuatro.
   b. Si x=-3 entonces 3x=6.
   c. Caracas es la capital de Venezuela.
   d. La sede de la ONU está en Londres.
   e. La organización de la fiesta.
   f. Qué tan grande es vuestro amor.

g. La independencia de poderes.
h. El hierro es un metal.

Conectivos Lógicos y Proposiciones Compuestas

Nuestro hablar diario es continuo, es decir para hacernos entender por nuestros semejantes emitimos una serie de palabras dentro de las cuales necesariamente deben existir unas que tienen la función de conectar ideas. Dentro del mundo de la lógica proposicional estas palabras son identificadas con el nombre de conectivos lógicos y tienen la importante función de relacionar al menos dos proposiciones simples para conformar una proposición compuesta.

En esta sección, se estudian los conectivos: negación, conjunción, disyunción inclusiva, disyunción exclusiva, condicional y bicondicional. En cada caso se indica palabra o frase más común con que se expresa el conectivo en lenguaje natural y se dan otras opciones. De igual manera, se presentan ejemplos de proposiciones donde están involucrados los conectivos. Por supuesto que al convertir al lenguaje formal las proposiciones, se puede dar el caso que no se encuentren bien formadas, aspecto que es cubierto en la última parte de esta sección.

Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos son palabras (generalmente de una sola sílaba) que permiten conectar entre sí dos o más proposiciones lógicas para de esa manera conformar proposiciones compuestas.

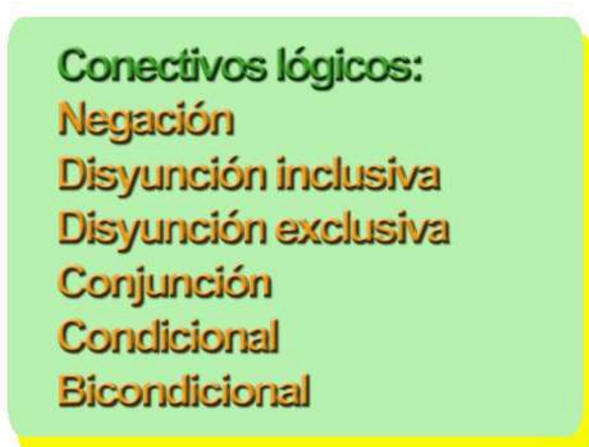


Figura 6: Lista de los conectivos lógicos.

Negación

Símbolos usados: $-$; $\sim$; $\neg$
Se lee: No

No es cierto que
No es verdad que
Es falso que

Ejemplo

Convertir al lenguaje formal la siguiente proposición:
p: No hay inscripciones para nuevos ingresos en la Unellez durante el mes de abril.

Respuesta

Se trata de una proposición que está siendo negada a través del conectivo lógico No, ubicado al principio de dicha proposición.

La conversión de la proposición del ejemplo a lenguaje formal, es decir su formalización se escribe así:

$$p: \neg q$$

Donde a la expresión "no hay inscripciones para nuevos ingresos en la Unellez durante el mes de abril" se le ha simbolizado como $\neg q$.

Usted puede hacer esto en su cuaderno o en sus prácticas, utilizando el subrayado y el marcaje con un círculo de los conectivos lógicos presentes en la proposición de esta forma:
.

p: No $\underbrace{\textit{hay inscripciones para nuevos ingresos en la Unellez durante el mes de abril}}_{q}$.

Situación que conduce a la formalización ya indicada.

Ejemplo

Convertir al lenguaje formal la proposición:
r: No es cierto que Juan tiene una hermana.

Respuesta

La formalización de esta proposición es:

r: No es cierto que $\underbrace{\textit{Juan tiene una hermana}}_{t}$.

$$r: \neg t$$

Siéntase libre de asignar cualquier letra de las ya indicadas a las proposiciones, usted bien pudo haber utilizado la *s* en vez de la *t.*

Ejemplo

Formalizar la siguiente proposición:
s: Ni me nombró en su discurso.

Respuesta

Se formaliza esta proposición así:

s: Ni $\underbrace{\text{me nombró en su discurso}}_{r}$.

$$s: \neg t$$

Recuerde que la elección de la letra que simboliza a la proposición, si no se menciona en el planteamiento, depende del criterio de la persona que resuelve el ejercicio; por lo tanto en este caso usted pudo haber usado, por ejemplo q en vez de r; no se cambia la s ya que está dada previamente.

Ejemplo

Convertir al lenguaje natural la proposición:

$$r: \neg u$$

Donde, u: *Pedro viaja a Valencia*.

Respuesta

r: *no es cierto que Pedro viaja a Valencia*.
Igualmente es válido:
r: *Pedro no viaja a Valencia.*

Conjunción

Símbolo usado: $\wedge$
Se lee: y.
Dadas dos proposiciones p y q también se puede leer como:

p pero q
p aunque q
p incluso q
p sin embargo q
p no obstante q
p a pesar que q
p a menos que q
p igualmente q

Ejemplo

Convertir al lenguaje formal cada una de las proposiciones:
p: María hace la tarea y lava la ropa.
q: La casa tiene personas dentro pero nadie pinta la cerca.
r: El grupo se reúne los miércoles aunque la mayoría de los miembros trabajan.
s: La ciudad es tranquila sin embargo a veces suceden accidentes.
t: El fenómeno El Niño afecta al clima no obstante en San Fernando no ha llovido.

u: En el campo se respira aire puro a pesar que circulan vehículos por la carretera.
v: Los jóvenes duermen mucho a menos que ellos tengan que estudiar.
w: El transportista recibió el envío igualmente Ana realizó la transferencia.

Respuestas

La formalización los ejemplos anteriores se logran de la siguiente manera:

p: $\underbrace{\text{María hace la tarea}}_{r}$ *y* $\underbrace{\text{lava la ropa}}_{s}$.

$$p: r \wedge s$$

q: $\underbrace{\text{La casa tiene personas dentro}}_{t}$ *pero* $\underbrace{\text{nadie pinta la cerca}}_{v}$.

$$q: t \wedge v$$

r: $\underbrace{\text{El grupo se reúne los miércoles}}_{p}$ *aunque* $\underbrace{\text{la mayoría de los miembros trabajan}}_{q}$.

$$r: p \wedge q$$

s: $\underbrace{\text{La ciudad es tranquila}}_{r}$ *sin embargo* $\underbrace{\text{a veces suceden accidentes}}_{t}$.

$$s: r \wedge t$$

t: $\underbrace{\text{El fenómeno El Niño afecta al clima}}_{u}$ *no obstante* $\underbrace{\text{en San Fernando no ha llovido}}_{v}$.

$$t: u \wedge v$$

u: $\underbrace{\text{En el campo se respira aire puro}}_{p}$ *a pesar que* $\underbrace{\text{circulan vehículos por la carretera.}}_{t}$

$$u: p \wedge t$$

v: $\underbrace{\text{Los jóvenes duermen mucho}}_{q}$ *a menos que* $\underbrace{\text{ellos tengan que estudiar}}_{r}$.

$$v: q \wedge r$$

w: $\underbrace{\text{El transportista recibió el envío}}_{r}$ *igualmente* $\underbrace{\text{Ana realizó la transferencia}}_{p}$.

$$w: r \wedge p$$

Ejemplo

Sean las proposiciones:

s: La palmera es movida por el viento.
t: La lluvia es muy fuerte.

Convertir al lenguaje natural las proposiciones:

a. $p_1: s \wedge t$
b. $p_2: \neg s \wedge t$
c. $p_3: s \wedge \neg t$
d. $p_4: \neg(s \wedge t)$

Respuestas

a. p_1: La palmera es movida por el viento y la lluvia es muy fuerte.
b. p_2: La palmera no es movida por el viento y la lluvia es muy fuerte.
c. p_3: La palmera es movida por el viento y la lluvia no es muy fuerte.
d. p_4: Ni la palmera es movida por el viento ni la lluvia es muy fuerte.

Disyunción inclusiva

Símbolo usado: ∨
Se lee: O.
Si se tienen dos proposiciones p y q, también se puede leer como:

p o q o ambos
Al menos p o q
Mínimo p o q.

Ejemplo

Convertir al lenguaje formal las proposiciones siguientes:
p: El árbol tiene mangos maduros o mis lentes están rayados.
q: Hay clases en la universidad o un evento científico o ambas cosas.
r: Al menos hay que asistir a clases o se corre el riesgo de no aprobar.
s: Mínimo para ingresar a la universidad hay que ser bachiller.

Respuestas

La formalización de estos ejemplos se logra así:

p: <u>El árbol tiene mangos maduros</u> o <u>mis lentes están rayados</u>.
r *s*

$$p: r \vee s$$

q: <u>Hay clases en la universidad</u> o <u>un evento científico</u> o ambas cosas.
u *p*

$$q: u \vee p$$

r: <u>Al menos hay que asistir a clases</u> o <u>se corre el riesgo de no aprobar</u>.
t *w*

$$r: t \vee w$$

s: Mínimo para ingresar a la universidad hay que ser bachiller o ser técnico medio.

$$s: \underbrace{\text{Mínimo para ingresar a la universidad hay que ser bachiller}}_{r}\ o\ \underbrace{\text{ser técnico medio.}}_{p}$$

$$s: t \vee p$$

Ejemplo

Sean las proposiciones:

$$m: El\ jugo\ está\ simple$$
$$n: Hay\ azúcar\ en\ el\ mercado$$

Convertir al lenguaje natural las proposiciones:

a. $p_1: m \vee n$
b. $p_2: \neg m \vee n$

Respuestas

a. $p_1: El\ jugo\ está\ simple\ o\ hay\ azúcar\ en\ el\ mercado.$
b. $p_2: El\ jugo\ no\ está\ simple\ o\ hay\ azúcar\ en\ el\ mercado.$

Disyunción exclusiva

Símbolo usado: $\veebar$
Se lee: o…o…

Ejemplo

Convertir al lenguaje formal las proposiciones siguientes:
q: O el vaso está lleno de agua o le falta agua al vaso.
r: O Juan trabaja de noche o Juan duerme toda la noche.
t: O María nació durante el mes de enero o María nació en febrero.
u: O esos muchachos son universitarios o son liceístas.

Respuestas

Se observa que el conectivo lógico está fraccionado en dos partes, existiendo una proposición entre las dos "o" y finalizando con la otra proposición. De igual forma, en este tipo de proposiciones compuestas las proposiciones simples generalmente representan posiciones antagónicas o que no se pueden producir de manera simultánea.

La formalización de estos ejemplos se logra así:

$$q: O\ \underbrace{\text{el vaso está lleno de agua}}_{r}\ o\ \underbrace{\text{le falta agua al vaso.}}_{t}$$

$$q: r \veebar t$$

r: *O* *Juan trabaja de noche* *o* *Juan duerme toda la noche.*

p v

$r: p \veebar v$

t: *O* *María nació durante el mes de enero* *o* *María nació en febrero.*

q s

$t: q \veebar s$

u: *O* *esos muchachos son universitarios* *o* *son liceístas.*

q t

$u: q \veebar t$

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

r: *Agosto es mes de vacaciones.*

s: *Mi hermano fue a trabajar.*

Convertir al lenguaje natural las proposiciones:

a. $p_1: r \veebar s$

b. $p_2: r \veebar \neg s$

Respuestas

a. p_1: *O agosto es mes de vacaciones o mi hermano fue a trabajar.*

b. p_2: *O agosto es mes de vacaciones o mi hermano no fue a trabajar.*

Condicional

Símbolo usado: $\longrightarrow$

Se lee: Si … entonces…

Si se tienen dos proposiciones p y q, el condicional también se puede leer de alguna de las siguientes formas:

Si p entonces q.
p implica q.
p sólo si q.
q si p.
p es suficiente para q.
Para q es suficiente p.
No p a menos que q
q cuando p
q es necesario para p
Para p es necesario q
p en consecuencia q
p se deduce q
p por ende q.

A la proposición p se le conoce como antecedente y a la proposición q como consecuente. Los ejemplos muestran esa relación entre antecedente y consecuente a través de cada una de las formas en que pueden leerse, ya indicadas.

Ejemplo

Formalizar cada una de las siguientes proposiciones:
p_1*: Si el carnaval es antes del 15 de febrero entonces Semana Santa es en marzo.*
q_1*: Contratar personal implica tener que entrenarlo.*
r: El auto se mueve sólo si el motor está en buenas condiciones.
s: El maíz produce buenas mazorcas si ha sido abonado correctamente.
t: Hacer ejercicios es suficiente para tener buena salud.
u: Para lograr una buena comida es suficiente un buen cocinero.
v: No entra en circulación a menos que exista una autorización.
w: Llega bien a la meta cuando practica de manera programada.
x: El riego artificial diario es necesario para cultivar en tiempo de verano.
y: Para resolver un problema es necesario analizarlo previamente.
z: Asumió la jefatura en consecuencia es responsable administrativo.
p_2*: Estaba en el aula, se deduce que es un alumno.*
p_3*: Ha llovido mucho en las cabeceras del río, por ende el nivel está alto.*

Respuesta

La formalización de esto ejemplos se hará asignando al antecedente la letra p y al consecuente la letra q en todos los casos, con la intención de que se aprenda a identificar a cada uno de ellos; sin embargo la asignación de otros identificadores a las proposiciones atómicas no necesariamente debe quedar limitada a solamente las dos letras indicadas, se hace de esa manera a continuación solamente con fines didácticos.

p_1: *Si* $\underbrace{\textit{el carnaval es antes del 15 de febrero}}_{p}$ *entonces* $\underbrace{\textit{Semana Santa es en marzo}}_{q}$.

$$p_1: p \rightarrow q$$

q_1: $\underbrace{\textit{Contratar personal}}_{p}$ *implica* $\underbrace{\textit{tener que entrenarlo}}_{q}$.

$$q_1: p \rightarrow q$$

r: $\underbrace{\textit{El auto se mueve}}_{p}$ *sólo si* $\underbrace{\textit{el motor está en buenas condiciones.}}_{q}$

$$r: p \rightarrow q$$

s: $\underbrace{\textit{El maíz produce buenas mazorcas}}_{q}$ *si* $\underbrace{\textit{ha sido abonado correctamente.}}_{p}$

$$s: p \rightarrow q$$

t: $\underbrace{\textit{Hacer ejercicios}}_{p}$ *es suficiente* $\underbrace{\textit{para tener buena salud}}_{q}$.

$$t: p \rightarrow q$$

u: *Para* $\underbrace{\textit{lograr una buena comida}}_{q}$ *es suficiente* $\underbrace{\textit{un buen cocinero}}_{p}$.

$$u: p \rightarrow q$$

v: *No* $\underbrace{\textit{entra en circulación}}_{p}$ *a menos que* $\underbrace{\textit{exista una autorización}}_{q}$.

$$v: p \rightarrow q$$

w: $\underbrace{\textit{Llega bien a la meta}}_{q}$ *cuando* $\underbrace{\textit{practica de manera programada.}}_{p}$

$$w: p \rightarrow q$$

x: $\underbrace{\textit{El riego artificial diario}}_{q}$ *es necesario* $\underbrace{\textit{para cultivar en tiempo de verano.}}_{p}$

$$x: p \rightarrow q$$

y: *Para* $\underbrace{\textit{resolver un problema}}_{p}$ *es necesario* $\underbrace{\textit{analizarlo previamente.}}_{q}$

$$y: p \rightarrow q$$

z: $\underbrace{\textit{Asumió la jefatura}}_{p}$ *en consecuencia* $\underbrace{\textit{es responsable administrativo.}}_{q}$

$$z: p \rightarrow q$$

p_2: $\underbrace{\textit{Estaba en el aula,}}_{p}$ *se deduce que* $\underbrace{\textit{es un alumno}}_{q}$.

$$p_2: p \rightarrow q$$

p_3: $\underbrace{\textit{Ha llovido mucho en las cabeceras del río,}}_{p}$ *por ende* $\underbrace{\textit{el nivel está alto.}}_{q}$

$$p_3: p \rightarrow q$$

Ejemplo

Sean las proposiciones:

r: *La vegetación está marchita*

s: *El suelo tiene pocos nutrientes*

Expresar en lenguaje natural las proposiciones:

a. $p_1: s \rightarrow r$

b. $p_2: \neg(s \rightarrow r)$

Respuestas

a. p_1: *Si el suelo tiene pocos nutrientes entonces la vegetación está marchita.*

b. p_2: *No es cierto que cuando la vegetación está marchita el suelo tiene pocos nutrientes*.

Bicondicional

Símbolo usado: $\leftrightarrow$
Se lee: si y solo sí.
Si las proposiciones atómicas son p y q, las alternativas de lectura son:

P si y solo si q.
P es necesario y suficiente para q.
P es equivalente a q.
P cuando y sólo cuando q.
P entonces y sólo entonces q.

Ejemplo

Expresar en lenguaje formal cada una de las proposiciones siguientes:
p_1: *Aprobarás el examen si y sólo si estudias mucho.*
p_2: *Hacer ejercicios es necesario y suficiente para tener buena salud.*
p_3: *Tener una bicicleta es equivalente a llegar más temprano a casa.*
p_4: *Llueve cuando y solo cuando está nublado*
p_5: *Vio el noticiero, entonces y sólo entonces se enteró del terremoto.*

Respuesta

La conversión al lenguaje formal de esas proposiciones compuestas es:

p_1: $\underbrace{\textit{Aprobarás el examen}}_{p}$ *si y sólo si* $\underbrace{\textit{estudias mucho}}_{q}$.

$$p_1: p \leftrightarrow q$$

p_2: $\underbrace{\textit{Hacer ejercicios}}_{p}$ *es necesario y suficiente* $\underbrace{\textit{para tener buena salud}}_{q}$.

$$p_2: p \leftrightarrow q$$

p_3: $\underbrace{\textit{Tener una bicicleta}}_{p}$ *es equivalente a* $\underbrace{\textit{llegar más temprano a casa}}_{q}$.

$$p_3: p \leftrightarrow q$$

p_4: $\underbrace{\textit{Llueve}}_{p}$ *cuando y solo cuando* $\underbrace{\textit{está nublado.}}_{q}$

$$p_4: p \leftrightarrow q$$

p_5: $\underbrace{\textit{Vio el noticiero}}_{p}$, *entonces y sólo entonces* $\underbrace{\textit{se enteró del terremoto}}_{q}$.

$$p_5: p \leftrightarrow q$$

Ejercicios

1. Expresar en lenguaje formal las proposiciones siguientes:
    a. r: El automóvil es veloz y la bicicleta es lenta
    b. s: O se utiliza leña o se utiliza carbón para asar la carne
    c. t: Sales tarde en las noches en consecuencia puedes ser víctima de delincuentes
    d. u: Se enferma cuando se levanta muy temprano
    e. v: Viajar solo es necesario y suficiente para distraerse
2. Dadas las proposiciones:

    p_1: El mango es una fruta
    p_2: La carne de res está escasa

    Expresar en lenguaje formal las proposiciones compuestas:
    a. r_1: O el mango es una fruta o la carne de resta está escasa
    b. r_2: La carne de res está escasa cuando y sólo cuando el mango es una fruta.
    c. r_3: No es verdad que la carne de res está escasa.
    d. r_4: El mango es una fruta, se deduce que la carne de res está escasa
    e. r_5: Ni la carne de res está escasa ni el mango es una fruta
3. Convertir al lenguaje natural las proposiciones
    a. $p1: r \vee s$
    b. $p2: r \rightarrow s$
    c. $p3: \neg r \vee s$
    d. $p4: r \leftrightarrow \neg s$

    Tomar en cuenta que:
    r: Venezuela es un país tropical
    s: Existe una época de muchas lluvias

Fórmulas bien formadas

Una vez que se conoce el conjunto de caracteres o símbolos involucrados en la lógica proposicional: las proposiciones, los conectivos lógicos y los símbolos de agrupación, se puede hablar de lo que se denomina fórmulas bien formadas (FBF) también llamadas expresiones bien formadas (EBF). Ello configura el lenguaje formal de la lógica de proposiciones.

Se recuerda que los símbolos de agrupación son:

Paréntesis ( )
Corchetes [ ]
Llaves { }

Para que una fórmula proposicional sea considerada bien formada, debe ubicarse en por lo menos uno de los siguientes casos:

1. Si es una variable proposicional que representa a una proposición simple, entonces es una fórmula bien formada.

2. Si p es una fórmula bien formada entonces ¬p es una fórmula bien formada
3. Si p y q son fórmulas bien formadas entonces p∧q, p∨q, p⊻q, p→q, p↔q son fórmulas bien formadas.
4. Una expresión que contenga variables, conectivos y paréntesis es una fórmula bien formada si puede obtenerse aplicando los criterios 1, 2 y 3 un número finito de veces.

Estos casos son citados frecuentemente cuando se analiza si una fórmula está bien formada.

Precedencia de los conectivos lógicos

Para el caso de proposiciones compuestas, la aplicación del caso número 4 para las FBF requiere la observancia de la precedencia, es decir el orden en que se produce la "simplificación". Este orden es el siguiente:

1. Operador de negación ¬
2. Operador de conjunción ∧
3. Operador de disyunción ∨
4. Operador condicional →
5. Operador bicondicional ↔

Dicho orden implica que si en una fórmula aparecen varios de dichos conectivos, se debe empezar a trabajar primero con la negación y por último con el condicional o bicondicional. Sin embargo hay que tomar en consideración que los símbolos de agrupación interrumpen el orden de precedencia.

Ejemplo

Indicar si la variable proposicional *p,* la cual representa a una proposición simple es una fórmula bien formada

Respuesta

Se está representando a una proposición con la letra *p*, la cual está haciendo las veces de una variable proposicional. Se trata del caso 1, ya mencionado para las FBF, por lo tanto la respuesta es afirmativa.

Ejemplo

Indicar si la fórmula $\neg q$, donde q es una variable proposicional que representa a una proposición simple se trata de una FBF.

Respuesta

La variable proposicional q es afectada por la negación. Se está en presencia del caso 2 de las fórmulas bien formadas.

Ejemplo

Indicar si $\neg(p \wedge q)$ es una FBF. Las variables proposicionales p y q representan proposiciones simples.

Respuesta

La conjunción conformada por las variables proposicionales p y q está bien formada. Se trata del caso número 3 de las FBF. Esta conjunción está afectada por la negación, el cual es el caso 2 ya indicado para la FBF. En consecuencia la fórmula propuesta está bien formada.

Ejemplo

Indicar si la fórmula $p \vee \neg r \rightarrow s$ está bien formada.

Respuesta

Hay tres variables proposicionales; de acuerdo con el orden de precedencia, primero se efectúa la negación, luego la disyunción y finalmente el condicional, en consecuencia la fórmula está bien formada.

Ejemplo

Indicar si la fórmula $(\neg r \veebar \neg s) \leftrightarrow (r \rightarrow t)$ está bien formada.

Respuesta

La proposición compuesta del primer paréntesis está bien formada ya que según el orden de precedencia, primero se efectúan las negaciones de las proposiciones r y s y luego la disyunción exclusiva. En el segundo paréntesis se tiene a una proposición compuesta condicional la cual es parte del caso 3 de las fórmulas bien formadas. Finalmente las proposiciones resultantes ambos paréntesis conforman un bicondicional en el que si las proposiciones que lo conforman están bien formadas, tal como ya se explicó, se trata de una FBF.

Ejemplo

Indicar si $(p) \rightarrow (q \vee p)$ es una fórmula bien formada

Respuesta

En el paréntesis a la izquierda del condicional existe solamente una proposición que aunque estuviera precedida de una negación hace innecesaria la presencia de éste en la fórmula. El paréntesis de la derecha es una disyunción, la cual según el orden de precedencia se realiza primero que el condicional, en consecuencia tampoco es necesario el paréntesis. En conclusión la expresión no es una FBF.

Ejemplo

Indicar si la fórmula proposicional $)r$ está bien formada

Respuesta

Todo paréntesis de apertura debe contener su respectivo paréntesis de cierre, en el mismo sentido, todo paréntesis de cierre debe contener su respectivo paréntesis de apertura. La proposición r está antecedida por un paréntesis de cierre sin su respectivo par, en consecuencia la fórmula no es una FBF.

Ejemplo

Indicar si la fórmula proposicional $\wedge\, s$ está bien formada

Respuesta

La conjunción conecta a dos proposiciones por lo tanto es un error la fórmula propuesta en la cual la proposición s es antecedida por el conectivo ∧ sin la presencia de otra proposición antes de ese símbolo. La fórmula no es una FBF.

Ejemplo

Analizar si la fórmula $r \wedge\vee\, p$ está bien formada

Respuesta

Las proposiciones r y p están conectadas por dos símbolos que de manera independiente tienen significado para la lógica proposicional pero que juntos tal como están carecen de sentido. La expresión no es una FBF.

Conectivo lógico principal

Es importante determinar el conectivo principal puesto que los símbolos de agrupación pueden alterar completamente el valor de una fórmula proposicional. Observe las siguientes proposiciones compuestas.

a. $p \wedge q \veebar r \rightarrow \neg \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q}$
b. $p \wedge \left(q \veebar r \rightarrow \neg \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q}\right)$
c. $\left(p \wedge q \veebar r \rightarrow \neg \mathrm{p}\right) \vee \neg \mathrm{q}$
d. $(p \wedge q) \veebar (r \rightarrow \neg \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q})$

En el caso a, el conectivo principal es el de mayor precedencia; por lo tanto se trata de la implicación. En b, el paréntesis interrumpe la precedencia, en consecuencia, el conectivo principal es la conjunción. En c, de nuevo el paréntesis altera la precedencia y el conectivo principal es la disyunción inclusiva. Finalmente, en d, los paréntesis conforman dos bloques separados por la disyunción exclusiva, por lo tanto ese es el conectivo principal. Dentro de los paréntesis se reanuda la aplicación de las reglas de precedencia.

Es importante dominar estas reglas puesto que constituyen la base para la realización de operaciones tanto aritméticas como algebraicas. Una regla útil para determinar el conectivo principal es numerar de izquierda a derecha los paréntesis que abren, si consigue un paréntesis de cierre debe disminuir en 1 esta numeración, al momento de llegar a cero, el conectivo inmediato es el principal, aspecto que se puede visualizar en la Figura 7.

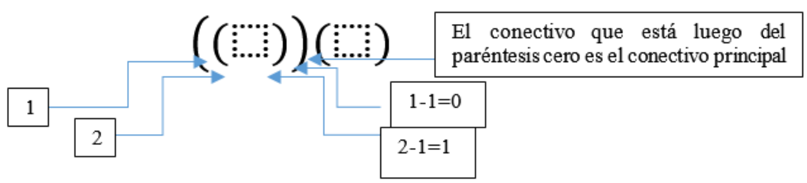


Figura 7: El conectivo lógico principal es aquel conectivo que está luego del paréntesis de cierre del primer paréntesis en el sentido normal de lectura. Si no existe paréntesis es el primer conectivo de la proposición.

Ejemplo

Identificar el conectivo principal de la proposición: $(p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

Respuesta

Se plantea la misma estructura, asignando un 1 al primer paréntesis de apertura, como el siguiente paréntesis es de cierre se resta 1. Si el resultado es cero el conectivo que sigue a ese paréntesis de cierre es el conectivo principal.

$(p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

El conectivo que sigue al paréntesis 0 es la disyunción, por lo tanto es el conectivo principal.

El conectivo principal es $\vee$

Ejemplo

Identificar el conectivo principal en la proposición:

$$\big((p \vee \neg r) \wedge \neg(p \wedge q) \vee \neg q\big) \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

Respuesta

El paréntesis que cierra al primer paréntesis de la izquierda en el sentido normal de lectura es el que está justo después de $\neg q$, el cual es el paréntesis cero, observe que en ese punto hay tres paréntesis que abren y tres paréntesis que cierran.

El conectivo que sigue al paréntesis 0 es el condicional, por lo tanto es el conectivo principal.

El conectivo principal es →

Ejemplo

Identificar el conectivo principal en la proposición: $\neg p \wedge (p \longrightarrow q)$

Respuesta

En este caso el la negación es primer conectivo y por lo tanto es el conectivo principal. Observe que el paréntesis cero está luego de la proposición q y luego de esta finaliza la proposición compuesta.

El conectivo principal es ¬

Ejemplo

Identificar el conectivo principal en la proposición $r \wedge s \vee (r \rightarrow t)$

Respuesta

El conectivo principal está después de la variable proposicional r. No se requiere contar los paréntesis ya que la proposición compuesta comienza por una letra que identifica a una proposición.

El conectivo principal es ∧

Ejercicios

---

1. Indicar si la fórmula proposicional $)p \vee q$ está bien formada
2. Indicar si la fórmula proposicional $p \vee\vee q \wedge (r \vee s)$ es una fórmula bien formada
3. Indicar si la formula $(p \wedge (p \vee q) \vee r) \rightarrow (r \vee s)$ es una FBF
4. Identificar el conectivo principal en la proposición $p \wedge q \rightarrow r$
5. Identificar el conectivo principal en la proposición $\neg r \wedge s \vee (p \underline{\vee} s)$
6. Identificar el conectivo principal en la proposición $(\neg p \rightarrow (q \vee r) \wedge s) \vee (p \wedge q)$

Valor de Verdad de Proposiciones Simples y Compuestas

Cuando se habla de valor de verdad de una proposición se está haciendo referencia a su valor lógico, es decir si se trata de una proposición que es verdadera o es falsa. En esta sección se estudia en primer lugar el valor lógico de las proposiciones simples, luego se plantean las tablas de verdad para los conectivos lógicos, en la cual se presentan las diferentes opciones ante los valores que puede asumir una proposición simple, estas tablas constituyen la base para la determinación del valor lógico de proposiciones compuestas, las cuales son estudiadas en la parte final de esta sección.

Valor de Verdad de una Proposición Simple

Una proposición simple puede ser cierta (V) o falsa (F) no dejando lugar a dudas acerca de su verdad o falsedad. Ese único valor que tiene la proposición es el que se denomina valor de verdad, también llamado valor lógico.

El valor de verdad o valor lógico de una proposición p se simboliza como $VL(p)$.

Ejemplo

Determinar el valor lógico de cada proposición:

a. *p: El río Apure limita a la ciudad de San Fernando por su lado Norte.*
b. *q: El año tiene 400 días.*
c. *r: Guayabal es un municipio del estado Guárico.*
d. *s: El apamate es el árbol nacional de Venezuela.*
e. *t: Ezequiel Zamora fue un prócer de la independencia de Venezuela.*
f. *u: Todo número compuesto tiene al menos dos factores primos*
g. *v: 12 es un múltiplo de 3.*
h. *w: cualquier número primo es divisible entre 2.*

Respuestas

Se trata de proposiciones simples, las cuales pueden adquirir solamente dos valores Verdadero o Falso:

a. VL(p)=V
b. VL(q)=F
c. VL(r)=V
d. VL(s)=V
e. VL(t)=V
f. VL(u)=V
g. VL(v)=V
h. VL(w)=F

Tablas de verdad para los conectivos lógicos

Se trata de tablas que muestran los posibles valores de verdad que adquiere una proposición compuesta tomando en cuenta el conectivo que une a las proposiciones simples. En tal sentido, la Tabla 1 muestra las alternativas existentes para la negación, la Tabla 2 muestra los posibles valores de verdad para la disyunción inclusiva, la Tabla 3 para la disyunción exclusiva, la Tabla 4 para la conjunción, la tabla 5 para la el condicional y la tabla 6 para el bicondicional.

Tabla 1
Valores de verdad para la Negación

p	**-p**
V	F
F	V

Tabla 2
Valores de verdad para la disyunción inclusiva

p	**q**	**$p \vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 3
Valores de verdad para la disyunción exclusiva

p	**q**	**$p \veebar q$**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Tabla 4
Valores de verdad para la conjunción

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 5
Valores de verdad para el condicional

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 6
Valores de verdad para el bicondicional

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Valor de verdad de una proposición compuesta

Si se conocen los valores lógicos de las proposiciones simples que conforman a una proposición compuesta, es fácil determinar el valor lógico de esta última. El cuidado que se debe tener es considerar el conectivo o los conectivos lógicos presentes en la estructura o fórmula y respetar las reglas de precedencia.

Ejemplo

Sean los proposiciones
p: Si x=2 entonces $3x^2=12$
q: 3 es un divisor de 20.
Calcular el valor lógico de $p \wedge q$

Respuesta

$VL(p) = V$ ya que $3(2)^2 = 3(4) = 12$
$Vl(q) = F$ ya que al dividir 20 entre 3 el resultado es un número que no es entero.

Se trata de una conjunción, en tal sentido, se toma como referencia Tabla 4 y se considera la fila donde $VL(p) = V$ y $VL(q) = F$. La segunda fila de esa tabla cumple con las especificaciones indicadas.

p	**q**	$\boldsymbol{p \wedge q}$
V	F	F

Por lo tanto

$$VL(p \wedge q) = F$$

Ejemplo

Calcule el valor lógico de la proposición: ¬(p∨¬q)⟶ (r∨q)∧¬p si VL(p)=V, VL(q)=F y VL(r)=F.

Respuesta

En este caso los valores lógicos de las proposiciones están dados en el planteamiento, motivo por el cual no hay que realizar algún cálculo para verificar la certeza de cada proposición simple.

La proposición compuesta está conformada a su vez por otras proposiciones compuestas y estas por dos proposiciones simples. Se analiza cada uno de estos últimos casos:

¬(p∨¬q)
$VL(\neg q) = V$ de acuerdo con la fila 2 de la Tabla 1

El conectivo principal es la negación. Dentro del paréntesis está una disyunción inclusiva; se observa en la Tabla 2 la fila que contiene dos valores verdaderos para las proposiciones simples; el valor de la proposición compuesta es Verdadero. Sin embargo el conectivo principal cambia el sentido de ese valor, por lo tanto esa primera proposición compuesta es Falsa.

$$VL[\neg(p \vee q)] = F$$

(r∨q)∧¬p

En esta proposición compuesta el conectivo principal es la conjunción. A la izquierda de la conjunción está un paréntesis conformado por dos proposiciones simples y la disyunción inclusiva. Se busca en la tabla 2 la fila que contiene dos valores falsos para las proposiciones simples (fila 4), el resultado es falso. La negación de la proposición p es una proposición falsa; por lo tanto se tiene una conjunción con dos valores falsos que coincide con la fila 4 de la tabla 4 generando un valor falso.

$$VL[(r \vee q) \wedge \neg \mathrm{p}] = F$$

¬(p∨¬q)⟶ (r∨q)∧¬p

Esta proposición compuesta contiene dos proposiciones compuestas que ya han sido analizadas separadas por el condicional. La proposición a la izquierda del condicional es falsa al igual que la proposición de la derecha. La tabla 5 muestra que para dos valores falsos del condicional, la proposición es verdadera.

$$VL[\neg(\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q}) \longrightarrow (\mathrm{r} \vee \mathrm{q}) \wedge \neg\mathrm{p}] = V$$

A manera de resumen se puede construir una tabla cuyas columnas iniciales la conforman las proposiciones simples, luego las negaciones de las proposiciones simples que estén presentes en la proposición compuesta, luego las proposiciones dentro de los paréntesis y finalmente la fórmula completa. Buscar el conectivo que corresponda y colocar el valor lógico de acuerdo con los valores lógicos que conforman las proposiciones simples y las tablas de conectivos lógicos.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \neg\mathbf{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \vee \neg\mathbf{q})$	$\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \neg\mathbf{p}$	$\neg(\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \longrightarrow (\mathbf{r} \vee \mathbf{q}) \wedge \neg\mathbf{p}$
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V

En consecuencia $VL[\neg(\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q}) \longrightarrow (\mathrm{r} \vee \mathrm{q}) \wedge \neg\mathrm{p}] = V$

.

Ejemplo

Calcular el valor lógico de la proposición $\neg\mathrm{r} \wedge (\neg\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{t}) \vee (r \rightarrow (\neg\mathrm{t} \vee \mathrm{s}) \wedge s)$, dados los valores lógicos siguientes: VL(r)=V; VL(s)=V; VL(t)=V.

Respuesta

$VL(\neg\mathrm{r}) = F$
$VL(\neg\mathrm{s}) = F$
$VL(\neg\mathrm{t}) = F$
$VL(\neg\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{t}) = V$
$VL\big(\neg\mathrm{r} \wedge (\neg\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{t})\big) = F$
$VL(\neg\mathrm{t} \vee \mathrm{s}) = V$
$VL\big((\neg\mathrm{t} \vee \mathrm{s}) \wedge s\big) = V$
$VL(r \rightarrow (\neg\mathrm{t} \vee \mathrm{s}) \wedge s) = V$
$VL\big(\neg\mathrm{r} \wedge (\neg\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{t}) \vee (r \rightarrow (\neg\mathrm{t} \vee \mathrm{s}) \wedge s)\big) = V$
VL(¬ r∧ (¬s⟶ t)∨(r⟶ (¬t∨s)∧s))=V

Tabla de verdad una fórmula proposicional

Es posible conformar la tabla de verdad de cualquier proposición compuesta. Para ello se deben seguir los pasos siguientes:

1. Identificar las variables proposicionales
2. Efectuar el cálculo 2^n donde n es el número de variables proposicionales. Esta cifra corresponde al número de filas de la tabla
3. Conformar las columnas de la tabla partiendo de las variables proposicionales de la fórmula, luego esas variables negativas si están presentes en la fórmula, luego los paréntesis y finalmente la fórmula completa.
4. Asignar Verdadero o Falso a las proposiciones que integran la fórmula, tomando en cuenta el valor calculado en el punto 2.

En este tipo de acciones es posible obtener cualquiera de las opciones siguientes:

a. Tautología. Al final se obtienen solamente valores verdaderos.
b. Contradicción. Al final se obtienen solamente valores falsos.
c. Indeterminación. Al final se obtienen tanto valores verdaderos como valores falsos.

Si una fórmula es una tautología, entonces es una Ley.

Ejemplo

Construir la tabla de verdad de la proposición e indicar si es una tautología, contradicción o Indeterminación:

$$\neg(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$$

Respuesta

El número de variables proposicionales presentes en el fórmula es dos.

$$número\ de\ filas = 2^2 = 4$$

Se construye la tabla, partiendo de las proposiciones simples y su negación en caso de estar presente y finalizando con la proposición compuesta.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F

Las cuatro alternativas posibles en cuanto a la combinación de valores que pueden asumir las proposiciones simples, conducen a tres valores de verdad verdaderos y uno falso de la proposición que se está analizando, por lo tanto se trata de una indeterminación.

Ejemplo

Indicar si la proposición $p \wedge (q \vee r) \rightarrow (r \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$ se trata de una tautología, una contradicción o una indeterminación.

Respuesta

Existen tres variables proposicionales, por lo tanto el número de filas que contiene la tabla es:

$$número\ de\ filas = 2^3 = 8$$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$r \vee q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(r \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	$p \wedge (q \vee r) \rightarrow (r \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F	V

Las ocho combinaciones posibles de los resultados que pueden asumir las variables proposicionales conducen a resultados verdaderos y falsos de la proposición compuesta, por lo tanto se trata de una indeterminación.

Ejemplo

Indicar si la proposición ¬(p∨q)↔(¬p∧¬q) es una tautología, una contradicción o una indeterminación.

Respuesta

Existen solamente dos variables proposicionales. El número de filas de la tabla es:

$$número\ de\ filas = 2^2 = 4$$

p	q	¬p	¬q	$p \vee q$	¬(p ∨ q)	¬p ∨ ¬q	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Todas las combinaciones en los valores de las variables proposicionales conducen a un resultado verdadero de la proposición compuesta, por lo tanto se trata de una tautología.

La hoja de cálculo como tabla de verdad

Las hojas de cálculo son de mucha utilidad actualmente, puesto que permiten la realización de operaciones de cálculo sobre una matriz rectangular conformada por celdas sin necesidad de estar introduciendo valores repetidas veces. Esto se logra a través de la conformación de fórmulas que se introducen respetando las referencias a las celdas.

En esta oportunidad aprenderemos a usar la hoja de cálculo para obtener tablas de verdad de los conectivos lógicos, tomando como base la versión 2013 de MS Excel, pero que con ligeras modificaciones aplica a cualquier versión e inclusive a Calc, la hoja de cálculo de Open Office.

1. Abrir la hoja de cálculo
2. En la celda A2 escribir la letra p, en la celda B2 escribir la letra q.
3. En la celda C2 escribir $p \wedge q$, En la celda D2 escribir $p \vee q$, en la celda E2 escribir $p \veebar q$, en la celda F2 escribir $p \rightarrow q$ y en la celda G2 escribir $p \leftrightarrow q$. Puede valerse del editor de ecuaciones para insertar cada una de esas proposiciones compuestas.
4. Para cada una de las acciones siguientes pulse el botón insertar función, el cual se parece a ***fx*** y está ubicado justo encima de la primera fila de la hoja de cálculo.
    a. Ubicar el cursor en la celda C3, inserte la función lógica Y. En la ventana emergente "Argumentos de función" escribir como Valor lógico 1: A3 y como Valor lógico 2: B3. Pulsar el botón Aceptar.
    b. Ubicar el cursor en la celda D3, insertar la función lógica O. En la ventana emergente "Argumentos de función" escribir los mismos valores mencionados en el punto a.
    c. Ubicar el cursor en la celda E3, insertar la función lógica XO, denominada O exclusiva y siga los pasos indicados en el punto a. En el caso de que su hoja de cálculo no tenga esta función, introduzca la función lógica SI y en la ventana "Argumentos de función", fila prueba lógica, escriba Y(A3, B3), en valor_si_verdadero: FALSO y en valor_si_falso: VERDADERO. Pulse el botón Aceptar.
    d. Ubicar el cursor en la celda F3, insertar la función lógica SI y la ventana emergente "Argumentos de función", prueba lógica, escriba Y(A3=1; B3=0), en la fila valor_si_verdadero escribir FALSO, en la fila valor_si_falso escribir VERDADERO. Pulsar el botón Aceptar
    e. Ubicar el cursor en la celda G3 e insertar la función lógica SI. En la ventana emergente "Argumentos de función", fila prueba lógica escriba: A3=B3, en la fila valor_si_verdadero escribir VERDADERO, en la fila valor_si_falso escribir FALSO. Pulsar el botón Aceptar.
5. En este punto configuremos los valores de entrada de tal modo que el usuario pueda introducir solamente 0 o 1 los equivalentes numéricos a falso, verdadero. Ubicar el cursor en la celda A3 y arrastrarlo hasta B3 para seleccionar ambas celdas. Con la pestaña "Datos" de la barra de menú seleccionada, buscar la opción "Validación de datos" y en la pestaña Configuración introducir los valores tal como se muestra en la Figura 8.

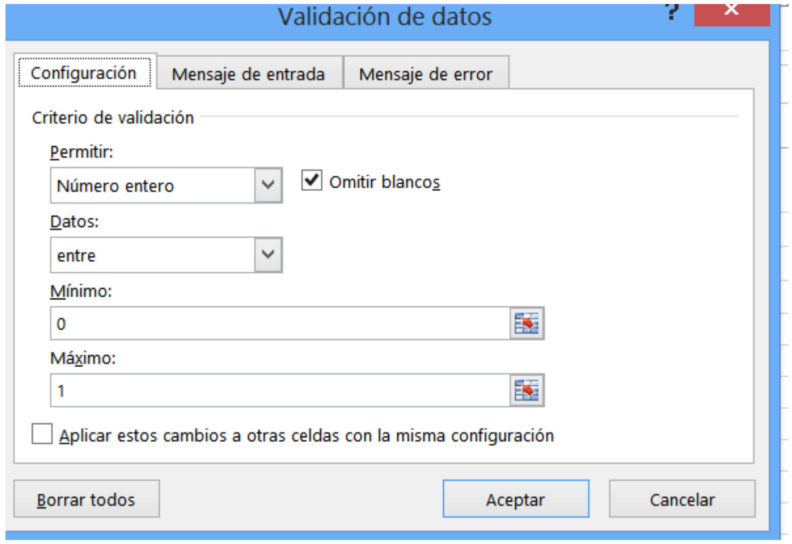


Figura 8: Configuración de la hoja de cálculo para validar los datos de entrada.

Si desea que se muestre un mensaje cuando el usuario hace clic sobre una de las celdas A3 o B3, haga clic en la pestaña Mensaje de entrada y escriba algo similar a lo indicado en la Figura 9.

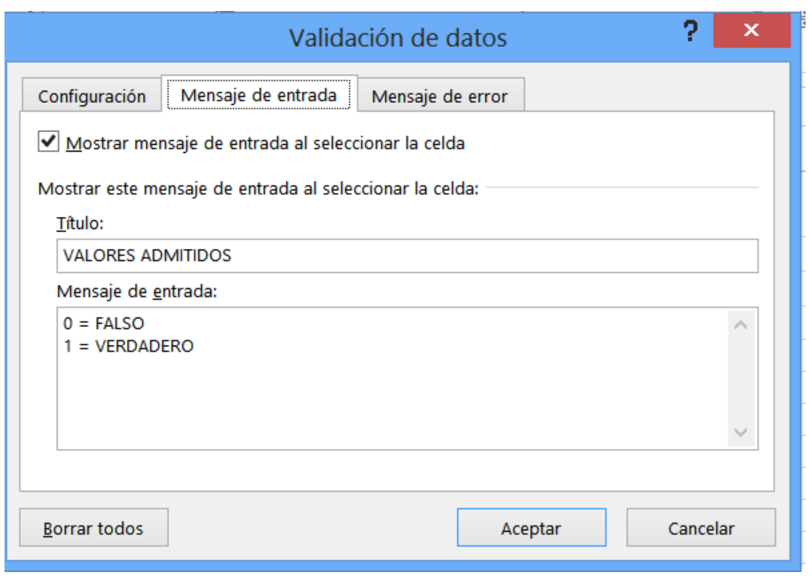


Figura 9: Configuración de un mensaje de entrada en la hoja de cálculo.

Proceda de igual forma, pulsando la pestaña Mensaje de error, si desea un mensaje particular cuando se genera un error.

6. ¡Listo! solo falta escribir los títulos de cada uno de los conectivos lógicos en la fila 1 y si lo desea, colorear los bordes y rellenar las celdas con colores. El resultado final se muestra en la Figura 10. Si usted desea, puede copiar las celdas de la fila 3 y pegarlas en las filas 4, 5 y 6 para obtener toda las posibles combinaciones de p y q..

	A	B	C	D	E	F	G
1			CONJUNCION	DISYUNCION INCLUSIVA	DISYUNCION EXCLUSIVA	CONDICIONAL	BICONDICIONAL
2	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
3	1	1	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
4							

Figura 10: Hoja de cálculo para calcular el valor de verdad de proposiciones compuestas.

Software para el cálculo del valor lógico de proposiciones compuestas

Dentro del software libre actualmente disponible en la web, existe uno cuyo nombre es AnallogicA que está diseñado para el cálculo del valor lógico de proposiciones compuestas, admite un máximo de quince variables proposicionales diferentes y previamente verifica que los datos que introduce el usuario correspondan a una fórmula bien formada. El software muestra todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de una proposición compuesta, la cual introduce el usuario en una caja de texto utilizando la notación que se ha explicado en las diferentes secciones de este capítulo.

Por ejemplo, si se está interesado en la tabla de verdad de la proposición $p\vee(\neg p\vee\neg q)\rightarrow\neg r\wedge(p\rightarrow q)$, se procede de la manera siguiente:

1. Abrir el software Anallogica, el cual previamente debe descargarse e instalarse en la computadora.
2. Escribir en la fórmula usando las herramientas disponibles (Figura 11).

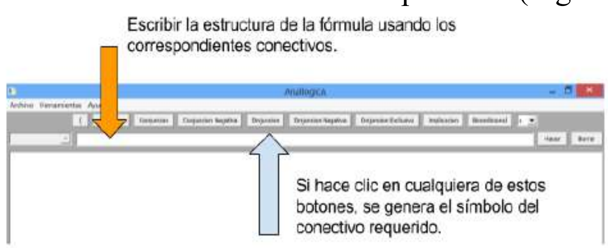


Figura 11: Ventana para la escritura de la proposición del software Anallogica

3. Una vez escrita la fórmula, hacer clic en el menú Herramientas-Comprobar sintaxis, esto determinará si se introdujo correctamente la fórmula (Figura 12).

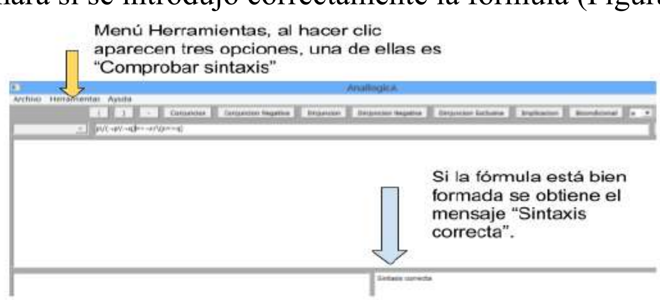


Figura 12: El software Anallogica comprueba la sintaxis de la proposición compuesta.

4. Hacer clic en el botón “Hacer” situado en la parte derecha (Figura 13).

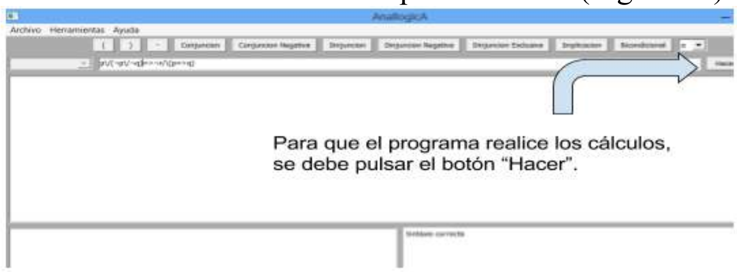


Figura 13: Una vez escrita la fórmula proposicional y verificada la sintaxis, se pulsa el botón Hacer.

5. Finalmente se obtiene la tabla de verdad de la proposición (Figura 14).

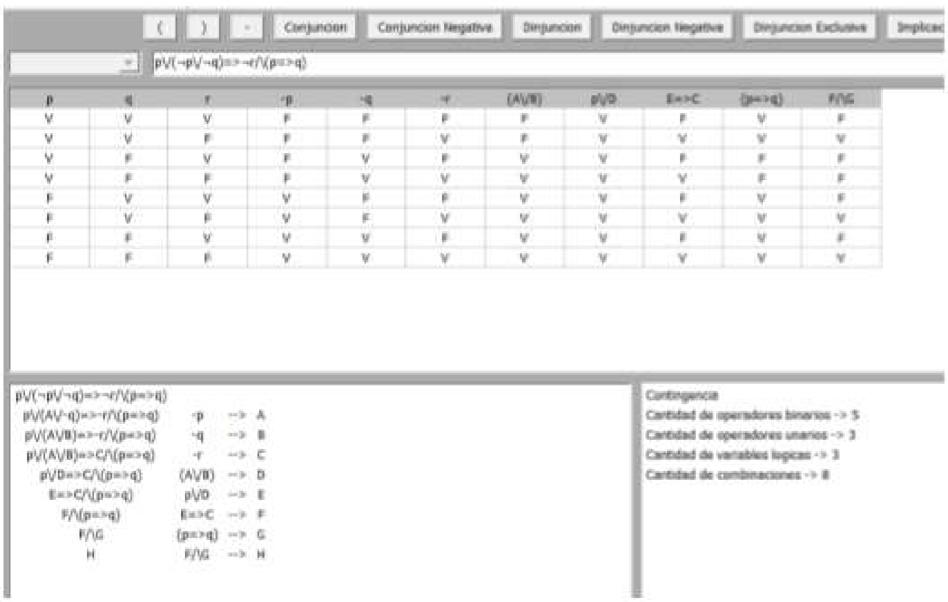


Figura 14: Tabla de verdad de la proposición $p\vee(\neg p\vee\neg q)\rightarrow\neg r\wedge(p\rightarrow q)$, generada con el software Anallogica.

Ejercicios

1. Tomando en cuenta su experiencia y conocimientos indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:
   a. p1: Existen automóviles eléctricos
   b. p2: En un eclipse solar la tierra se interpone entre el sol y la luna
   c. p3: Si $x = 4$, entonces $5x = 15$
   d. p4: Linux es un sistema operativo
   e. p5: Apure es un estado de Venezuela

f. p6: El agua tiene 4 moléculas de hidrógeno
g. p7: En un equipo de fútbol hay 6 jugadores en cancha
h. P8: La finalidad del juego de ajedrez es atrapar al rey

2. Dadas las proposiciones

$$p: si\ x = 3\ entonces\ x^3 = 9$$
$$q: Si\ x + 5 = 7\ entonces\ x = 2$$

Calcular el valor de verdad de las proposiciones:

a. $r: p \vee q$
b. $s: p \wedge q$
c. $t: \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}$
d. $\mathrm{u}: \neg p \leftrightarrow q$

3. Dados los valores de verdad de las proposiciones:

$$VL(p) = F$$
$$VL(q) = V$$
$$VL(r) = V$$

Calcular el valor de verdad de la proposición $\neg \mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \vee (p \wedge \neg \mathrm{r}) \leftrightarrow \neg \mathrm{q} \wedge \mathrm{r}$

4. Construya la tabla de verdad de las proposiciones dadas y concluya si se trata de una tautología, indeterminación o contradicción.

a. $p \rightarrow \neg(p \vee q)$
b. $p \underline{\vee} r \leftrightarrow (r \wedge \neg \mathrm{q}) \vee (q \rightarrow r)$
c. $\big((p \vee q) \vee r\big) \leftrightarrow \big(p \vee (q \vee r)\big)$
d. $(p \vee q) \wedge (\neg \mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q})$

Leyes de las Proposiciones Lógicas

Cuando se tiene una fórmula proposicional cuyas variables proposicionales en concordancia con los conectivos lógicos generan solamente valores lógicos verdaderos, aunque estas variables sean falsas, se está en presencia de una ley. Dicha ley puede ser comprobada mediante la construcción de la tabla de verdad para la fórmula proposicional. Para efectos de su estructura se usarán las proposiciones p, q, r.

Leyes de idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$
$$(p \vee \neg \mathrm{p}) \leftrightarrow p$$

Ley conmutativa

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

Ley asociativa

$$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$
$$[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

Ley distributiva

$$[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$$
$$[(p \vee q) \wedge r] \leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$$

Ley de Morgan

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$
$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Leyes de la implicación

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$
$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \leftrightarrow (p \wedge q)$$

Principio de contradicción

$$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow F$$

Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez

Principio de no contradicción

$$(p \vee \neg p) \leftrightarrow V$$

Conocido también como principio del tercero excluido: una proposición tiene solamente dos valores: falso o verdadero.

Negación de la negación

$$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$$

La negación de la negación es la afirmación

Ejercicios

1. Demostrar mediante una tabla de verdad la ley asociativa
2. Demostrar mediante una tabla de verdad las leyes de la implicación
3. Demostrar mediante una tabla de verdad la ley distributiva

Resumen

- La lógica es la ciencia que estudia la manera correcta de razonamiento.
- Una proposición es una oración que es exclusivamente verdadera o exclusivamente falsa.
- La lógica proposicional tiene su fundamento en las proposiciones, las cuales pueden ser simples o compuestas.
- Una proposición compuesta está conformada por al menos dos proposiciones simples unidas a través de un conectivo lógico.
- Los conectivos lógicos son símbolos utilizados en la lógica proposicional para unir de manera sintácticamente correcta a proposiciones simples.
- Los conectivos lógicos son: negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional.
- El valor lógico de una proposición es el valor verdadero o falso que puede tener dicha proposición.
- Para calcular el valor lógico de una proposición compuesta se deben considerar los valores lógicos de las proposiciones simples y los conectivos lógicos.
- La tabla de verdad de una proposición compuesta permite estudiar los resultados posibles ante los valores que asumen las proposiciones simples.

Términos Clave

- Lógica
- Proposición
- Lógica proposicional
- Conectivo lógico
- Valor lógico
- Tabla de verdad

Ejercicios de Autoevaluación

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones.
   a. El basquetbol venezolano clasificó a los juegos Olímpicos Rio 2016.
   a. La multiplicación de dos números negativos es positiva.
   b. ¿Cuándo finaliza el presente semestre?
   c. Francisco de Miranda es un prócer de la independencia venezolana.
   d. ¿En cuál liceo se graduó usted?
   e. El agua es necesaria para la vida.
   f. Vengan pronto por favor.
   g. ¿cuál es tu nombre?
   h. El fenómeno "El niño" afecta el clima mundial.
   i. Plutón no es un planeta del sistema solar.
   j. Esta frase tiene cinco palabras.
   k. ¿Cuándo culminan tus estudios?
2. Sean las proposiciones:
   p: Soy bachiller
   q: Estoy en la Universidad
   r: Vivo en una residencia estudiantil
   Traducir al lenguaje natural cada una de las siguientes proposiciones:
   a. $p \wedge r$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $\sim (\sim q)$
   d. $\sim (\sim p \rightarrow r)$
   e. $(p \wedge q) \rightarrow r$
   f. $(q \wedge r) \rightarrow p$
3. Considere las proposiciones:
   u: La lógica proposicional estudia las proposiciones.
   v: Una proposición puede ser cierta o falsa.
   w: La lógica se originó en Grecia.
   Expresar en el lenguaje natural las proposiciones compuestas:
   a. $q_1: u \wedge v$
   b. $q_2: (w \ \vee u) \longrightarrow v$
   c. $q_3: -w \ \wedge \ -u$
   d. $q_4: v \leftrightarrow u$
4. Dadas las proposiciones:
   p: La Unellez es una universidad experimental.
   q: la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma.
   r: La licenciatura en educación es una carrera de pregrado.
   t: El VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure.

   Traducir al lenguaje formal las siguientes proposiciones compuestas:

a. p_1: *Si la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma o el VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure entonces no es cierto que la licenciatura en educación es una carrera de pregrado.*
b. p_2: *La licenciatura en educación es una carrera de pregrado si y solo si la Unellez es una universidad experimental y el VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure.*
c. p_3: *No es verdad que la Unellez es una universidad experimental ni que la universidad de Carabobo es una universidad autónoma.*
d. p_4: *La licenciatura en educación es una carrera de pregrado y la Unellez es una universidad experimental o la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma.*

5. Formalizar las siguientes proposiciones.
   a. No es cierto que el río Apure se desborda durante el mes de marzo.
   b. Si compro azúcar entonces tomaré café.
   c. O me voy para la fiesta o me pongo a estudiar matemática.
   d. Vas a la universidad en carro o en moto.
   e. Si hacemos ejercicio físico entonces nos distraemos y cuidamos nuestra salud
   f. No es cierto que un vehículo nuevo cueste tan caro y que mi mamá trabaja.

6. Elaborar la tabla de verdad para cada proposición e indicar si es una tautología, indeterminación o contradicción.
   a. $p_1: (p \longrightarrow q) \leftrightarrow (-p \vee q)$
   b. $p_2: (p \wedge r) \vee p \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee q)$

Bibliografía Recomendada

Andrade, E., Cubides, P., Marquez, C., Vargas, E. y Cancino, D. (2008). *Lógica y pensamiento formal*. Bogotá: Universidad del Rosario.

Iriarte, F., Espeleta, Á., Zapata, E., Cortina, L., Zambrano, E., Fernández,F. (2010). El razonamiento lógico en estudiantes universitarios. *Zona Próxima*, núm. 12, enero-junio,

Universidad del Norte.Barranquilla, Colombia

Los Santos, I. (2003). *Matemáticas*. Madrid: Esic

Silva, J.M. (2003). *Fundamentos de matemáticas: Algebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo (6a ed.)*. México: Limusa.

Trelles, O. y Rosales, D. (2002). *Introducción a la lógica*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

CAPÍTULO 2

Introducción a la Teoría de Conjuntos

Objetivos:

General

Comprender las bases de la teoría de conjuntos mediante la integración de los conocimientos nuevos con los conocimientos que poseen los estudiantes sobre este tema.

Específicos

- Asociar la idea intuitiva de conjunto con los fundamentos de lógica proposicional en situaciones derivadas de la realidad.
- Reconocer el uso de los símbolos utilizados en la representación de conjuntos mediante ejemplos prácticos como una forma conversión entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje formal.
- Distinguir las relaciones que se producen entre los elementos de un conjunto y entre conjuntos mediante la solución de situaciones prácticas.
- Interpretar las operaciones entre conjuntos a través de la solución de situaciones expresadas simbólicamente o mediante diagramas de Venn.

Introducción

En este capítulo se revisan los aspectos teóricos básicos relacionados con los conjuntos, los cuales se estudiarán desde la concepción elemental o intuitiva, sin adentrarnos en situaciones que en el siglo pasado condujeron a paradojas entre las cuales la más famosa es la de Bertrand Russell. Dicho enfoque elemental se basa en los postulados desarrollados por Georg Cantor (1845-1918), quien conjuntamente con Dedekind y Frege fue el inventor de la teoría de conjuntos.

En el primer capítulo se estudian tópicos relacionados con la lógica proposicional, la cual permite que el estudiante logre estructurar sus ideas y de esa manera, con la ayuda una serie de símbolos pueda expresarlas de tal manera que sean entendibles a una audiencia que maneja el lenguaje formal, aspecto éste que se constituye en un paso importante para apoyar el aprendizaje de cualquier tema especialmente aquellos derivados de una ciencia que maneja muchos aspectos abstractos como la matemática. En el actual capítulo, el estudiante se presenta con los fundamentos que le permitirán continuar adentrándose en esa conversión de situaciones aparentemente elementales que a menudo pasan desapercibidas pero que sin embargo la mayoría de las veces pueden ser consideradas como hitos alrededor de los cuales se desarrolla el conocimiento constituyéndose en las bases que nutren la ciencia.

Estamos seguros que la idea de conjunto no es muy difícil de procesar por cualquier persona, ya que provenimos de una familia, vamos a la escuela o universidad, permanecemos en un aula la mayor parte del día, nos subimos a autobús o a nuestro vehículo particular en compañía de otras personas, compramos en un supermercado, vemos una transmisión deportiva por televisión, entre otras muchas situaciones comunes que si nos detenemos un poco a analizarlas son conjuntos. De tal manera que, al igual que en el capítulo anterior, en el presente se parte de situaciones derivadas del entorno, las vivencias diarias de la persona para convertirlas en un lenguaje formal de tal manera que con la ayuda de sus símbolos se puedan conformar estructuras manejables matemáticamente.

El interés del hombre por modelar la realidad lo impulsa a tratar convertir a través de símbolos la expresión de la naturaleza, en tal sentido un pintor registra mediante trazos y combinaciones de colores realizados sobre un lienzo generalmente de pequeñas dimensiones la grandiosidad y belleza de un paisaje, un escritor con la ayuda de recursos literarios es capaz de impactar el sentimiento de las personas con sus narraciones, un matemático con la ayuda de la fórmula del volumen de un cilindro incide en la vida de un conjunto de habitantes de una urbanización al brindar las herramientas para calcular el tamaño necesario del depósito de agua de la comunidad, entre otros muchos elementos que inadvertidamente aporta la matemática en beneficio del ser humano.

Todas las situaciones planteadas anteriormente involucran un espacio, ocupan un determinado nivel de la realidad que el ser humano vive en su andar diario, ese espacio está ocupado por elementos circunscritos en una frontera, los cuales constituyen la idea de conjunto, aspectos que se enfocan en este capítulo desde un punto de vista elemental sin descuidar los fundamentos matemáticos que los rigen.

Nociones básicas de conjuntos

Si a usted se le formula la pregunta ¿qué es un conjunto? Lo más probable es que responda con palabras como agrupación, aglomeración, grupo, entre otras. Aspecto que es lógico puesto que es un término de uso frecuente entre nosotros y al que hacemos referencia sin considerar que tienen implicaciones de carácter matemático. En tal sentido, en esta primera parte se estudia la idea básica o intuitiva de un conjunto como punto de partida para adentrarnos en el mundo de las operaciones de unión, intersección, complemento y diferencia.

Por supuesto que los fundamentos de lógica proposicional tienen amplia cabida en este tema, al punto de constituyen el fundamento para avanzar sobre bases firmes en el manejo de los símbolos propios que conducen a una manera de enfocar la realidad mediante el uso del lenguaje matemático.

Definición de conjunto

Un conjunto es una agrupación de elementos que tienen por lo menos una característica en común.

Son ejemplos de conjuntos:

a. Los estudiantes de la licenciatura en educación mención castellano y literatura de la Unellez Apure.
b. Los municipios del estado Apure.
c. Las letras del alfabeto castellano.
d. Los árboles de mango existentes en una unidad de producción
e. Las naranjas producidas por un árbol de naranjas durante una cosecha.
f. Las piezas que conforma un vehículo.
g. Los actores de una película.
h. Los músicos de la orquesta sinfónica del estado Apure.

Notación de conjuntos

Un conjunto se identifica con cualquiera de las letras del alfabeto escritas en mayúscula. La letra U está reservada para el conjunto universal.

El conjunto universal es aquel que contiene a todos los elementos que son de interés para determinada actividad. Generalmente, estamos interesados en realizar investigaciones de cualquier tipo, en esos casos, la población objeto de estudio constituye el conjunto universal. Aparte de la letra U para designar al conjunto universal, también se suele representar con la letra griega Ω (omega).

Se manejan básicamente dos tipos de notaciones:

Notación mediante llaves.

A={burro, gato, caballo, perro }

B={Edificio, vehículo, persona, automóvil}

Notación mediante diagramas de Venn.

Es cuando se emplean figuras rectangulares, circulares o elípticas para visualizar de forma gráfica los conjuntos, tal como se observa en la Figura 1.

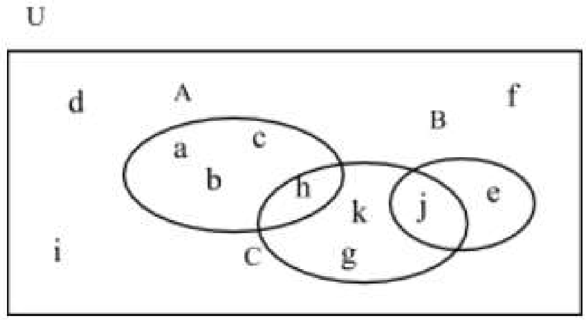


Figura 1: Los diagramas de Venn consisten en la delimitación de los elementos de un conjunto mediante figuras circulares y del conjunto universal mediante un rectángulo.

Conjuntos definidos por comprensión y por extensión

Cuando se expresan los elementos del conjunto mediante una frase que lo caracteriza, se dice que se está representando al conjunto por *comprensión*. Dicha frase puede estar representada mediante cualquier expresión derivada del lenguaje diario o conformada por símbolos matemáticos. Este tipo de definición es útil cuando el número de elementos del conjunto es grande.

Ejemplos:

a. A={x / x es alumno de la cohorte 2017-1 de la Unellez VPDR}
b. B={x / x es número natural menor que 10}
c. C={x ⁄x es libro de matemática de la biblioteca Lucila Palacios, Unellez -VPDR}
d. D={x / x es billete del cono monetario venezolano}
e. $E=\{x / x \in N \wedge 3 \leq x < 7\}$
f. $F=\{y / y \in N \wedge y < 4\}$
g. $G=\{z / z \in N \wedge 100 < z < 200\}$
h. $H=\{x / x \in N \wedge x > 50\}$

El conjunto A está conformado por los alumnos pertenecientes a la cohorte 2017-1 del vicerrectorado de planificación y desarrollo regional (VPDR) de la Universidad Ezequiel Zamora.

El conjunto B está conformado por todos los números naturales menores que 10, por ejemplo el número 5 pertenece a ese conjunto.

Si usted asiste a la biblioteca del Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Universidad Ezequiel Zamora (VPDR) que lleva el nombre Lucila Palacios y revisa un libro de matemática, dicho libro pertenece al conjunto C.

Un billete de 500 bolívares pertenece al conjunto D, un billete de 100 mil bolívares no pertenece a dicho conjunto puesto que el cono monetario actual cubre hasta 20 mil bolívares.

Los ejemplos E a H representan a conjuntos que están expresados por comprensión pero que también utilizan símbolos matemáticos. Se especifican a continuación dichos símbolos:

$/$	Se lee “tal que”
$\in$	Se lee “pertenece a” o también “es elemento de”
$\wedge$	Se lee “y”
$<$	Se lee “menor que”
$\leq$	Se lee “menor o igual que”
$>$	Se lee “mayor que”
N	Es el conjunto de los números naturales

El conjunto E se lee así: E es el conjunto conformado por todas las equis tal que equis pertenece al conjunto de los números naturales y equis es mayor o igual que 3 y menor que 7. También puede ser leído así: E es el conjunto conformado por todas las equis tal que equis pertenece al conjunto de los números naturales y equis está entre 3 y 7, incluido el 3 no incluido el 7.

El conjunto F se lee así: F es el conjunto formado por todas la ye, tal que ye pertenece al conjunto de los números naturales y ye es menor que cuatro.

El conjunto G se se lee así: G es el conjunto formado por toda zeta, tal que zeta pertenece al conjunto de los números naturales y zeta es mayor que 100 y menor que 200. También tiene la opción de leerlo así: G es el conjunto formado por toda zeta, tal que zeta pertenece al conjunto de los números naturales y zeta está entre 100 y 200 sin incluir ni al 100 ni al 200.

El conjunto H se lee así: H es conjunto formado por todas las equis, tal que equis pertenece al conjunto de los números naturales y equis es mayor que 50. Este caso representa a un conjunto de elementos infinitos, ya que existen infinitos números naturales mayores que 50. Los otros conjuntos ejemplificados, representan a conjuntos de elementos finitos.

Cuando se expresan los elementos, señalando a cada uno, se dice que se está representando por *extensión*. Generalmente los elementos definidos por extensión se colocan entre llaves. Esta manera de representar a los elementos del conjunto es útil cuando se trata de un número pequeño de éstos.

Son ejemplos de conjuntos definidos por extensión:

a. $A = \{1\ 2, 3, 4, 5\}$
b. $B = \{a, e, i, o, u\}$
c. $C = \{burro, caballo, perro, gato\}$
d. $D = \{+, \times, -, \div\}$
e. $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,\}$

Ejemplo

Expresar por extensión al conjunto

$$A = \{x/x\ es\ municipio\ del\ estado\ Apure\}$$

Respuesta

Se trata de especificar los municipios que conforman la división político territorial del estado Apure.

$$A = \{San\ Fernando, Biruaca, Pedro\ Camejo, Achaguas, Muñoz, Rómulo\ Gallegos, Páez\}$$

Se puede optar por emitir la respuesta en notación mediante diagrama de Venn, en ese caso el resultado es el mostrado en la Figura 2:

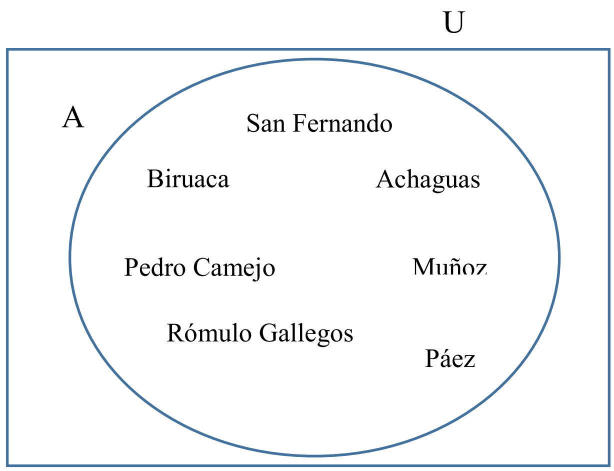


Figura 2: Representación mediante diagrama de Venn de de los municipios del estado Apure.

Ejemplo

Expresar por comprensión al conjunto

$$B = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$$

Respuesta

$$B = \{x/x \in N \wedge 10 \leq x < 20\}$$

Ejemplo

Leer en lenguaje natural al siguiente conjunto y expresarlo por extensión

$$C = \{x/x \in N \wedge 1 < x < 5\}$$

Respuesta

C es el conjunto conformado por todas las equis, tal que equis pertenece al conjunto de los números naturales y equis es mayor que 1 y menor que 5.

$$C = \{2,3,4\}$$

Ejemplo

Escribir por comprensión y por extensión al conjunto:

D es conjunto conformado por todas las equis tal que equis es una letra de la palabra APURE.

Respuesta

Por comprensión: $D = \{x/x \text{ } es \text{ } letra \text{ } de \text{ } la \text{ } palabra \text{ } apure\}$

Por extensión: $D = \{a, p, u, r, e\}$

Ejemplo

Dados los conjuntos

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A = \{1,3,5,7,9\}$

$B = \{2,4,6\}$

$C = \{11\}$

Se pide representarlos mediante un diagrama de Venn.

Respuesta

Los conjuntos A, B y C no tienen elementos comunes, la representación en diagrama de Venn es la indicada en la Figura 3.

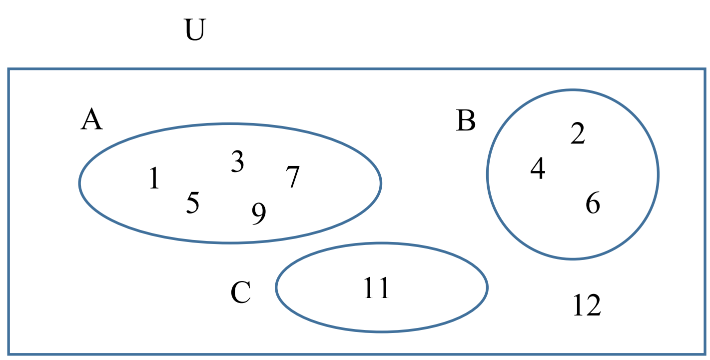


Figura 3: Representación de los conjuntos A, B, C y del conjunto universal mediante diagrama de Venn.

La definición de los conjuntos implica la conversión del lenguaje ordinario al lenguaje formal, en tal sentido se requiere el uso de símbolos. La mayoría de esos símbolos son conocidos y se derivan de la lógica proposicional o de la aritmética, tal es el caso de los denominados cuantificadores, los cuales se utilizan para indicar cuántos elementos de un conjunto determinado cumplen cierta propiedad.

Cuantificador universal y existencial

Las proposiciones simples y las proposiciones compuestas pueden asumir solamente un valor verdadero o un valor falso. Otras funciones del lenguaje son los enunciados abiertos, en los cuales también se informa pero dicha información no puede determinarse como verdadera o falsa en un principio.

Por ejemplo:

a. Los estudiantes de nuevo de ingreso de la carrera planificación tienen más de 18 años de edad.
b. Este objeto es un libro
c. El día está totalmente despejado
d. $5x + 2 > 20$

Si se revisan dichos enunciados, todos pueden asumir valores verdaderos o falsos, pero no se puede concluir eso de manera convincente hasta tanto haya mayor información, por ejemplo el caso a: Si María es estudiante de nuevo ingreso de la carrera planificación y tiene 17 años hará que el enunciado sea falso, en cambio si Pedro es estudiante de nuevo ingreso de planificación y tiene 19 años, el enunciado es verdadero.

En el caso b, si la persona que hace el enunciado señala por ejemplo a una casa, evidentemente la proposición es falsa, sin embargo puede estar realmente indicando que el objeto es un libro.

En el caso c, si el día está nublado entonces la proposición es falsa.

En el caso d, si x es igual a 2 la proposición es falsa, pero si x es igual a 4 la proposición es verdadera.

En cualquiera de los ejemplos dados hay una característica que está sujeta a cambio, a variación.

Caso a: Edad de los estudiantes de nuevo de la carrera planificación.

Caso b: Tipo de objeto.

Caso c: Presencia de nubes en el cielo.

Caso d: Valor de x.

Esta característica sujeta a cambio se denomina *variable* y resulta muy importante ubicarla de manera precisa ya que define el valor verdadero o falso de este tipo de enunciados. La identificación de una variable es una labor que se le debe dedicar atención puesto que constituye uno de los pilares de la ciencia.

Generalmente se utilizan las últimas letras del alfabeto para representar a las variables.

Enunciados como el identificado en el caso d, se escriben de la siguiente manera: Una letra que identifique la proposición seguida de un paréntesis y dentro de éste a la variable, luego la estructura del enunciado.

$$p(x): 4x - 2 > 10$$
$$q(x): x^2 \geq 9$$
$$r(x, y): x + 2y < 5$$

Dichos enunciados son verdaderos o falsos dependiendo del valor de x o de y que están actuando como variables.

A estas variables, también se les conocen con el nombre de variables proposicionales. Los enunciados que las contienen se conocen como proposiciones abiertas.

Los cuantificadores tienen su aplicación en los enunciados abiertos de los cuales hemos estado hablando.

El cuantificador universal. Se representa por el símbolo ∀ y se lee "Para todo", "Para cualquier". Se utiliza para indicar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una condición determinada.
Por ejemplo, sea la proposición:

p: x es un número par

Dicha proposición puede ser cierta o falsa dependiendo del valor que tenga x. Escribiremos de la siguiente manera a dicha proposición.

$p(x)$: x es un número par

Como x es la variable proposicional, entonces la proposición puede ser expresada de muchas maneras diferentes, solamente cambiando el valor de x.

$p(3)$: 3 es un número par
$p(6)$: 6 es un número par
$p(a)$: *a* es un número par
$p(n+1)$: *n*+1 es un número par

Como se observa en las proposiciones anteriores, algunas serán falsas y otras verdaderas.

Cuando se quiere expresar que una proposición como la anterior sea verdadera o falsa para todos los valores posibles de x se escribe:

$$\forall x p(x)$$

Que se lee, para todo x, p de x.

Cuando se desea expresar que una expresión como la que se está analizando es verdadera o falsa para por lo menos un valor de x se escribe:

$$\exists x P(x)$$

Que se lee, existe al menos un x tal que P de x. O también: Para algún x, P de x.

El cuantificador existencial. Se representa por el símbolo ∃ y se lee "Existe al menos un… ", "Existe por lo menos un…". Por lo tanto se utiliza para indicar que por lo menos un elemento del conjunto cumple con una condición determinada.

Ejemplo

Sea el conjunto $A = \{4,8,10,12\}$ y las proposiciones abiertas

$$p(x) = x\ es\ un\ número\ par$$
$$p(y) = 2y < 10$$

Tomando en cuenta las proposiciones y el conjunto A formular las proposiciones: (a) para toda equis perteneciente al conjunto A, equis es un número par. (b) para toda ye perteneciente al conjunto A, dos ye es menor que diez. (c) Existe al menos una ye perteneciente al conjunto A tal que dos ye es menor que 10. (d) Existe al menos una x perteneciente al conjunto A tal que x es un número par.

Respuesta

a. $\forall x \in A: p(x)$
Se trata de una proposición que es verdadera.
b. $\forall y \in A: p(y)$
Es una proposición que es falsa ya que es verdadera solamente cuando y es igual a 4 (al efectuar $2(4)$ se obtiene 8). Esta proposición no se cumple para y=8 ni mucho menos para y=10 ni y=12.
c. $\exists y \in A: p(y)$
Esta proposición es verdadera ya que $2(4) < 10$
d. $\exists \in A: p(x)$
Es una proposición verdadera

Ejemplo

Sea el conjunto

$$C = \{Perro, gato, gallina\}$$

Y las proposiciones abiertas:

$$q(x): x\ es\ una\ persona$$

$$r(y): y\ es\ un\ animal$$

a. Formular dos proposiciones que contengan al cuantificador universal y una de las proposiciones abiertas.
b. Formular dos proposiciones que contengan al cuantificador existencial y una de las proposiciones abiertas.

Respuesta

a.

$$\forall x \in C: \; q(x)$$

Se lee: Para todo x perteneciente al conjunto C, x es una persona.
La proposición es falsa.

$$\forall y \in C: r(y)$$

Se lee: Para todo y perteneciente al conjunto C, y es un animal.
La proposición es verdadera.

b.

$$\exists x \in C: q(x)$$

Se lee: Existe al menos una equis perteneciente al conjunto C, tal que equis es una personal.
La proposición es falsa.

$$\exists y \in C : r(y)$$

Se lee: Existe al menos una ye perteneciente al conjunto C, tal que y es un animal.

La proposición es verdadera.

Ejemplo

Dado el conjunto A={10, 12,15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25}, se pide establecer 5 proposiciones verdaderas utilizando el cuantificador universal o el cuantificador existencial.

Respuesta

Se emiten las siguientes proposiciones, las cuales no las únicas que surgen del conjunto A. El estudiante puede generar muchas más, solo basta poner a prueba la creatividad y el conocimiento matemático.

1. $\exists x \in A / x < 12$
2. $\forall y \in A : y \in N \wedge y < 26$
3. $\exists z \in A / 3z - 15 = 15$
4. $\forall x \in A : 10 \leq x \leq 25$
5. $\exists y \in A : (y/3) \in N$

Ejercicios

1. Definir por extensión a cada conjunto
   a. $A = \{x/x \text{ es día de la semana}\}$
   b. $B = \{x/x \text{ es un número natural menor que } 5\}$
   c. $C = \{x/x \in N \wedge 15 \leq x \leq 22\}$
   d. $D = \{y/y \in N \wedge 1 < y < 4\}$
   e. $E = \{z/z = x^2 \wedge x = \{2,4,6\}\}$
2. Leer en lenguaje natural cada conjunto y expresarlo por extensión
   a. $A = \{x \in N/x < 8\}$
   b. $B = \{y/y \in N \wedge 2 \leq y \leq 7\}$
   c. $C = \left\{z/z = \sqrt{x} \wedge x = 9\right\}$
   d. $D = \{x/x = z^2 \wedge z \in N \wedge 1 \leq z \leq 5\}$
   e. $E = \{x/x = 2y + 1 \wedge y \in N \wedge 4 \leq y \leq 9\}$
3. Dados los conjuntos
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$
$$A = \{a, g, h, j\}$$
$$B = \{b, d, e, k\}$$
   Se pide representarlos mediante un diagrama de Venn.
4. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, formular cinco proposiciones verdaderas usando el cuantificador universal o el cuantificador existencial.

Relaciones entre conjuntos

Cuando se tiene más de un conjunto, se pueden establecer comparaciones tanto entre los elementos que conforman cada conjunto con respecto a la pertenencia o no a un conjunto determinado como entre conjuntos con el fin de indicar uno de ellos está incluido o no en otro.

Relación de pertenencia

La relación de pertenencia a un conjunto**,** se representa con el símbolo$\in$. La no pertenencia a un conjunto se representa con el símbolo $\notin$.

En el caso de los elementos del diagrama de Venn de la Figura 2, se puede afirmar, entre otras opciones

$a \in A$ (el elemento *a* pertenece al conjunto A)
$h \in A$ (el elemento *h* pertenece al conjunto A)
$h \in B$ (el elemento *h* pertenece al conjunto B)
$k \notin B$ (el elemento *k* no pertenece al conjunto B)
$i \in U$ (el elemento *i* pertenece al conjunto universal)

Relación de contenencia

La relación de contenencia, cuyo símbolo es $\subset$, usada para indicar que el conjunto completo está contenido dentro de otro conjunto. La no contenencia se representa mediante el símbolo$\not\subset$.

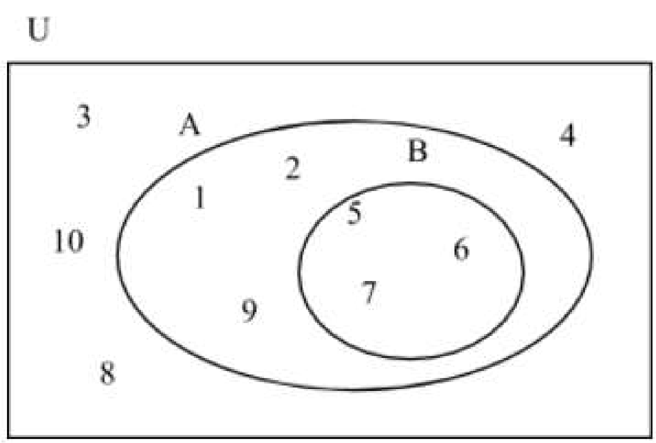


Figura 4 Conjunto universal conformado a su vez por otros conjuntos los cuales contienen elemento. Las relaciones de pertenencia se dan entre elementos de los conjuntos, las de contenencia entre conjuntos.

En los conjuntos representados en la Figura 4, se pueden establecer las relaciones entre conjuntos:

$B \subset A$ (El conjunto B es un subconjunto del conjunto A)
$A \subset U$ (El conjunto A es un subconjunto del conjunto universal)
$B \subset U$ (El conjunto B es un subconjunto del conjunto universal)
$A \not\subset B$ (El conjunto A no es un subconjunto del conjunto B)

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{4,6,8,10,12\}$$

Indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes

a. $1 \in A$
b. $2 \in B$
c. $4 \in A \wedge 4 \in B$
d. $10 \in B$
e. $11 \notin A$
f. $3 \notin B$
g. $6 \notin B$
h. $21 \in B$

Respuesta

Se responde de acuerdo con lo explicado en el capítulo 1, sobre el valor lógico o valor de verdad de una proposición y conforme a la pertenencia o no del elemento o elementos al conjunto indicado.

a. $VL(1 \in A) = V$
b. $VL(2 \in B) = F$
c. $VL(4 \in A \wedge 4 \in B) = V$
d. $VL(10 \in B) = V$
e. $VL(11 \in A) = F$
f. $VL(3 \in B) = F$
g. $VL(6 \notin B) = V$
h. $VL(21 \in B) = F$

Ejemplo

Dados los conjuntos representados mediante diagramas de Venn (Figura 5)

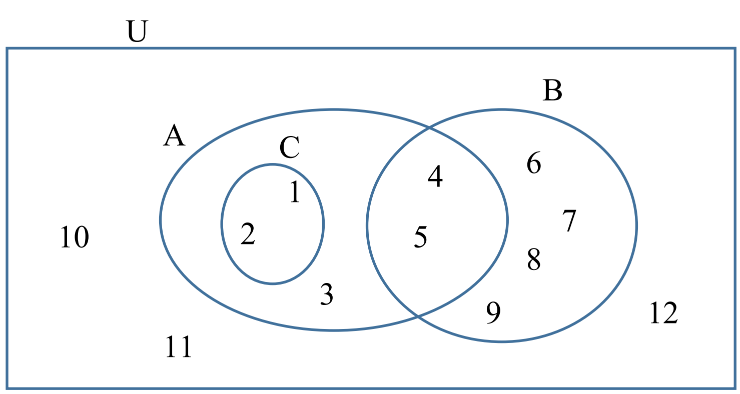


Figura 5: Representación mediante diagrama de Venn del conjunto universal y de los conjuntos A, B y C.

Indicar el valor de verdad de las proposiciones:

a. $1 \in A$
b. $1 \in C$
c. $C \subset A$
d. $4 \in A$
e. $B = \{x/x \in N \wedge 4 \leq x \leq 9\}$
f. $B \subset U$
g. $3 \notin A$
h. $11 \in B$
i. $5 \in C$
j. $3 \in B$

Respuesta

a. $VL(1 \in A) = V$
b. $VL(1 \in C) = V$
c. $VL(C \subset A) = V$
d. $VL(4 \in A) = V$
e. $VL(B = \{x/x \in N \wedge 4 \leq x \leq 9\}) = V$
f. $VL(B \subset U) = V$
g. $VL(3 \notin A) = F$
h. $VL(11 \in B) = F$
i. $VL(5 \in C) = F$
j. $VL(3 \in B) = F$

Ejercicios

---

1. Representar mediante un diagrama de Venn los conjuntos

$$U = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$$
$$A = \{10,11,12,15,17\}$$
$$B = \{12,13,14,15\}$$
$$C = \{12,15,18\}$$

Responder:

a. ¿Existe algún elemento que pertenece al conjunto A, al conjunto B y al conjunto C? ¿Cuál o cuáles?
b. ¿Existe por lo menos un elemento que no pertenece al conjunto A, al conjunto B ni al conjunto C? ¿cuál o cuáles?
c. ¿El conjunto A está incluido en el conjunto U?
d. ¿Cómo se denomina al conjunto U?

2. Dado el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, conforme tres conjuntos de tres elementos a partir de los elementos que integran al conjunto A.
3. Dados los conjuntos $A = \{10, 20, 30, 40, 50,60\}$ $B = \{50,52,54,56,58,60\}$

Colocar el signo que corresponda para que la proposición sea verdadera

a. $10\_\_\_A$
b. $B\_\_\_\_A$
c. $20\_\_\_B$
d. $30\_\_\_A$
e. $52\_\_\_B$

4. Expresa en símbolos las proposiciones siguientes
   a. El conjunto universal está conformado por todos los números naturales mayores que 1 pero menores que 10.
   b. El conjunto A está incluido en el conjunto B.
   c. El elemento 3 no pertenece al conjunto A.
   d. El elemento 5 pertenece al conjunto B
   e. El conjunto C es subconjunto del conjunto universal

Operaciones entre conjuntos

Cuando se tienen dos o más conjuntos y se agrupan en un solo conjunto a sus elementos se tiene la operación de unión, cuando se conforma un conjunto solamente con los elementos comunes se está en presencia de la intersección. De igual manera, cuando entre dos conjuntos se consideran solamente los elementos que son exclusivos de uno de ellos se tiene la operación de diferencia y finalmente el complemento de un conjunto no es más que los elementos que le hacen falta para ser el conjunto universal.

Todas esas operaciones se consideran en esta sección y son de mucha importancia puesto que constituyen la base de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.

Unión

Si se tienen dos conjuntos y se agrupan en un solo conjunto estamos en presencia de la unión. Imagínese que tiene una bolsa de caramelos en su mano izquierda y una bolsa de chupetas en su mano derecha, si usted vierte el contenido de ambas bolsas en una tercera bolsa que se encuentra vacía, entonces esa tercera bolsa contendrá caramelos y chupetas.
Usando el lenguaje formal, la unión se define así:

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

El símbolo para la unión es $\cup$

Mediante diagramas de Venn, la unión de dos conjuntos A y B se representa tal como se muestra en la Figura 6.

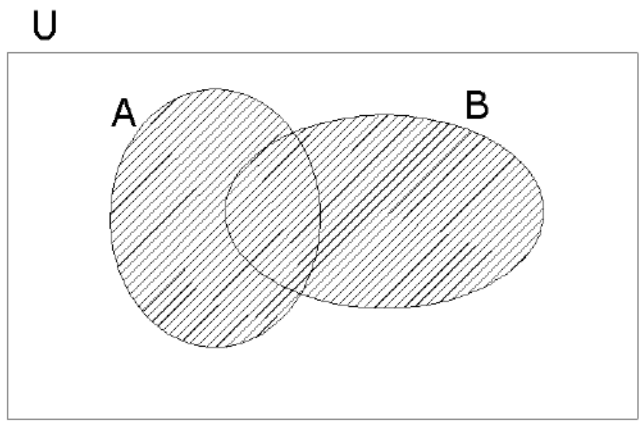


Figura 6: La zona sombreada corresponde a la ubicación de los elementos que conforman la unión de los conjuntos A y B.

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{6,7,8\}$ efectuar $A \cup B$.

Respuesta

La unión del conjunto A con el conjunto B es otro conjunto

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Dicho conjunto se puede denominar con cualquier letra, por ejemplo C.

$$C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{2,4,6,8,10\}$ $B = \{6,8,10,12,14\}$, efectuar $A \cup B$.

Respuesta

Cuando hay elementos comunes en los conjuntos que se unen, el conjunto resultante contiene solamente uno de esos elementos.

$$A \cup B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{x/x \in N \wedge 3 \leq x < 8\}$ $B = \{x/x \in N \wedge 5 < x < 10\}$
Efectuar A∪ B

Respuesta

Debido a que tanto el conjunto A como el conjunto B se encuentran definidos por comprensión, se deben especificar los elementos que conforman a cada conjunto.

$$A = \{3,4,5,6,7\}$$
$$B = \{6,7,8,9\}$$

Ahora se efectúa la operación solicitada

$$A \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos $H = \{a, m, n, p\}$ $M = \{c, d, f, h\}$ $N = \{f, g, h, i, j\}$
Se pide:

a. $H \cup M$
b. $M \cup N$
c. $H \cup N$

Respuestas

a. $H \cup M$={a, c, d, f, h, m, n, p}
b. $M \cup N$={c, d, f, g, h, i, j}
c. $H \cup N$={a, f, g, h, i, j, m, n, p}

Ejemplo

Dados los conjuntos representados mediante diagrama de Venn en la Figura 7.

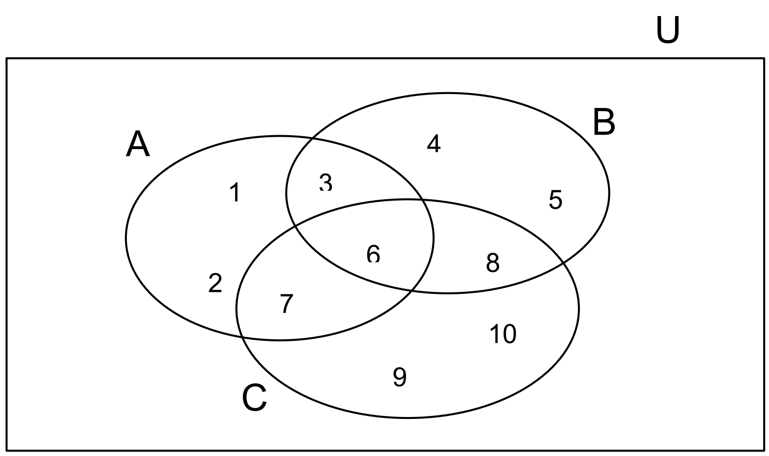


Figura 7: Representación en diagrama de Venn de los conjuntos A, B, C.

Se pide expresar mediante llaves, los elementos que conforman cada una de las operaciones siguientes:

a. $A \cup B$
b. $B \cup C$
c. $A \cup C$

Respuestas

a. $A \cup B$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
b. $B \cup C$={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
c. $A \cup C$={1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10}

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$D = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$E = \{10,12,14,16,18,20,22\}$$

Efectuar $D \cup E$

Respuesta

Se utilizará el software libre Maxima en su versión para Windows llamado wxMaxima, para realizar la operación solicitada.

Cargar wxMaxima, presionar la tecla Enter, para que el programa admita la entrada de comandos.

Los conjuntos en Maxima se definen mediante la función set( ) o escribiéndolos mediante llaves.

Escribir: D:{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}

Presionar conjuntamente las teclas Shift+Enter. El programa genera la salida bajo la forma (%o1).

Presionar la tecla Enter.

Escribir: E:set(10,12,14,16,18,20,22)

Presionar conjuntamente las teclas Shift+Enter. El programa genera la salida bajo la forma (%o2). Se ha usado en este caso la otra opción para introducir un conjunto en Maxima.

Presionar la Enter.

Escribir: union(D,E)

Presionar conjuntamente las teclas Shift+Enter. El programa genera la salída bajo la forma (%o3). Esta salida es la respuesta a la operación de unión entre los conjuntos.

$$D \cup E = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,20,22\}$$

Los comandos introducidos y las salidas generadas por el programa se muestran en la Figura 8.

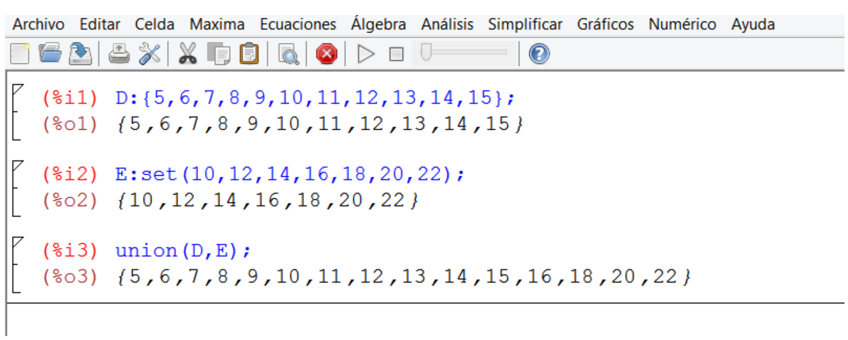


Figura 8: Manipulación de conjuntos en wxMaxima y operación de unión.

Intersección

Unas veces interesa conocer si dos conjuntos contienen a elementos que son comunes. Por ejemplo, la sección A de una escuela tiene niños de 11 y 12 años, la sección B tiene niños de 12 y 13 años, por lo tanto, los niños de 12 años son comunes a ambas secciones, es decir bien pudieron haber quedado en la sección A o en la sección B.

En el lenguaje formal la intersección se representa así:

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

El símbolo para la intersección es $\cap$.

Mediante diagramas de Venn-Euler, la intersección se representa tal como se muestra en la Figura 9.

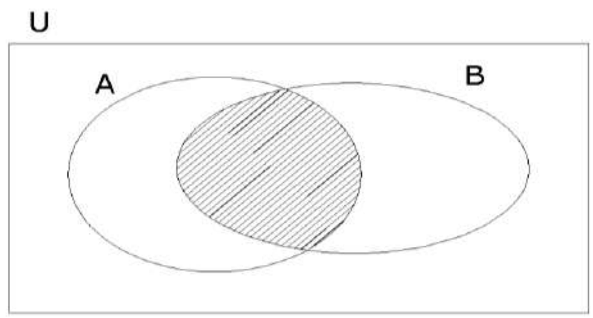


Figura 9: Representación mediante diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos, correspondiente a la zona sombreada.

Si los conjuntos no tienen elementos en común, la zona de intersección es un conjunto vacío, el cual se representa así.

Conjunto vacío: $\emptyset$

O también así { }

Para el caso de dos conjuntos que no tienen elementos comunes, la representación mediante diagramas de Venn-Euler es la indicada en la Figura 10.

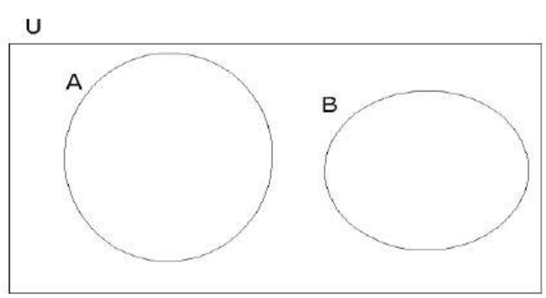


Figura 10: En caso de la no existencia de elementos comunes entre dos conjuntos la intersección es el conjunto vacío.

Ejemplo

Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, d, f, g\}$. Efectuar la intersección de ambos conjuntos.

Respuesta

El conjunto intersección está conformado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos.

$$A \cap B = \{b, d\}$$

El conjunto anterior, se puede representar mediante cualquier letra, por ejemplo F.

$$F = \{b, d\}$$

Si se desea representar mediante diagramas de Venn-Euler a esa operación entre los conjuntos A y B, se puede hacer tal como se muestra en la Figura 11.

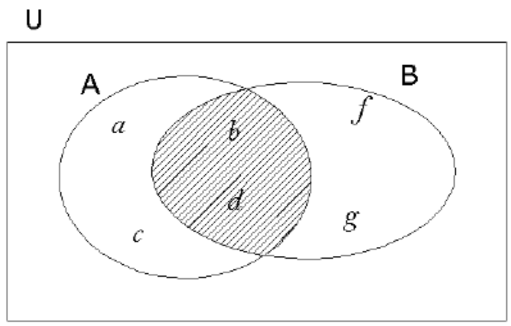


Figura 11. Intersección entre los conjuntos A y B mediante el uso de diagramas de Venn.

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$A = \{1,3,5,7,9,11\}$$
$$B = \{2,4,6,8\}$$

Se pide $A \cap B$

Respuesta

Se trata de buscar elementos que sean comunes a los dos conjuntos. En este caso no existen elementos comunes, por lo tanto la respuesta es el conjunto vacío.

$$A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$B = \{4,5,6,7,8,9\}$$

Efectuar $A \cap B$

Respuesta

Con wxMaxima.
Una vez cargado el software, presionar la tecla Enter.

Escribir: A:set(1,2,3,4,5,6,7); B:set(4,5,6,7,8,9)

Presionar conjuntamente las teclas Shift+Enter. El programa genera las dos salidas (%o1) y (%o2).

Presionar la tecla Enter.

Introducir el comando intersection(A,B).

Presionar Shift+Enter.

El Software genera la salida (%o3), intersección de los conjuntos A y B.

$$A \cap B = \{4,5,6,7\}$$

En la Figura 12 se muestran las entradas y las salidas generadas por wxMaxima para la operación de intersección de los conjuntos A y B.

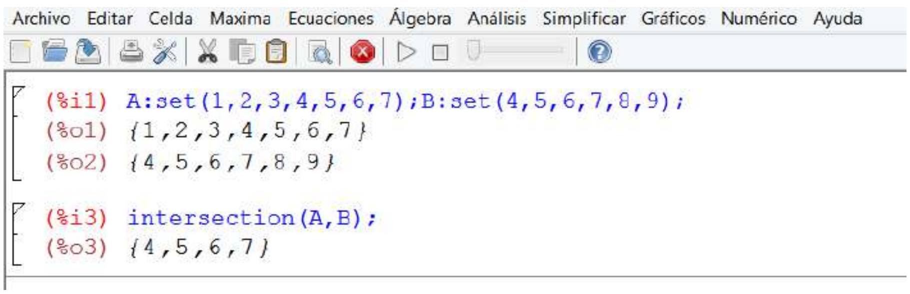


Figura 12: Entradas y salidas en wxMaxima para la intersección de dos conjuntos.

Diferencia

Interesa identificar en oportunidades a los elementos que pertenecen exclusivamente a determinado conjunto, es decir que no están contenidos en otro. En estos casos se aplica la diferencia de conjuntos.

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

El símbolo para la diferencia es –

La representación mediante diagramas de Venn – Euler para el caso $A - B$ se indica en la Figura 13.

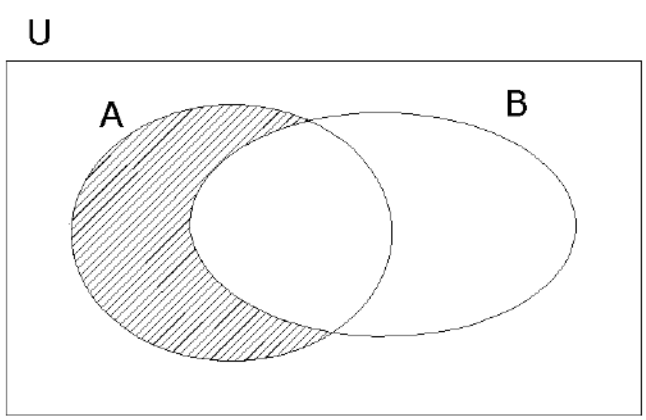


Figura 13: Diferencia A-B mediante diagrama de Venn.

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1,3,7,9,11\}$ $B = \{5,7,11,12\}$ se pide efectuar $A - B$.

Respuesta

La idea es comenzar por el primer elemento del primer conjunto y compararlo con cada elemento del otro conjunto, si hay uno igual, no se coloca en la diferencia. Se sigue el procedimiento con el segundo, tercer hasta el último elemento del primer conjunto. Al agotarse los elementos del primer conjunto, se tiene la respuesta de la diferencia.

$$A - B = \{1,3,9\}$$

Mediante diagrama de Venn, la respuesta *A-B* se corresponde con la indicada en la Figura 14.

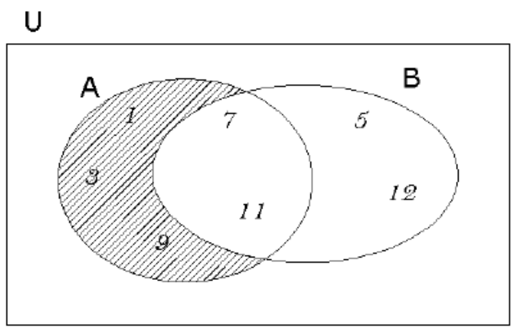


Figura 14: A-B mediante el uso de diagrama de Venn, la zona sombreada es la respuesta.

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Efectuar $B - A$

Respuesta

Se compara cada elemento del conjunto B con cada elemento del conjunto A, en el caso de elementos iguales no entran en el conjunto *A-B*. Por ejemplo, el primer elemento de B es a, se compara con el primer elemento del conjunto A y se observa que la *a* está presente en ese conjunto, por lo tanto no se escribe la *a* como parte del conjunto solución. El siguiente elemento de B es e, este elemento pertenece al conjunto A, por lo tanto no se escribe como parte del conjunto *A-B*. Al comparar el elemento i del conjunto B con los elementos del conjunto A se observa que no está presente en este conjunto, por lo tanto *i* forma parte del conjunto solución. Igual caso sucede con el elemento *o* y con el elemento *u*.

$$B - A = \{i, o, u\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$F = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$
$$G = \{b, f, g, i, j, k, l, m\}$$

Efectuar con wxMaxima $F - G$

Respuesta

Cargar wxMaxima
Presionar la tecla Enter
Escribir: F:{a,b,c,d,e,f,g,h,i};G:{b,f,g,i,j,k,l,m}
Presionar simultáneamente Shift+Enter
Presionar la tecla Enter
Escribir el comando setdifference(F,G)
Presionar Shift+Enter

El programa genera la salida 3 (%o3) que es la respuesta a *F*-*G*. Las entradas y las salidas se muestran en la Figura 15.

$$F - G = \{a, c, d, e, h\}$$

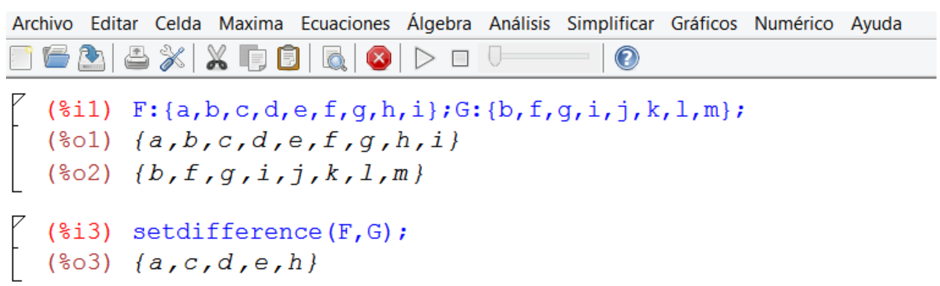


Figura 15: Entradas y salidas de wxMaxima para la diferencia entre dos conjuntos.

Complemento

Una sección, por ejemplo la A, forma parte de una escuela, la cual tiene muchos alumnos. El complemento de la sección o conjunto A está representado por todos los alumnos de la escuela que no son alumnos de la sección A, todos (alumnos de la sección A y alumnos que no son de la sección A) conforman a los alumnos de la escuela.

Para el complemento siempre hay que hacer referencia al conjunto universal.

$$A^c = \{\, x \;/\; x \in U \;\wedge\; x \notin A\}$$

La representación mediante diagramas de Venn – Euler del complemento de un conjunto es la mostrada en la Figura 16.

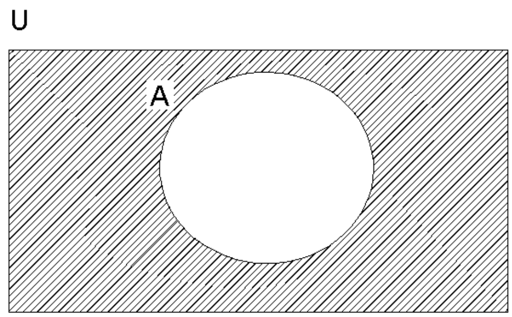


Figura 16: Representación del complemento del conjunto A mediante diagrama de Venn.

Ejemplo

Sea el conjunto universal $U = \{x \ / \ x \in N \ \wedge \ 4 \ \leq \ x < 12\}$ y los conjuntos

$$A = \{4,5,6\} \quad B = \{5,9,11\},$$

Se pide:

a. A^c
b. B^c

Respuesta

Primero se debe expresar el conjunto universal por extensión:

$$U = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

El complemento del conjunto A está conformado por el conjunto que contiene a todos los elementos que están presentes en el conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto A.

$$A^c = \{7,8,9,10,11\}$$

El complemento del conjunto B está conformado por el conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen al conjunto universal pero que no están incluidos en el conjunto B.

$$B^c = \{4,6,7,8,10\}$$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$$U = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$A = \{4,5,6,7\}$$
$$B = \{7,8,9\}$$
$$C = \{10,12\}$$

Calcular

a. A^c
b. B^C
c. C^C
d. $(A^c - B^c) \cap (A - B)^c$
e. $(A \cup B)^c - (A \cap C)^c$

Respuesta

a. $A^C = \{8,9,10,11,12,13,14\}$
b. $B^C = \{4,5,6,10,11,12,13,14\}$
c. $C^C = \{4,5,6,7,8,9,11,13,14\}$

d.

$$A^C - B^C = \{8,9\}$$
$$A - B = \{4,5,6\}$$
$$(A - B)^C = \{7,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$(A^c - B^c) \cap (A - B)^c = \{8,9\}$$

e.

$$(A \cup B) = \{4,5,6,7,8,9\}$$
$$(A \cup B)^C = \{10,11,12,13,14\}$$
$$A \cap C = \emptyset$$
$$(A \cap C)^C = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$(A \cup B)^C - (A \cap C)^c = \emptyset$$

Ejemplo

Dados los conjuntos representados en la Figura 17.

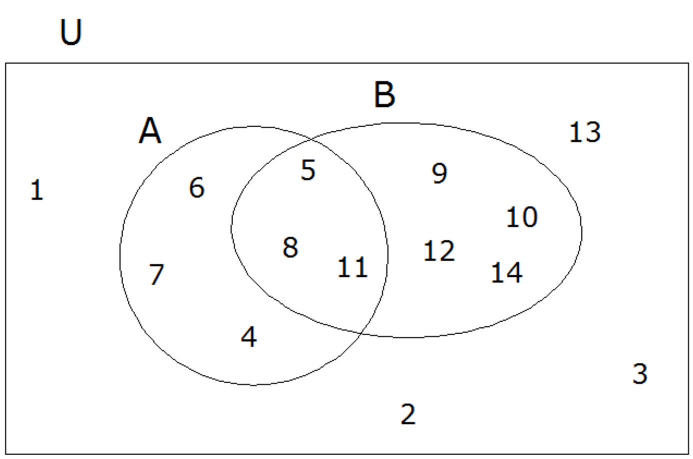


Figura 17: Conjuntos U, A y B.

Resolver e identificar mediante sombreado en el diagrama de Venn el resultado de las siguientes operaciones:

a. $(A - B)^c$
b. $(A \cup B)^C$
c. $(A \cap B)^C$
d. $A^C - B^c$

Respuesta

a.

$$(A - B)^C = \{1,2,3,5,8,9,10,11,12,13,14\}$$

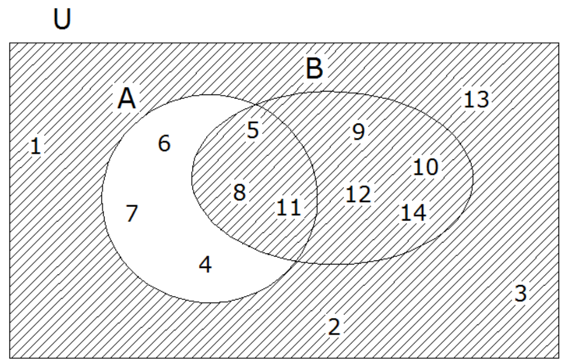


Figura 18: $(A - B)^C$ (la región sombreada es la respuesta)

b.

$$(A \cup B)^C = \{1,2,3,13\}$$

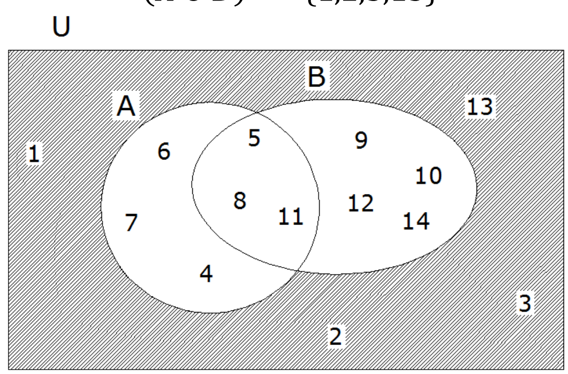


Figura 19: $(A \cup B)^C$ (La región sombreada es la respuesta)

c.

$$(A \cap B)^c = \{1,2,3,4,6,7,9,10,12,13,14\}$$

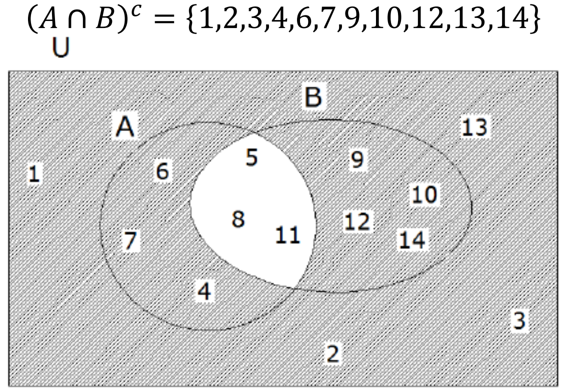


Figura 20: $(A \cap B)^C$ (La región sombreada es la respuesta)

d.

$$A^C - B^C = \{1,2,3,5,8,910,11,12,13,14\} - \{1,2,3,4,5,6,7,8,11,13\}$$
$$= \{9,10,12,14\}$$

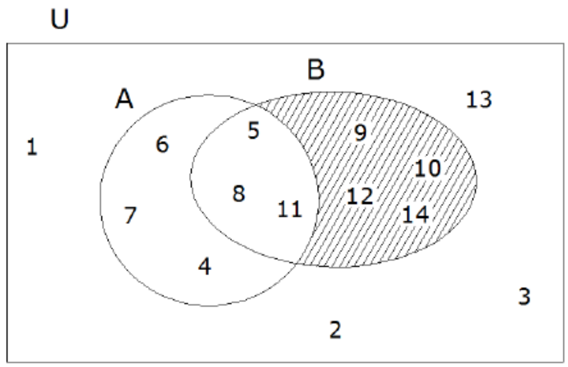


Figura 21: $A^C - B^C$

La hoja de cálculo para efectuar operaciones entre conjuntos

Se explica a continuación la forma de configurar la hoja de cálculo para poder realizar las operaciones de unión, intersección y diferencia entre dos conjuntos. El diseño de la hoja está apoyado en Microsoft Excel 2013, sin embargo el resultado final es completamente funcional en cualquier versión. Es de destacar el hecho que en este caso se hace uso de las denominadas macros, las cuales consisten en instrucciones realizadas con el apoyo del lenguaje de programación llamado Visual Basic, el cual está presente en la mayoría de los programas que conforman el paquete Office bajo la denominación Visual Basic Para Aplicaciones.

Una vez creadas las instrucciones correspondientes, el usuario final podrá introducir los elementos que conforman cada conjunto, los cuales pueden consistir en cualquier carácter alfanumérico. Al presionar el botón Calcular, el programa genera todas las operaciones ya indicadas, con los respectivos elementos dispuestos en orden ascendente. Para una nueva entrada se dispone de otro botón, el cual cumple la función de borrado de toda el área de cálculo.

En el anexo A, se indica la manera de editar las macros y de crear los botones encargados de generar respuestas y de disponer a las celdas de la hoja de cálculo para la realización de las operaciones entre conjuntos.

Una vez que usted abre la hoja de cálculo obtiene la pantalla mostrada en la Figura 22, donde se observa que la primera fila corresponde al encabezado, donde se detalla en la primera columna al conjunto A, en la segunda columna al conjunto B y en las columnas 3 a 5 las operaciones de unión, intersección y diferencia.

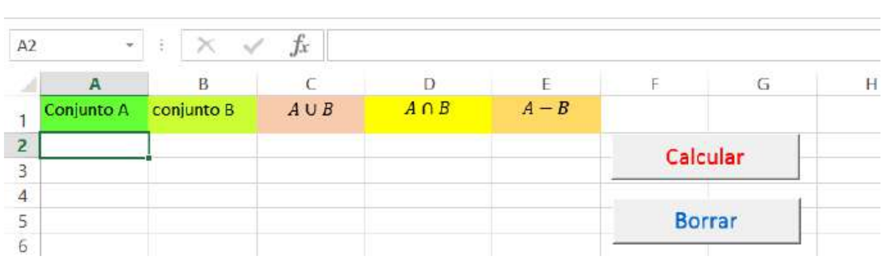


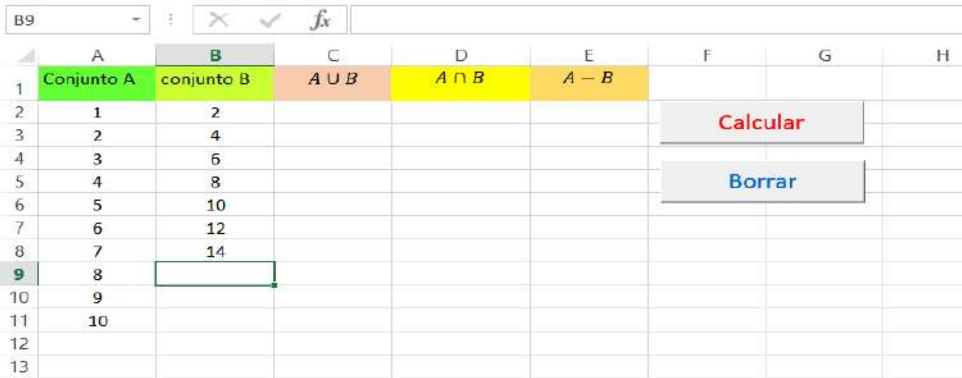
Figura 22: Ventana inicial de la hoja de cálculo para realizar operaciones entre conjuntos.

Supongamos que se tienen los conjuntos:

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

B={2,4,6,8,10,12,14}

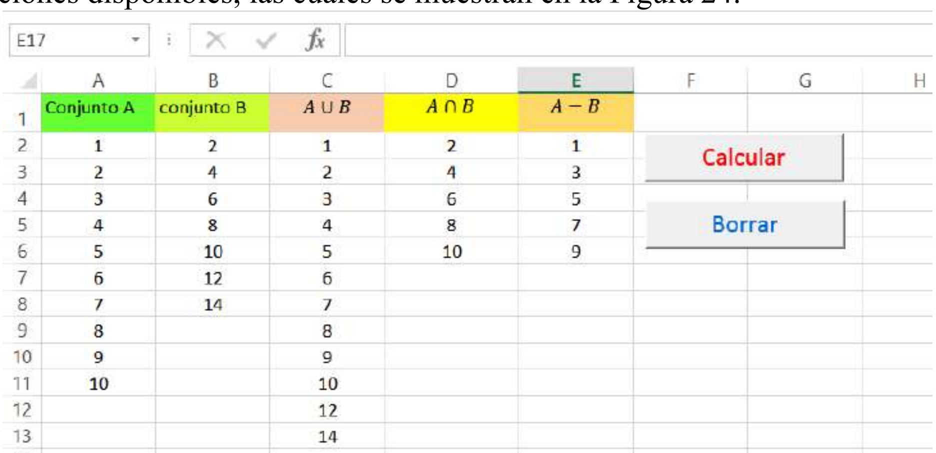
La introducción de los elementos del conjunto A se hace en la primera columna a partir de la celda A2. La introducción de los elementos del conjunto B se hace en la segunda columna a partir de la celda B2. La Figura 23 muestra a cada conjunto en la hoja de cálculo. Es de hacer notar que se consideran solamente los elementos, no las llaves, tampoco es necesario que los elementos estén ordenados puesto que el sistema hace ese trabajo.



	A	B	C	D	E
1	Conjunto A	conjunto B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
2	1	2			
3	2	4			
4	3	6			
5	4	8			
6	5	10			
7	6	12			
8	7	14			
9	8				
10	9				
11	10				

Figura 23; Cada conjunto conformado por sus respectivos elementos, rigurosamente ordenados de manera ascendente por el sistema.

Una vez conformados los conjuntos, se presiona el botón "Calcular" para obtener las tres operaciones disponibles, las cuales se muestran en la Figura 24.



	A	B	C	D	E
1	Conjunto A	conjunto B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
2	1	2	1	2	1
3	2	4	2	4	3
4	3	6	3	6	5
5	4	8	4	8	7
6	5	10	5	10	9
7	6	12	6		
8	7	14	7		
9	8		8		
10	9		9		
11	10		10		
12			12		
13			14		

Figura 24: Resultados de las operaciones entre los conjuntos A y B, con la ayuda de la hoja de cálculo.

A partir de la respuesta por la hoja de cálculo, los resultados de las operaciones entre conjuntos, formalmente representados son:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14\}$$
$$A \cap B = \{2,4,6,8,10\}$$
$$A - B = \{1,3,5,7,9\}$$

Si se desea trabajar con otros conjuntos diferentes, basta con presionar el botón "Borrar" para que la hoja de cálculo elimine todas las entradas y los resultados dejando las celdas limpias para las siguientes operaciones.

El sistema está configurado de tal forma que las celdas que admiten entrada de datos son las ubicadas en el rango A2:E100, por lo tanto se aceptan conjuntos de hasta 99 elementos cada uno. No es necesario que se ingresen los elementos en orden, ya que el sistema está diseñado para realizar un ordenamiento dinámico.

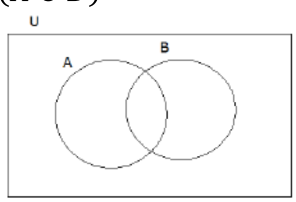
Ejercicios

1. Se tienen los conjuntos

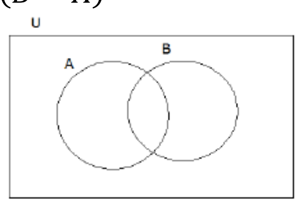
$$U = \{x/x \in N \wedge 3 \leq x \leq 16\}$$
$$A = \{5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{5,8,10\}$$
$$C = \{7,8,9,10,14\}$$

   Se pide:
   a. Representar los conjuntos en un diagrama de Venn
   b. $(A \cup B) \cup C$
   c. $A \cap (B \cap C)$
   d. $(A - B) \cup (B - C)$
   e. $(A - C)^C \cap (B - A)^C$

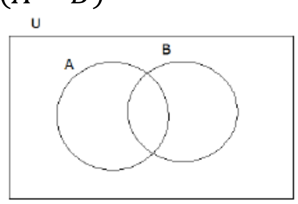
2. Identificar mediante el sombreado de la región correspondiente en el diagrama de Venn, las siguientes operaciones
   a. $(A \cup B)$



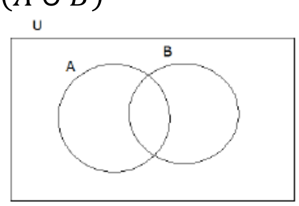
   b. $(B - A)$



   c. $(A - B)^c$



   d. $(A \cup B)^C$



3. A partir de la información del diagrama de Venn de la Figura 25.

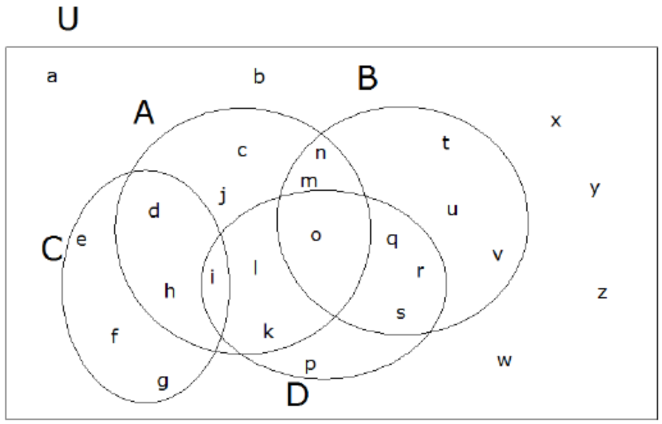


Figura 25: Diagrama de Venn donde se representa la conformación de los conjuntos A, B, C y D como parte del conjunto universal.

Identificar los elementos que conforman cada conjunto.

a. $C \cap D$
b. $(A \cup D) \cup B$
c. $C - (A \cup B)$
d. $(B \cup C)^C$
e. $(A \cap D)^C$

Cardinal de un conjunto

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee dicho conjunto. Si se trata del conjunto A, el cual contiene a 7 elementos, entonces el cardinal del conjunto A se escribe así:

$$n(A) = 7$$

Ejemplo

Sean los conjuntos $C = \{a, b, c, d, e\}$ $\quad D = \{d, e, f, g, h, i, j\}$
se pide

a. $n(C)$
b. $n(D)$
c.

Respuesta

El número de elementos que tiene el conjunto C son cinco letras, en consecuencia

$$n(C) = 5$$

El número de elementos que tiene el conjunto D son siete letras, por lo tanto

$$n(D) = 7$$

El cardinal del conjunto vacío es igual a cero

Cardinal de la unión de dos conjuntos

Cuando se trata de la unión de dos conjuntos, generalmente se da el caso que existen elementos comunes en ambos, por lo tanto luego de sumar los cardinales de cada conjunto, hay que restar el cardinal de la intersección para evitar el conteo doble de los elementos comunes.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ejemplo

Se tienen los conjuntos $F = \{a, e, i, o, u\}$ $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ se pide $n(F \cup G)$.

Respuesta

$$n(F) = 5$$
$$n(G) = 6$$
$$n(F \cap G) = 2$$
$$n(F \cup G) = n(F) + n(G) - n(F \cap G)$$
$$n(F \cup G) = 5 + 6 - 2 = 9$$
$$n(F \cup G) = 9$$

Surgen problemas derivados de la vida diaria, bastante interesantes que se resuelven utilizando el concepto de cardinal. Para ello es conveniente siempre tener en cuenta la información de la Figura 26.

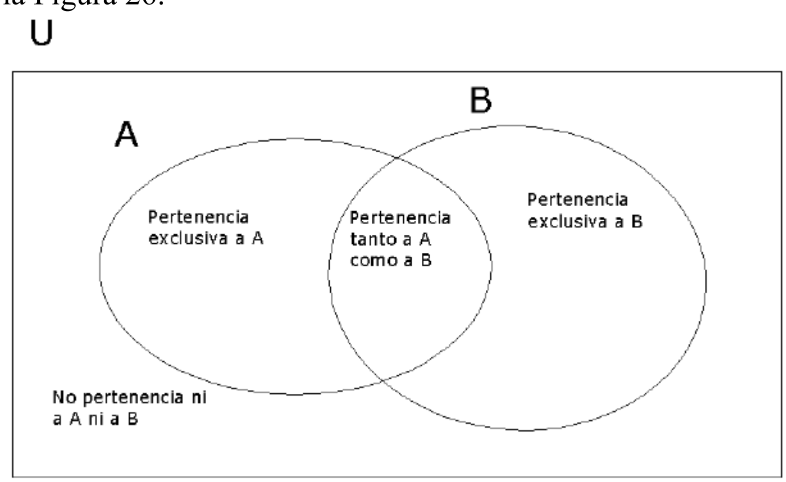


Figura 26: Pertenencia de los elementos de un conjunto

El cardinal del conjunto conformado por los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B es:

$$n(A \cap B)$$

El cardinal del conjunto conformado por los elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto A es:

$$n(A\ exclusivamente) = n(A) - n(A \cap B)$$

El cardinal del conjunto conformado por los elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto B es:

$$n(B\ exclusivamente) = n(B) - n(A \cap B)$$

El cardinal del conjunto conformado por los elementos que no pertenecen ni al conjunto A ni al conjunto B es:

$$n[(A \cup B)^C]$$

El cardinal del conjunto universal es:

$$n(U) = n[(A \cup B)^C] + n(A \cup B)$$

Ejemplo

Un equipo de trabajo está conformado por Ana, Antonio, Juana, María, Pedro, Rafael; de ellos Ana, Juana y Pedro viven en San Fernando; Juana y Rafael viven en Guayabal. Se pregunta:

a. ¿Cuántos miembros del equipo viven exclusivamente en San Fernando?
b. ¿Cuántos miembros del equipo viven exclusivamente en Guayabal?
c. ¿Cuántos miembros del equipo no viven ni en San Fernando ni en Guayabal?
d. ¿Cuántos miembros del equipo viven tanto en San Fernando como en Guayabal?
e. ¿Quiénes viven exclusivamente en San Fernando?
f. ¿Quiénes viven exclusivamente en Guayabal?
g. ¿Quiénes no viven ni en San Fernando ni en Guayabal?
h. ¿Quiénes viven tanto en San Fernando como en Guayabal?

Respuesta

Lo primero que se debe hacer ante este tipo de interrogantes es definir a cada uno de los conjuntos involucrados. Ante las interrogantes que comienzan por cuántos se aplica el concepto de cardinal de un conjunto; ante interrogantes que comienzan por quiénes hay que resolverlas con operaciones entre conjuntos. Sin embargo, existe la opción de hacer la representación gráfica mediante un diagrama de Venn y extraer las respuestas a partir de allí.

$U = \{x/x\ \ es\ miembro\ del\ equipo\ de\ trabajo\}$
$A = \{\ x/x\ vive\ en\ San\ Fernando\}$
$B = \{x/x\ vive\ en\ Guayabal\}$

Luego hay que ubicar a cada elemento, conforme con la información suministrada, en su respectivo conjunto

$U = \{Ana, Antonio, Juana, María, Pedro, Rafael\}$
$A = \{Ana, Juana, Pedro\}$
$B = \{Juana, Rafael\}$

En tercer lugar, se busca, bien sea al cardinal de la intersección o a los elementos que conforman el conjunto intersección, en este caso se aplica esta última opción ya que se está describiendo a cada elemento.

$A \cap B = \{Juana\}$

En cuarto lugar, se hace el diagrama de Venn-Euler (Figura 27).

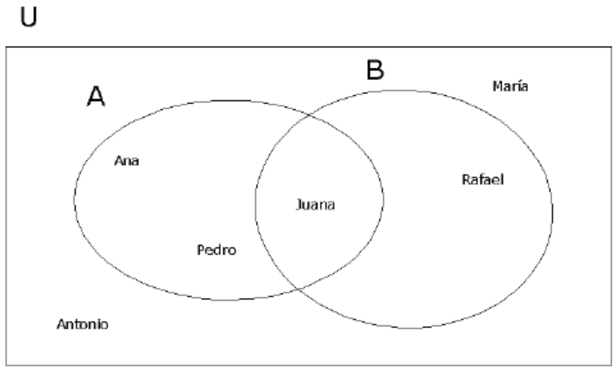


Figura 27: Diagrama de Venn, correspondiente a los conjuntos A, B y el conjunto universal.

A partir del diagrama, tomando como referencia la información aportada en la Figura 26, se pueden responder las interrogantes planteadas

a. 2 miembros del equipo viven exclusivamente en San Fernando
b. 1 miembro del equipo vive exclusivamente en Guayabal
c. 2 miembros del equipo no viven ni en San Fernando ni en Guayabal
d. 1 miembro del equipo vive tanto en San Fernando como en Guayabal
e. Ana y Pedro viven exclusivamente en San Fernando
f. Rafael vive exclusivamente en Guayabal
g. Antonio y María no viven ni en San Fernando ni en Guayabal
h. Juana vive tanto en San Fernando como en Guayabal

Ejemplo

En la urbanización "La Guamita" hay 120 casas, 70 están pintadas de color azul y 90 están pintadas de color verde, 25 casas no están pintadas con esos colores. Se pide:

a. ¿cuántas casas están pintadas con azul y verde?
b. ¿cuántas casas están pintadas exclusivamente de color azul?
c. ¿cuántas casas están pintadas exclusivamente de color verde?

Respuesta

Se identifican los conjuntos:
$U = \{x/x \text{ es una casa de la urbanización La Guamita}\}$
$A = \{x/x \text{ es una casa pintada con el color azul}\}$
$B = \{x/x \text{ es una casa pintada con el color verde}\}$
De acuerdo con la información aportada:
$n(U) = 120$
$n(A) = 70$
$n(B) = 90$
$n[(A \cup B)^C] = 25$
Por lo tanto:

$$n(A \cup B) = n(U) - n[(A \cup B)^C] = 120 - 25 = 95$$

Se aplica la fórmula:
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
Se despeja $n(A \cap B)$
$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
Se sustituyen los valores de cada cardinal
$$n(A \cap B) = 70 + 90 - 95 = 65$$
$$n(A \cap B) = 65$$
El cardinal del conjunto conformado por los elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto A es:
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 65 = 5$$
El cardinal del conjunto conformado por los elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto B es:
$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 90 - 65 = 25$$
Con toda la información disponible se construye el diagrama de Venn de los cardinales de cada zona (Figura 28).

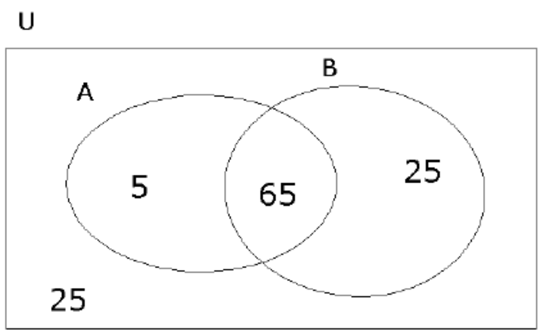


Figura 28: Diagrama de Venn donde están representados los cardinales del conjunto A, del conjunto B, de la intersección de A y B y del conjunto universal.

a. 65 casas están pintadas de color azul y verde.
b. 5 casas están pintadas exclusivamente de color azul.
c. 25 casas están pintadas exclusivamente de color verde.

Ejemplo

En el aula de la carrera castellano y literatura, primer semestre hay 40 estudiantes. De esos estudiantes hay 28 que les gusta almorzar en el comedor de la universidad, y 20 que les gusta en casa, también hay 5 alumnos que prefieren almorzar en otro lugar. Se pregunta.

a. ¿Cuántos alumnos almuerzan exclusivamente en el comedor de la universidad?
b. ¿Cuántos alumnos almuerzan exclusivamente en casa?
c. ¿Cuántos alumnos almuerzan tanto en la universidad como en casa?

Respuesta

$U = \{x/x \text{ es estudiante del primer semestre de castellano y literatura}\}$
$A = \{x/x \text{ almuerza en el comedor}\}$
$B = \{x/x \text{ almuerza en casa}\}$

Conforme con la información aportada
$n(U) = 40$
$n(A) = 28$
$n(B) = 20$
$n(A \cup B)^c = 5$

$$n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)^c = 40 - 5 = 35$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

De donde:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$n(A \cap B) = 28 + 20 - 35 = 13$$
$$n(A \cap B) = 13$$

Una vez que se tiene al cardinal de la intersección se calculan los otros cardinales:

$$n(A\ exclusivamente) = n(A) - n(A \cap B) = 26 - 13 = 15$$
$$n(B\ exclusivamente) = n(B) - n(A \cap B) = 20 - 13 = 7$$

El diagrama de Venn (Figura 29) muestra a los conjuntos con sus respectivos cardinales.

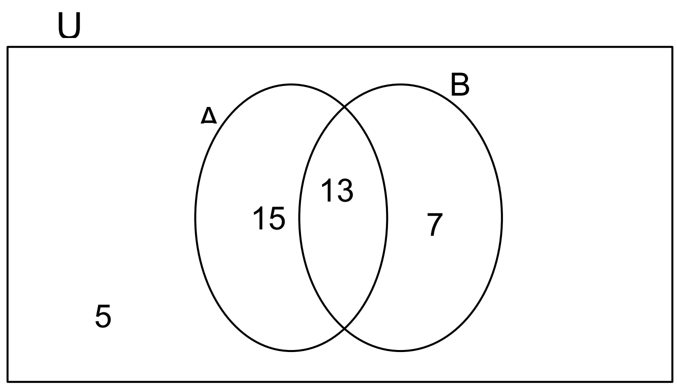


Figura 29: Diagrama de Venn correspondiente al problema relacionado con alumnos que almuerzan o no en el comedor universitario.

A partir de la Figura 29 se puede responder con facilidad las preguntas planteadas:

a. 15 alumnos almuerzan exclusivamente en el comedor de la universidad.
b. 7 alumnos almuerzan exclusivamente en casa.
c. 13 alumnos almuerzan tanto en el comedor como en casa.

Cardinal de la unión de tres conjuntos

El cardinal de la unión de tres conjuntos involucra tres zonas de intersección doble y una zona de intersección triple, la expresión que permite calcular dicho cardinal es:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Las zonas de pertenencia que se producen para los tres conjuntos se aprecian la Figura 30.

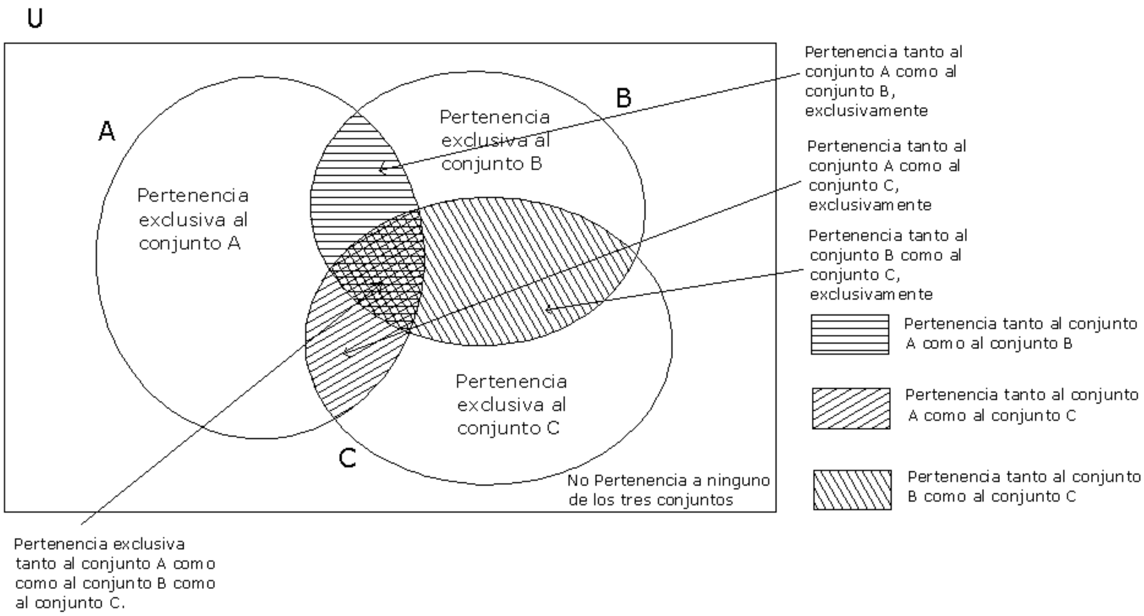


Figura 30: Pertenencia de los elementos de tres conjuntos.

El cardinal del conjunto formado por elementos que pertenecen tanto al conjunto A, como al conjunto B como al conjunto C se representa:

$$n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto formado por elementos que pertenecen exclusivamente tanto al conjunto A como al conjunto B se calcula:

$$n[(A \cap B)\ exclusivamente] = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto formado por elementos que pertenecen exclusivamente tanto al conjunto A como al conjunto C se calcula:

$$n[(A \cap C)\ exclusivamente] = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente tanto al conjunto B como al conjunto C se calcula:

$$n[(B \cap C)\ exclusivamente] = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto A se calcula:

$$n(A\ exclusivamente) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto B se calcula:

$$n(B\ exclusivamente) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto C se calcula:

$$n(C\ exclusivamente) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

El cardinal del conjunto universal se calcula:

$$n(U) = n[(A \cup B \cup C)^C] + n(A \cup B \cup C)$$

Ejemplo

En un grupo de 54 personas asistentes a una reunión a 27 les gusta el fútbol, 17 son aficionados al béisbol y 19 al basquetbol; a 6 personas no les gusta ninguno de esos deportes. A 8 personas les gusta el fútbol y el béisbol, a 7 personas les gusta tanto el fútbol como el basquetbol y a 5 personas les gusta tanto el béisbol como el basquetbol.

Con base en la información suministrada responder:

a. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el fútbol?
b. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el béisbol?
c. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el basquetbol?
d. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el fútbol y el béisbol?
e. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el fútbol y el basquetbol?
f. ¿a cuántas personas les gusta exclusivamente el béisbol y el basquetbol?
g. ¿a cuántas personas les gusta los tres deportes?

Respuesta

$U = \{x/x \; es \; una \; persona \; asistente \; a \; la \; reunión\}$
$A = \{x/x \; le \; gusta \; el \; fútbol\}$
$B = \{x/x \; le \; gusta \; el \; béisbol\}$
$C = \{x/x \; le \; gusta \; el \; basquetbol\}$

De acuerdo con la información del problema:

$n(U) = 54$
$n(A) = 27$
$n(B) = 17$
$n(C) = 19$
$n(A \cap B) = 8$
$n(A \cap C) = 7$
$n(B \cap C) = 5$
$n[(A \cup B \cup C)^C] = 6$

$$n(A \cup B \cup C) = n(U) - n[(A \cup B \cup C)^C] = 54 - 6 = 48$$
$$n(A \cup B \cup C) = 48$$

De la fórmula del cardinal de la unión de tres conjuntos:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Se despeja $n(A \cap B \cap C)$.

$n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$

$$n(A \cap B \cap C) = 48 - 27 - 17 - 19 + 8 + 7 + 5$$
$$n(A \cap B \cap C) = 5$$

Cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto A y al conjunto B:

$$n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 8 - 5 = 3$$

Cardinal del conjunto conformado por elemento que pertenecen exclusivamente al conjunto A y al conjunto C:

$$n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 7 - 5 = 2$$

Cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto B y al conjunto C:

$$n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 5 - 5 = 0$$

Cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto A:

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$27 - 8 - 7 + 5 = 17$$

Cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto B:

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$17 - 8 - 5 + 5 = 9$$

Cardinal del conjunto conformado por elementos que pertenecen exclusivamente al conjunto C:

$$n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$19 - 7 - 5 + 5 = 12$$

Con los cálculos realizados, se construye el diagrama de Venn (Figura 31) y se coloca en cada región los cardinales correspondientes.

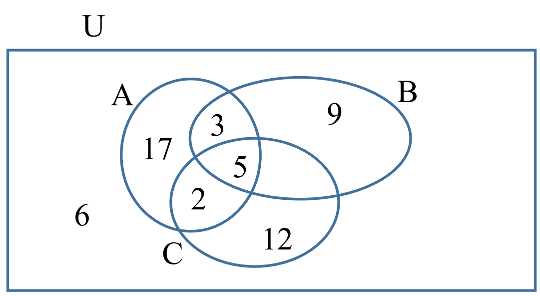


Figura 31: Diagrama de Venn que representa al número de elementos que ocupan cada una de las regiones delimitadas por los conjuntos A, B, C y el conjunto universal.

Tomando como base la Figura 30, los cálculos realizados y apoyados en la información recabada en el diagrama de Venn de la Figura 31, se responden las interrogantes planteadas.

a. A 17 personas les gusta exclusivamente el fútbol.
b. A 9 personas les gusta exclusivamente el béisbol.
c. A 12 personas les gusta exclusivamente el basquetbol.
d. A 3 personas les gusta exclusivamente el fútbol y el béisbol.
e. A 2 personas les gusta exclusivamente el fútbol y el basquetbol.
f. A 0 personas les gusta exclusivamente el béisbol y el basquetbol.
g. A 5 personas les gusta el fútbol, el béisbol y el basquetbol.

Ejercicios

1. En la zona comprendida entre la parte urbana del municipio Biruaca y el municipio Achaguas del estado Apure, se registraron 62 unidades de producción de las cuales 45 unidades de producción que cultivan maíz, 38 unidades de producción que cultivan caraotas, 28 cultivan tanto maíz como caraotas.
    a. ¿cuántas unidades de producción no cultivan ni maíz ni caraotas?
    b. ¿cuántas unidades de producción cultivan exclusivamente maíz?
    c. ¿cuántas unidades de producción cultivan exclusivamente caraotas?
2. En Venezuela hay tres operadoras de telefonía celular: Movistar, Movilnet y Digitel. Se entrevistaron 32 personas mayores de edad y se obtuvo la siguiente información: 16 usuarios usan Movistar, 14 usuarios utilizan Movilnet, 10 utilizan digitel. 8 utilizan Movistar y Movilnet, 5 utilizan Movistar y Digitel, 7 utilizan Movilnet y Digitel, 7 personas entrevistadas indicaron que no usan teléfono celular.
    Con base en la información, responder:
    a. ¿Cuántos entrevistados utilizan exclusivamente Movistar?
    b. ¿Cuántos entrevistados utilizan exclusivamente Movilnet?
    c. ¿Cuántos entrevistados utilizan exclusivamente Digitel?
    d. ¿Cuántos entrevistados utilizan Movistar y Movilnet exclusivamente?
    e. ¿Cuántos entrevistados utilizan Movistar y Digitel exclusivamente?
    f. ¿Cuántos entrevistados utilizan Movilnet y Digitel exclusivamente?
    g. ¿Cuántos entrevistados utilizan Movistar, Movilnet y Digitel?
3. En una empresa constructora se ofrecen 38 puestos de trabajo en el ramo de la construcción, 20 deben ser albañiles, 18 deben ser carpinteros y 20 deben herreros. Del mismo grupo a contratar 7 tienen que ser albañiles y carpinteros, 11 deben ser albañiles y herreros y 6 tienen que ser carpinteros y herreros.
    Se pregunta:
    a. ¿Cuántos contratados deben ser albañiles, carpinteros y herreros?
    b. ¿A cuántas personas que sólo tengan el oficio de albañil se les puede contratar?
    c. ¿A cuántas personas que sólo tengan el oficio de carpintero se les puede contratar?
    d. ¿A cuántas personas que sólo tengan el oficio de herrero se les puede contratar?
4. Una muestra de 370 jóvenes universitarios menores de 21 años arrojó la siguiente información: 221 utilizan Facebook, 180 utilizan Instagram, 112 utilizan Twitter, 94 utilizan Facebook e Instagram, 68 utilizan Facebook y Twitter, 42 utilizan Instagram y Twitter, 36 no utilizan ninguna de esas redes sociales.
    a. ¿Cuántos jóvenes universitarios utilizan Facebook, Instagram y Twitter.
    b. ¿Cuántos jóvenes universitarios utilizan exclusivamente Facebook?

Producto Cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto conformado por todos los pares ordenados, cuya primera componente pertenece al conjunto A y cuya segunda componente pertenece al conjunto B.

Se representa así:

$$AxB = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$$

Se habla de par ordenado, ya que siempre la primera componente o primer elemento del par pertenece al conjunto de partida y la segunda componente o segundo elemento pertenece al conjunto de llegada. El conjunto de partida es el conjunto A o primer conjunto, el conjunto de llegada es el conjunto B o segundo conjunto.

Al par ordenado también se le conoce como coordenadas de un punto o simplemente coordenadas, término que no es extraño en lo tiempo actuales.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$$A = \{a_1, a_2,\ a_3\}$$
$$B = \{b_1, b_2\}$$

Efectuar AxB

Respuesta

$$AxB = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

Ejemplo

Dados los conjuntos $M = \{a, e, i, o, u\}$ $N = \{1,3,5\}$; se pide:

a. Número de pares ordenados
b. MxN

Respuesta

a. El número de pares ordenados es el producto del cardinal de los dos conjuntos.
Número de pares ordenados: $n(M)\ x\ n(N)$=5x3=15.
b. *M*x*N*={(a,1), (a,3), (a,5), (e,1), (e,3), (e,5), (i,1),(i,3), (i,5), (o,1), (o,3), (o,5), (u,1), (u,3), (u,5)}

Ejemplo

Sean los conjuntos

$$A = \{x/x \in N \wedge 5 \le x \le 10\}$$
$$B = \{x/x \in N \wedge 10 \le x \le 15\}$$

Se pide efectuar AxB

Respuesta

Los conjuntos están definidos por comprensión, por extensión son:

$$A = \{5,6,7,8,9,10\}$$
$$B = \{10,11,12,13,14,15\}$$

Número de pares ordenados: $n(A)xn(B) = 6x6 = 36$

El producto cartesiano de los conjuntos A y B produce 36 pares ordenados. Se explica como generar la respuesta con wxMaxima.

Una vez cargado wxMaxima se presiona la tecla Enter para que el software muestre el cursor y así poder ingresar los datos.

Escribir: A:set(5,6,7,8,9,10)
Presionar las teclas Shift+Enter.
Presionar la tecla Enter.
Escribir: A:set(10,11,12,13,14,15).
Presionar las teclas Shift+Enter.
Presionar la tecla Enter.
Escribir: cartesian_product(A,B).

Presionar las teclas Shift+Enter. El programa genera los 36 pares ordenados que conforman el producto cartesiano. Los entrada y las salidas de wxMaxima se observan en la Figura 32.

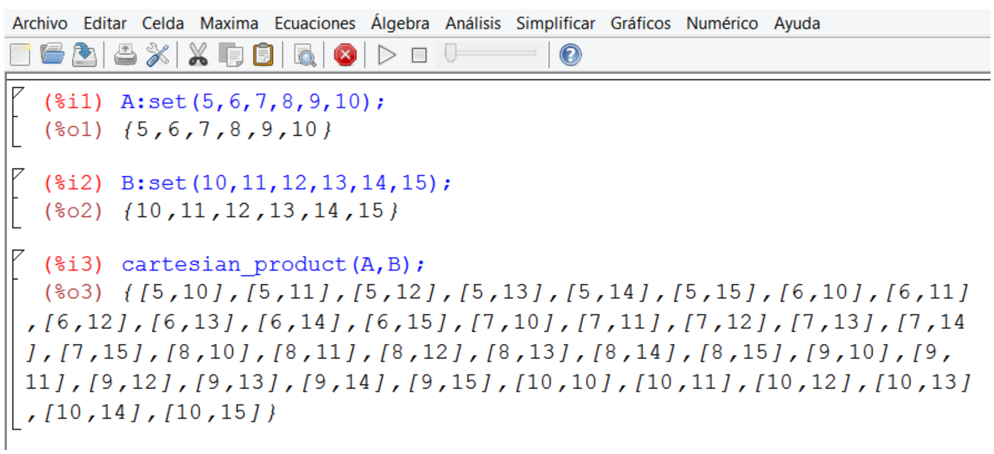


Figura 32: Producto cartesiano AxB generado con wxMaxima.

Ejemplo

Dados los conjuntos

$$H = \{2,4,6\}$$
$$I = \{w, x, y\}$$

Se pide:

a. Representar ambos conjuntos mediante diagrama de Venn.
b. Efectuar AxB sobre el diagrama de Venn.

Respuesta

a.

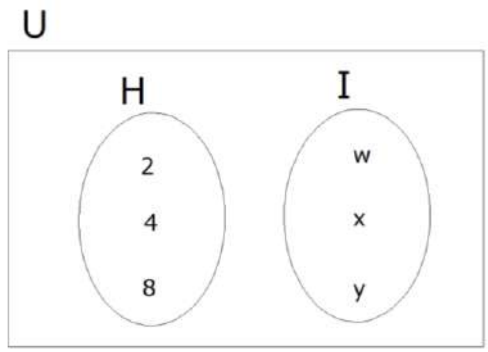


Figura 33: Representación mediante diagrama de Venn de los conjuntos H e I.

b. Se unen mediante flechas cada elemento del conjunto de partida con cada elemento del conjunto de llegada. La representación que se genera se conoce como representación sagital (Figura 34).

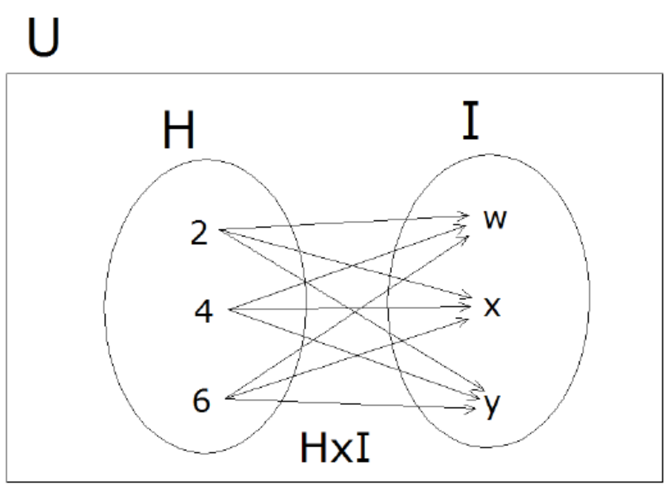


Figura 34: La representación del producto cartesiano mediante diagramas de Venn, se conoce como representación sagital.

Ejemplo

Dados los conjuntos A={1, 2, 3, 4} B={1, 4, 9, 16}, se pide representar el producto AxB en el plano cartesiano.

Respuesta

El conjunto de partida se representa sobre una recta horizontal, el conjunto de llegada se representa sobre una recta vertical. Las dos rectas se intersectan y luego se intersecta cada uno de los elementos de los conjuntos entre sí. El resultado se muestra en la Figura 35.

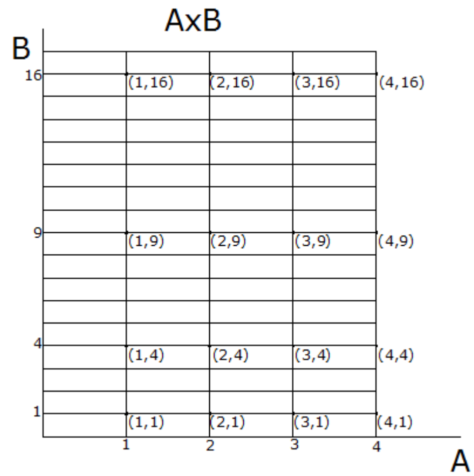


Figura 35: Producto cartesiano AxB en representación cartesiana.

Ejercicios

1. Dados los conjuntos

$$A = \{2,5,7,8\}$$
$$B = \{2,4,6,8,9\}$$

   Efectuar AxB

2. Se tienen los conjuntos

$$C = \{x/x \in N \wedge 4 \leq x \leq 9\}$$
$$D = \{6,7,8,9,10\}$$

   a. Representar sagitalmente CxD
   b. Representar en el plano cartesiano DxC

3. Con los conjuntos indicados

$$E = \{x/x \in N \wedge 8 \leq x \leq 16\}$$
$$F = \{x/x \in N \wedge 1 \leq x \leq 7\}$$

   a. Efectuar ExF con wxMaxima
   b. Representar en el plano cartesiano ExF

4. Dados los conjuntos

$$G = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$H = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

   a. Calcular el número de pares ordenados.
   b. Efectuar GxH con la ayuda de wxMaxima

Conjunto de partes

Se trata del conjunto que contiene a todos los subconjuntos posibles que se pueden conformar a partir de los elementos de un conjunto. También se le denomina conjunto potencia. Si el conjunto es A, el conjunto de partes de A se simboliza como:

$$p(A)$$

El número de subconjuntos que se conforman a partir de un conjunto A que contiene a n elementos se denomina número de partes del conjunto A, el cual se simboliza y calcula así:

$$Número\ de\ p(A) = 2^{n(A)}$$

Donde $n(A)$ es el cardinal del conjunto A.

Ejemplo

Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$
Calcular:

a. Número de partes del conjunto A.
b. Conjunto de partes de A.

Respuesta

a. El cardinal del conjunto A es:

$$n(A) = 3$$

El número de partes del conjunto A es:

$$Número\ de\ p(A) = 2^3 = 8$$
$$Número\ de\ p(A) = 8$$

b. El conjunto de partes de A es:

$$p(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

Ejemplo

Dado el conjunto B=$\{x/x \in N \wedge 2 \leq x \leq 8\}$
Se pide:

a. Número de partes del conjunto B.
b. Conjunto de partes del conjunto B.

Respuesta

a. El conjunto B expresado por extensión es:

$$B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$n(B) = 7$$
$$Número\ de\ p(B) = 2^7 = 128$$

b. El conjunto de partes de B está conformado por 128 subconjuntos. Hacer manualmente esta operación es una tarea que consume bastante tiempo y existe una alta probabilidad de cometer errores, por lo tanto se usa el software wxMaxima.
   Cargar wxMaxima
   Presionar la tecla Enter
   Ingresar el conjunto B así: B:set(2,3,4,5,6,7,8)
   Presionar Shift+Enter
   Presionar la tecla Enter
   Ingresar el comando: powerset(B)
   Presionar Shift+Enter

La Figura 36 se corresponde con la ventana de wxMaxima donde se muestran las entradas y las salidas. La última es la respuesta a la interrogante planteada, el conjunto de partes del conjunto B.

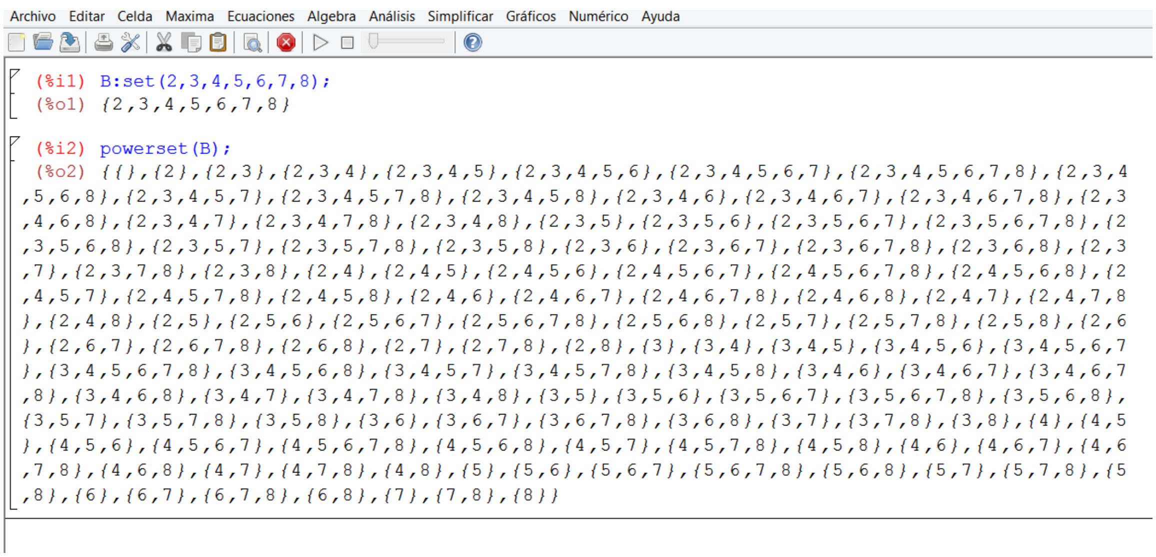


Figura 36: Conjunto de partes del conjunto B. Se ha utilizado wxMaxima, los colores rojos son las entradas y las salidas,. La última salida (%o2) es el conjunto de partes de B.

Ejercicios

1. Dados los conjuntos

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$B = \{2,4,6,7,8\}$$
$$C = \{k, l, m, n\}$$

   Calcular
   a. Partes del conjunto A
   b. Partes del conjunto B
   c. Partes del conjunto C
2. ¿Cuántos subconjuntos son posibles conformar a partir del conjunto

$$D = \{b, c, d, e, f, g, h, i, j\}?$$

3. Utilizar wxMaxima para conformar el conjunto de partes del conjunto
$$A = \{x/x \in N \wedge 30 \leq x \leq 36\}$$
4. Se tiene al conjunto
$$C = \{5,6,7,8,9,10\}$$
Indicar cuáles de los siguientes conjuntos integran el conjunto de partes de C.
   a. $D = \{2,3,5\}$
   b. $E = \{5\}$
   c. $F = \{5,6,10\}$
   d. $G = \{8,11\}$
   e. $H = \emptyset$

Resumen

- Un conjunto consiste en la agrupación de elementos que tienen al menos una característica en común.
- Los elementos de un conjunto pueden estar expresados por comprensión y por extensión.
- Cuando se expresan los elementos del conjunto por comprensión, se utiliza una frase o expresión simbólica matemática para identificar a cada elemento.
- Cuando se expresan los elementos del conjunto por extensión, se menciona explícitamente a cada uno de ellos.
- Las relaciones de pertenencia se dan entre los elementos del conjunto y los símbolos usados son $\in$ para indicar que el elemento pertenece al conjunto y $\notin$ para indicar que el elemento no pertenece al conjunto.
- Las relaciones de contenencia se producen entre los conjuntos y los símbolos empleados son $\subset$ para indicar que un conjunto está incluido dentro de otro y $\not\subset$ para indicar que un conjunto no está incluido o no es subconjunto de otro.
- El cuantificador universal se utiliza para hacer referencia a la totalidad de elementos de un conjunto, su símbolo es $\forall$ y significa "para todo".
- El cuantificador existencial se utiliza para hacer referencia a una situación particular dentro de un conjunto, su símbolo es $\exists$ y significa existe o existe al menos.
- La unión de dos conjuntos A y B se representa por $A \cup B$ y consiste en el conjunto conformado por elementos que están tanto en el conjunto A como en el conjunto B.
- La intersección de dos conjuntos A y B se representa por $A \cap B$ y consiste en el conjunto conformado por elementos que son comunes al conjunto A y al conjunto B.
- La diferencia de dos conjuntos A y B se representa por A-B y consiste en el conjunto conformado por elementos que están o pertenecen al conjunto A pero que no pertenecen al conjunto B. Es decir, es el conjunto formado por los elementos que son exclusivos del conjunto A.
- El complemento de un conjunto A es aquel conjunto conformado por los elementos que pertenecen al conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto A, se representa por A^c.
- El cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee dicho conjunto.
- El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto conformado por todos los pares ordenados cuya primeras componentes pertenecen al conjunto A y cuyas segundas componentes pertenecen al conjunto B.
- El conjunto de partes de un conjunto es aquel conjunto formado por todos los subconjuntos posibles que surgen como resultado de combinar los elementos de un conjunto, incluyendo al propio conjunto y al conjunto vacío.

Términos Clave

- Conjunto
- Conjunto universal
- Conjunto definido por extensión
- Conjunto definido por comprensión
- Pertenencia a un conjunto
- Subconjunto
- Unión de conjuntos
- Intersección de conjuntos
- Diferencia de conjunto
- Complemento de un conjunto
- Producto cartesiano
- Cardinal de un conjunto
- Partes de un conjunto.
- Cuantificador universal
- Cuantificador existencial

Ejercicios de Autoevaluación

1. Represente por extensión los siguientes conjuntos
   a. $A = \{x/x \text{ es estado de Venezuela que comienza por la letra } a\}$
   b. $B = \{x/x \text{ es país latinoamericano que comienza por la letra } B\}$
   c. $C = \{x/x \text{ universidad que funciona en El Recreo, San Fernando}\}$
   d. $D = \{x/x \text{ es número natural menor que } 5\}$
   e. $E = \{x/x \in N \wedge x \leq 8\}$
   f. $F = \{x/x \text{ es letra de la palabra } UNELLEZ\}$
   g. $G = \{x/x \in N \wedge 2 \leq x \leq 12\}$

2. Dado el conjunto:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$

   Se pide establecer 5 proposiciones verdaderas utilizando el cuantificador universal o el cuantificador existencial.

3. Convertir al lenguaje formal las proposiciones:
   a. Para todo x que pertenezca al conjunto A, x es una letra del alfabeto.
   b. Para todo x que pertenezca al conjunto A, x es un número natural.
   c. Existe al menos un x perteneciente al conjunto A tal que x es una potencia de 5.
   d. Existe al menos un x perteneciente a A tal que x es menor que 100.

4. Dados los conjuntos

$$U = \{x/x \in N \wedge x \leq 15\}$$
$$A = \{1,3,5,7,11,13\} \; B = \{2,3,4,6,8,\} \; C = \{1,7,8,10,12,13\}$$

   Se pide:
   a. Representarlos mediante un diagrama de Venn.
   b. Efectuar $A \cup B \cup C$.
   c. Efectuar $A \cap B$
   d. Efectuar $A \cap C$
   e. Efectuar $A \cap B \cap C$
   f. Efectuar $(A - B) \cup (A - C)$
   g. Efectuar $(B - C) \cap (A \cup B)$
   h. $A^C - B^C$

5. Durante 12 horas del día María estudia y realiza labores del hogar, para lo cual dedica 8 horas a estudiar y 7 horas a las labores del hogar. Se pregunta: a) ¿Durante cuántas horas del día María estudia exclusivamente?, b) ¿Durante cuántas horas del día María realiza exclusivamente labores del hogar?, c) ¿durante cuántas horas del día María realiza labores del hogar y estudia?

6. Dados los conjuntos $A = \{1,2,4,6\}$ $B = \{2,4,8\}$
   Se pide
   a. efectuar AxB y hacer la representación cartesiana.
   b. Conjunto de partes del conjunto A.
   c. Conjunto de partes del conjunto B.

7. Dados los conjuntos

$$A = \{x/x \in N \wedge 20 \leq x \leq 25\}$$
$$B = \{x/x \in N \wedge 40 \leq x \leq 44\}$$

Se pide efectuar con wxMaxima:

a. AxB
b. $p(A)$
c. $p(B)$

Bibliografía Recomendada

Apostol, T.M. (2006). *Análisis matemático (2a ed.)*. Barcelona: Reverté.
Flores, M. y Fautsch, E. (2005). Temas selectos de matemáticas 7. México: Progreso.
Huete de G. M. (1996). *Matemática elemental*. San José, Costa Rica: Euned.
Ferrando, J.C. y Gregori, V. (2002). *Matemática discreta (2a ed.)*. Barcelona: Reverté.

CAPÍTULO 3

Sistemas Numéricos

Objetivos:

General

Analizar las estructuras básicas de los sistemas numéricos y de los conjuntos numéricos.

Específicos

- Describir los principales sistemas de numeración utilizados actualmente.
- Analizar el conjunto de los números naturales.
- Analizar el conjunto de los números enteros.
- Analizar el conjunto de los números racionales.
- Analizar el conjunto de los números irracionales.
- Analizar el conjunto de los números reales.
- Utilizar tecnologías de la información y la comunicación para el cálculo de las operaciones relacionadas con los conjuntos numéricos.

Introducción

El hombre siempre ha tenido la necesidad de contar puesto que esta acción es una de las maneras de sobrevivir en un mundo que exige cada vez más el registro de actividades bajo formas abreviadas pero entendibles por toda una comunidad. En este sentido existen evidencias históricas acerca del uso de sistemas de numeración por sociedades que alcanzaron un nivel avanzado en su calidad de vida, tal es el caso de la civilización maya quienes usaron sistemas de puntos y rayas sobre la base del número 20 para indicar cantidades, la civilización egipcia que utilizó un conjunto de símbolos partiendo de la raya vertical para la unidad y muchos otros diferentes para indicar centenas, decenas, millares y millones, la civilización griega que utilizó su alfabeto para representar cantidades.

En fin son muy interesantes las evidencias existentes que demuestran el interés que ha tenido la humanidad en contar con un grupo de símbolos reconocidos en su entorno para transmitir la idea de cantidades. Al respecto, según indica Cid, Godino y Batanero (2003):

> Ha sido práctica frecuente de los ejércitos de diferentes épocas y sociedades que, antes de entrar en batalla, cada guerrero depositara un guijarro en un lugar convenido. A la vuelta cada guerrero recogía uno de dichos guijarros. Los sobrantes indicaban el número de bajas que se habían producido en batalla. La utilización de guijarros para contar o realizar operaciones ha dado lugar a la palabra cálculo, que proviene de la palabra latina calculus que significa piedra pequeña (p. 23).

Los autores citados también indican que "en un momento dado algunas sociedades se dan cuenta de que al usar un conjunto numérico ordenado, ya no es necesario presentar al interlocutor todo el conjunto con el que se ha establecido la correspondencia ni enumerarlos. Con hacer referencia al último objeto es suficiente" (p.24). De igual manera . indican que en particular nuestro conjunto numérico habitual es un conjunto ordenado de palabras: uno, dos, tres, cuatro,… si alguien dice que tiene cinco objetos, su interlocutor entiende la información porque se imagina un objeto para el uno, otro para el dos, otro para el tres, otro para el cuatro y otro para el cinco. Es decir, la transmisión de dicha información numérica está dependiendo del hecho de tener almacenada en nuestra memoria esa sucesión de palabras.

Independientemente de las posibles complicaciones que surgen tanto en los sistemas de numeración como en los conjuntos numéricos, el hecho real es que el uso de los números constituye una necesidad puesto que sirve para para registrar o expresar magnitudes. Por ejemplo, la hora de cierre de un comercio, el peso de una persona, el precio de un automóvil, el número de hijos de una familia, el rendimiento por hectárea de un cultivo, entre otros, son casos donde sería imposible la cabal comprensión de lo expresado, si previamente los individuos involucrados en el proceso de comunicación no tienen clara la idea de número.

En tal sentido, en el presente módulo, se hace un repaso de los sistemas de numeración y luego se detallan los conjuntos numéricos, comenzando por el conjunto de los números naturales y finalizando con el conjunto de los números reales. Se estudian propiedades importantes de cada uno de los conjuntos numéricos y re realizan cálculos básicos a partir de éstas.

Sistemas de Numeración

La forma de representar los números, el valor de éstos dependiendo o no de su posición y el número de símbolos empleados, conforman los elementos principales de un sistema de numeración. Se define por lo tanto como el conjunto de leyes, palabras y signos que tienen como fin la enunciación y representación de los números. El hombre en su preocupación por representar cantidades se ha valido de diferentes puntos de vista para lograr tal fin, en ese sentido se tienen sistemas de numeración tan antiguos como el egipcio, el romano, el griego, el chino y más recientemente el decimal.

Hay sistemas posicionales en los cuales el valor de un dígito depende de la posición donde se encuentre. Por ejemplo, el número 333 (Figura 1), representa a la cantidad tres mil trescientos treinta y tres y a pesar de que se trata del mismo dígito, el valor es diferente en cada posición; el 3 más a la izquierda representa a las unidades, el 3 intermedio representa a las decenas y el 3 más a la izquierda representa a las centenas.

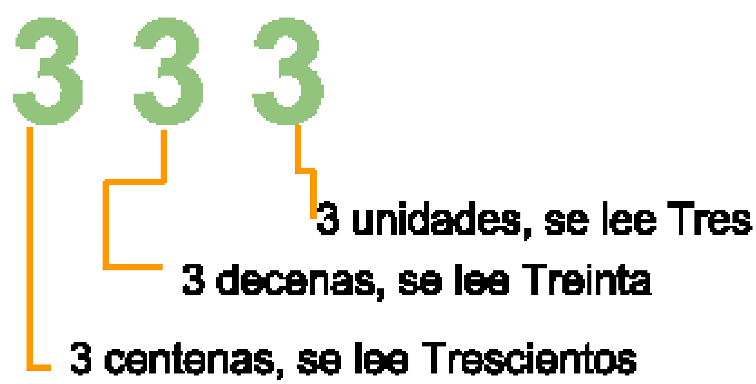


Figura 1: En los sistemas de numeración posicionales, el valor de un dígito depende de la posición que ocupa, observe que se trata del mismo número 3, pero con diferentes valores.

Dentro de los sistemas de numeración posicionales utilizados en la actualidad, se tienen los siguientes. Es de destacar que en todos ellos la base del sistema de numeración es el cardinal del conjunto.

Sistema de numeración decimal

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Figura 2: El sistema de numeración decimal contiene diez elementos, por lo tanto la base de ese sistema es el número 10.

El cardinal de este conjunto es 10, por lo tanto esa es la base.

El Sistema de numeración decimal está constituido por números cuya base es el número 10, cada 10 unidades conforman una unidad de orden superior, cada tres órdenes de unidad conforman una clase. Es decir, 10 unidades, 10 decenas, 10 centenas, conforman la primera clase denominada Unidades. 10 unidades de millar, 10 decenas de millar y 10 centenas de millar, conforman la clase Millares. Esta situación se muestra en detalle en la Tabla 1.

Tabla 1
Sistema de numeración decimal

Clases	Unidades			Millares			Millones			Millares de millón			Billones		
Orden de unidad	Unidades	Decenas	Centenas	Unidades de millar	Decenas de millar	Centenas de millar	Unidades de millón	Decenas de millón	Centenas de millón	Unidades de millar de millón	Decenas de millar de millón	Centenas de millar de millón	Unidades de billón	Decenas de billón	Centenas de billón
Ejemplo	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000	10 000 000 000	100 000 000 000	1 000 000 000 000	10 000 000 000 000	100 000 000 000 000

Fuente: Tomado de Andrés, D. y Guerra, F., p.9.

La manera correcta de leer una cifra expresada en números del sistema decimal, es comenzar de izquierda a derecha a conformar grupos de tres dígitos, separados por un espacio De esa manera se establecen las clases, comenzando por las unidades. La Real Academia Española en colaboración con el resto de las academias españolas, en su libro Ortografía de la lengua española (2010) indica que no deben utilizarse puntos ni comas para separar los grupos de tres dígitos en la parte entera de un número, sólo se admite hoy el uso de un pequeño espacio en blanco. En la Figura 3 se tiene un ejemplo correspondiente al número 8543701256.

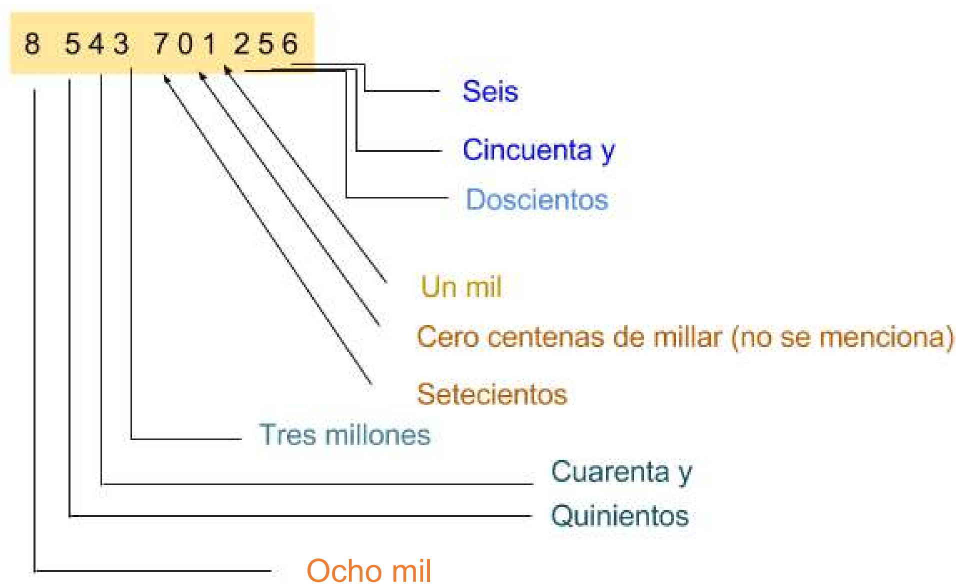


Figura 3: El número 8543701256 con sus dígitos conformando clases y la manera correcta de leer la cantidad: 8 mil quinientos cuarenta y tres millones setecientos un mil doscientos cincuenta y seis.

Ejemplo

Expresar mediante palabras la siguiente cifra en el sistema decimal: 400100304

Respuesta

Si la cifra no tiene los espacios que separan cada clase, lo hacemos comenzando por el dígito de la izquierda:

400 100 304

La cifra se lee: 400 millones cien mil trescientos cuatro. En la Figura 4 puede observarse cada clase en que está conformada la cifra las cuales debemos identificar para expresar la cifra correctamente mediante palabras.

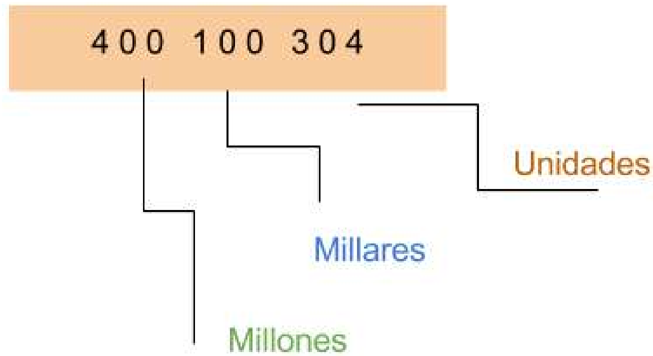


Figura 4: Clases que conforman la cifra 400 100 304, las cuales resultan de mucha importancia a la hora de leer tal cantidad.

Ejemplo

Expresa mediante palabras la siguiente cifra: 8001001

Respuesta

La cifra con sus espacios que separan a cada clase es 8 001 001. Se tiene por lo tanto ocho millones un mil uno. Observe la Figura 5 donde se detalla la agrupación en clases.

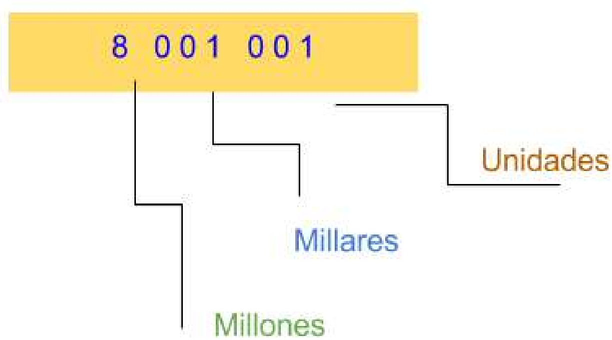


Figura 5: Clases que conforman a la cifra 8001001, comience su lectura en el sentido normal considerando la presencia de unidades, decenas y centenas en cada clase. En este caso hay 8 unidades de millón, una unidad de millar y una unidad.

Números decimales. Un número decimal es un número que está conformado por un número entero y una parte no entera con un valor entre cero y uno. Dicha parte no entera también se conoce como parte fraccionaria o parte decimal. Un número que no sea entero es un número decimal y si es un número decimal entonces no es *Entero*.
Un número decimal tiene la forma

$$Número\_entero.abcdef\ \ldots$$

Donde $a, b\ c, d, e, f\ \ldots$ son números naturales incluido el cero. El sistema de numeración internacional de unidades (SI) recomienda usar el punto como separador. De igual manera lo hace la Asociación de Lenguas Españolas (2010) institución que indica que con el fin de promover un proceso tendente hacia la unificación, se recomienda el uso del punto como separador de decimales. En este aspecto el estudiante debe tener mucho cuidado puesto que en Venezuela y muchos países de la región aún se continúa usando la coma.

Un número decimal se lee como un número entero tomando en cuenta que al final se indica el orden del lugar correspondiente al último número. Los órdenes de los decimales son los siguientes, comenzado desde el punto decimal hacia la derecha: décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, cienmillonésimas,…

En la Figura 6 se observan los primeros diez órdenes decimales. La cifra hasta el cuarto orden decimal se lee: Doce millones trescientos cuarenta y cinco mil setecientos ochenta y nueve con mil doscientos treinta y cuatro diez milésimas.

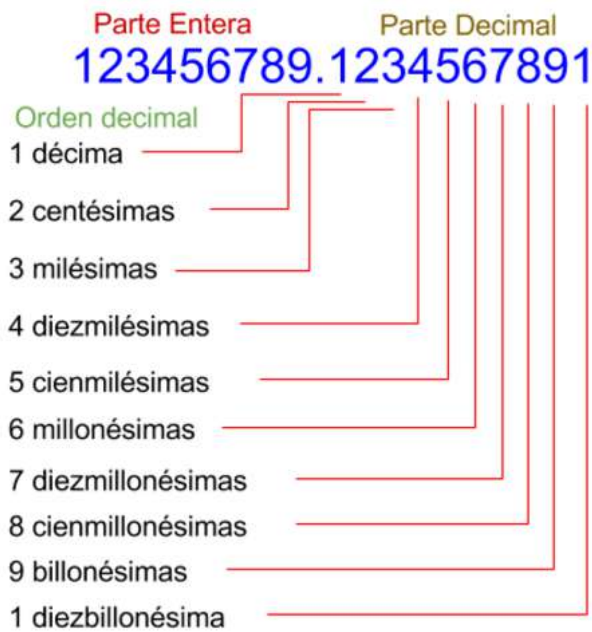


Figura 6: Ordenes decimales

Los números decimales pueden ser:

- Exactos: 3.45; 12.34; 135.782
- Periódicos puros: 0.571428571428571428…; 2.7777…; 24.666….
- Periódicos mixtos: 3.08333…; 0.03472222…4,77272727…
- Infinitos. Estos no proceden de una fracción. 1.414213…; 1,73205080…

Este sistema de numeración, planteado bajo este esquema, equivale al conjunto de los números reales, los cuales se estudian en este mismo capítulo.

Ejemplos

Indicar la manera correcta de leer los siguientes números decimales:

a. 21.012
b. 0.0003
c. 5.147794

d. 41.9000005.

Respuestas

a. 21.012 se lee: Veintiuno con 12 milésimas
b. 0.0003 se lee: Tres diezmilésimas
c. 5.147794 se lee: Cinco con ciento cuarenta y siete mil setecientos noventa y cuatro millonésimas.
d. 41.9000005 Se lee: cuarenta y uno con nueve mil cinco diez millonésimas.

Ejercicios

1. Escriba correctamente cada cifra
   a. 200045
   b. 340010005
   c. 4371678991
   d. 3000030000101
   e. 456711112222000
2. Escriba las siguientes cantidades
   a. Novecientos noventa y nueve millones nueve mil
   b. Cuatro cien milésimas
   c. Dieciséis con quince diez millonésimas
   d. Tres billones ochenta y dos millones cuatro mil doce
   e. Cincuenta y cuatro con ciento veinticuatro cien milésimas

Sistema de numeración binario

$$\{0, 1\}$$

El cardinal del conjunto es 2, por lo tanto los números binarios tienen como base al número 2.

Es posible convertir un número decimal a número binario, para ello una de las alternativas es descomponer el número en potencias de 2, comenzando por la potencia de 2 más alta.

Ejemplo

Expresar el número 124 como número binario.

Respuesta

$124 = 64+32+16+8+4=1x2^6+1x2^5+1x2^4+1x2^3+1x2^2+0x2^1 +0x2^0$

$$124_{10} = 1111100_2$$

Ejemplo

Expresar el número 725 como número binario

Respuesta

Las potencias de 2 menores o iguales a 725 son:

$$512+256+128+64+32+16+8+4+2$$

Seleccionemos aquellas potencias cuya suma sea igual o se aproxime a 725, comenzando por la más alta:

$$725 = 512 + 128 + 64 +16+4+1$$

Por lo tanto

$725 = 1x2^9 + 0x2^8 + 1x2^7 + 1x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$

$$725_{10}=1011010101_2$$

Puede ser útil recordar las primeras potencias del número 2

Tabla 2
Primeras potencias del número dos

$2^0 = 1$	$2^2 = 4$	$2^4 = 16$	$2^6 = 64$	$2^8 = 256$	$2^{10} = 1024$
$2^1 = 2$	$2^3 = 8$	$2^5 = 32$	$2^7 = 128$	$2^9 = 512$	$2^{11} = 2048$

Otra posibilidad de conversión de decimal a binario es utilizando divisiones sucesivas entre 2.

Por ejemplo, si se quiere expresar el número 249 en número binario se procede de la siguiente manera

$249 \div 2 = 124$	Resto = 1
$124 \div 2 = 62$	Resto = 0
$62 \div 2 = 31$	Resto = 0
$31 \div 2 = 15$	Resto = 1
$15 \div 2 = 7$	Resto = 1
$7 \div 2 = 3$	Resto = 1
$3 \div 2 = 1$	Resto = 1
$1 \div 2 = 0$	Resto = 1

Por lo tanto

$$249_{10} = 11111001_2$$

Si se desea expresar el número 2468 en número binario

$2468 \div 2 = 1234$	Resto = 0
$1234 \div 2 = 617$	Resto = 0
$617 \div 2 = 308$	Resto = 1
$308 \div 2 = 154$	Resto = 0
$154 \div 2 = 77$	Resto = 0
$77 \div 2 = 38$	Resto = 1
$38 \div 2 = 19$	Resto = 0
$19 \div 2 = 9$	Resto = 1
$9 \div 2 = 4$	Resto = 1
$4 \div 2 = 2$	Resto = 0
$2 \div 2 = 1$	Resto = 0
$1 \div 2 = 0$	Resto = 1

Por lo tanto

$$2468_{10} = 100110100100_2$$

Para hacer la conversión de binario a decimal se multiplica por potencias sucesivas del número 2.

Ejemplo

Expresar el número 11101101_2 en numeración del sistema decimal.

Respuesta

$$\begin{aligned} 11101101 &= 1x2^7+1x2^6+1x2^5+0x2^4+1x2^3+1x2^2+0x2^1+1x2^0 \\ &= 128+64+32+0+8+4+0+1 \\ &= 237 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$11101101_2 = 237_{10}$$

Sistema de numeración octal

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

El cardinal de ese conjunto es 8, por lo tanto esa es la base de este sistema.

Conversión de decimal a octal. Este proceso de conversión sigue el mismo principio de la conversión de decimal a binario.

Las primeras potencias del número 8 se indican en la Tabla 3.

Tabla 3
Primeras potencias del número 8

$8^0 = 1$	$8^2 = 64$	$8^4 = 4096$	$8^6 = 262144$
$8^1 = 8$	$8^3 = 512$	$8^5 = 32768$	$8^7 = 2097152$

Ejemplo

Convertir el número 358 a octal.

Respuesta

Utilizando las potencias de 8, la conversión puede realizarse de esta manera:

En la tabla 3 se observa que la potencia de 8 inmediatamente menor o igual que 358 es 64. Se elige 8^2 y sus potencias menores.

$$358 = k_1 8^2 + k_2 8^1 + k_3 8^0$$

Donde $k_1, k_2\ y\ k_3$ son números enteros.

El número que multiplicado por 64 que genera un resultado próximo pero inferior a 358 es 5. 5x64=320, por lo tanto aún hacen falta 38 unidades. El número que multiplicado por 8 que genera un número próximo pero inferior a 38 es el 4. 4x8=32, por lo tanto aún hacen falta 6 unidades.

El número que multiplicado por 1 que genera un número próximo o igual a 6 es el 6. 6x1=6.

Por lo tanto: $358_{10} = 546_8$

La otra manera de hacer la conversión es utilizando las divisiones sucesivas entre 8:

$358 \div 8 = 44$ Resto 6
$44 \div 8 = 5$ Resto 4
$5 \div 8 = 0$ Resto 5

Ahora se escriben los restos comenzando por la parte inferior para obtener el mismo resultado anterior.

Conversión de octal a binario. Para convertir de octal a binario es conveniente usar la Tabla 4.

Tabla 4
Conversión binario a octal

Decimal	Binario	Octal
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

Ejemplo

Convertir el número 546 en octal a binario

Respuesta

5 = 101
4 = 100
6 = 110

$$546_8 = 101100110_2$$

Ejemplo

Convertir el número octal 674 a número binario

Respuesta

6 = 110
7 = 111
4 = 100

$$674_8 = 110111100_2$$

Ejemplo

Convertir el número octal 247611 en número binario

Respuesta

2 = 010
4 = 100
7 = 111
6 = 110
1 = 001
1 = 001

$$247611_8 = 10100111110001001_2$$

Ejemplo

Convertir el número binario 1100111001 a número octal.

Respuesta

Se hacen grupos de tres dígitos de derecha a izquierda.
(1) (100) (111) (001)

Si es necesario, se añaden ceros a la izquierda del primer grupo.
(001) (100) (111) (001)
Ahora se recurre a la tabla de conversión
(001) = 1
(100) = 4
(111) = 7
(001) = 1
Por lo tanto

$$1100111001_2 = 1471_8$$

Si lo desea, también puede efectuar la conversión sin necesidad de la tabla
(001) = 0x4 + 0x2 + 1x1 = 1
(100) = 1x4 + 0x2 + 0x1 = 4
(111) = 1x4 + 1x2 + 1x1 = 7
(001) = 0x4 + 0x2 + 1x1 = 1

Sistema de numeración hexadecimal

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

El cardinal de este conjunto es 16, por lo tanto la base de este sistema de numeración es 16.

En la Tabla 5 se muestran las equivalencias entre los sistemas decimal, binario, octal y hexadecimal para los primeros quince números decimales, se observa por ejemplo que los números del 0 al 7 son idénticos en los sistemas decimal, octal y hexadecimal.

Tabla 5:
Equivalencias entre sistemas de numeración

Decimal	**Binario**	**Octal**	**Hexadecimal**
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Conversión de decimal a hexadecimal.

Para realizar esta conversión, se divide el número decimal sucesivamente entre 16 hasta lograr que el cociente sea cero.

Ejemplo

Convertir el número 537 al sistema hexadecimal.

Respuesta

$537 \div 16 = 33$ Resto 9
$33 \div 16 = 2$ Resto 1
$2 \div 16 = 0$ Resto 2
$537_{10} = 219_{16}$

Ejemplo

Convertir el número 23195 a hexadecimal

Respuesta

$23195 \div 16 = 1449$ Resto 11
$1449 \div 16 = 90$ Resto 9
$90 \div 16 = 5$ Resto 10
$5 \div 16 = 0$ Resto 5

Se convierten los restos superiores a 9 en sus respectivas letras, el número en hexadecimal es: 5A9B, por lo tanto $23195_{10} = 5A9B_{16}$

Conversión de Hexadecimal a Decimal.

Para hacer esta conversión, se multiplica cada dígito por potencias de 16 tomando en cuenta la posición que se ocupa.

La Tabla 6 muestra las primeras potencias de 16.

Tabla 6
Primeras potencias de 16

$16^0 = 1$	$16^1=16$	$16^2=256$	$16^3=4096$	$16^4=65536$	$16^5=1048576$

Ejemplo

Convertir el número 5A9B a decimal.

Respuesta

5 x 16^3 = 5 x 4096 = 20480
10 x 16^2 = 10 x 256 = 2560
9 x 16^1 = 9 x 16 = 144
11 x 16^0 = 11 x 1 = 11
Total 23195

$$5A9B_{16} = 23195_{10}$$

En cuanto a los sistemas no posicionales, existen evidencias que demuestran que en la antigüedad se usaban los dedos, cuerdas y general signos derivados del entorno. En cualquier caso, el hombre siempre ha tenido la necesidad de contar y de representar de alguna manera las cantidades.

Un sistema de numeración posicional que aún continúa vigente en nuestros días es el sistema romano, en tal sentido revisaremos sus fundamentos, ya que resulta importante por el hecho de que muchas cifras de carácter histórico se escriben bajo este sistema**.**

Sistema de numeración romano

En este sistema se utilizan letras del alfabeto. En la Tabla 7 se indican algunos de los principales caracteres. Entre las reglas para la expresión de cantidades con este sistema se tienen:

1. Ningún carácter debe estar repetido más de tres veces de manera consecutiva.
2. El carácter de menor valor situado a la izquierda de otro de mayor valor resta.
3. El carácter mayor valor situado a la derecha de otro de mayor valor suma.
4. Un carácter con una raya sobre el indica que pertenece a la clase de los millares, es decir se encuentra multiplicado por mil.
5. Para indicar millones se usan dos líneas horizontales sobre el carácter.

Tabla 7:
Números romanos y sus equivalentes decimales

I = 1	VI = 6	XX = 20	LXX = 70	CCC = 300
II = 2	VII = 7	XXX = 30	LXXX = 80	CD = 400
III = 3	VIII = 8	XL = 40	XC = 90	D = 500
IV = 4	IX = 9	L = 50	C = 100	M = 1000
V = 5	X = 10	LX = 60	CC = 200	$\overline{X}$D= 10500

Ejemplo

Expresar el número 11 como número romano

Respuesta

Se combina el símbolo correspondiente al número 10 con el símbolo correspondiente al número 1.

$$11 = XI$$

Ejemplo

Expresar el número 325 como número romano

Respuesta

Se combina el símbolo correspondiente al número 100, el cual se coloca tres veces seguidas, con el símbolo que corresponde al número 10 dos veces, más el símbolo que corresponde al número 5

$$325 = CCCXXV$$

Ejemplo

Expresar el número 2683 como número romano

Respuesta

La letra que representa al número mil se escribe dos veces, seiscientos se conforma con la letra D y la letra C, la cifra 83 se estructura a partir de la letra L que representa a 50 más tres letras X que representan cada una a 10 y tres unidades en romano representadas por la letra I.

$$2683 = MMDCLXXXIII$$

Ejemplo

Expresar el número decimal 145457 como número romano

Respuesta

Los miles, después del tres mil, se representan en números romanos mediante una línea horizontal sobre ellos. Por lo tanto ciento cuarenta y cinco mil es igual que escribir ciento cuarenta y cinco, pero con una línea en la parte superior. La letra C que representa a 100 a la izquierda de la letra D que representa quinientos hace el efecto de resta, es decir que la combinación CD en romano es cuatrocientos, el resto de la cifra ya se ha explicado en otros ejemplos.

$$145457 = \overline{CXLV}CDLVII$$

Ejemplo

Expresar el número decimal 53127435 en el sistema romano

Respuesta

Los millones se identifican con doble línea en la parte superior, por lo tanto 53 millones es igual que escribir 53 unidades con la diferencia de que las letras van bajo dos rayas. Ciento veintisiete mil es igual que escribir esa cifra en centenas con el agregado de una línea en la parte superior.

$$53127435 = \overline{\overline{LIII}}\overline{CXXVII}CDXXXV$$

Ejercicios

1. Convierta los siguientes números decimales a binarios
   a. 45
   b. 341
   c. 43716
   d. 300311
   e. 4256710
2. Convierta los siguientes números decimales al sistema octal y al sistema hexadecimal
   a. 35
   b. 578
   c. 10051
   d. 768993
   e. 99556341
3. Exprese los siguientes números decimales como números romanos
   a. 23
   b. 2367
   c. 4722113
   d. 12456789
   e. 673327890
4. 4. Lea las siguientes cifras
   a. $CCCXLII$
   b. $DXIX$
   c. $\overline{LII}DXXIV$
   d. $\overline{\overline{XXXV}}DCCCVI$
   e. $\overline{\overline{CCII}}\overline{DIII}$

Conjuntos numéricos

Se trata de conjuntos dotados de las operaciones binarias de adición y multiplicación y donde además se cumple que la multiplicación es distributiva respecto a la adición. En un conjunto numérico se consideran los números y sus propiedades de manera independiente de los símbolos usados.

Números naturales

Cuando aprendemos a leer de manera simultánea también aprendemos a contar, de pequeños generalmente recurrimos a los dedos de nuestra mano para aprender a dominar los diez primeros números. Dichos números son los números naturales.

Presentación intuitiva. Intuitivamente se puede afirmar que los números naturales son aquellos números que se utilizan para contar y son aquellos con los cuales el ser humano adquiere sus primeras ideas del concepto de número.

Notación de los números naturales. Este conjunto numérico se representa con la letra $\mathbb{N}$ y los primeros elementos son:

$$\mathbb{N} = \{1, 2,3,4,5, \dots\}$$

Axiomas de Peano. Es importante tener en cuenta los axiomas de Peano (1858-1932), cuando se estudian los números naturales puesto que éstos son una forma de definir a dicho conjunto. Si no se considera al número cero como número natural, los cinco axiomas son:

1. El 1 es un número natural.
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.
3. El 1 no es sucesor de ningún natural
4. Si hay dos números naturales m y n con el mismo sucesor, entonces m y n tienen el mismo valor.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto y si cualquier número natural y su sucesor también pertenecen a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.

Dentro de los números naturales existen algunos que se pueden escribir como el producto de dos números más pequeños; por ejemplo el 12 se puede escribir como 4 por 3; estos son los *números compuestos*. Los números que se pueden escribir solamente como el producto de 1 por el mismo número son los *números primos*. Ambos tipos de números naturales son complementarios, es decir que si un número natural no es un número compuesto entonces es un número primo y viceversa; aunque se suele considerar que el número uno no es ni primo ni compuesto.

Usted puede averiguar si un número es primo o es compuesto utilizando recursos disponible en la web, de igual forma, también puede recurrir a software matemático como

Geogebra o wxMaxima o a la hoja de cálculo. En este sentido, se explica una sencilla hoja de cálculo elaborada con MS Excel, en la cual se puede determinar si un número es primo o compuesto. El diseño de esta hoja se explica en el apéndice B, consiste en una macro que está ligada a un botón el cual al presionarlo luego de introducir el número buscado indica si se trata o no de un número primo y en caso negativo emite los divisores de ese número. En la Figura 7 se observa que en la celda A2 de la hoja de cálculo se introdujo el número 1071 y al presionar el botón "Verificar si es primo" se indica que no es primo y muestra que los divisores son: 1, 3, 7, 9, 17, 21, 51, 63, 119, 153, 357 y 1071.

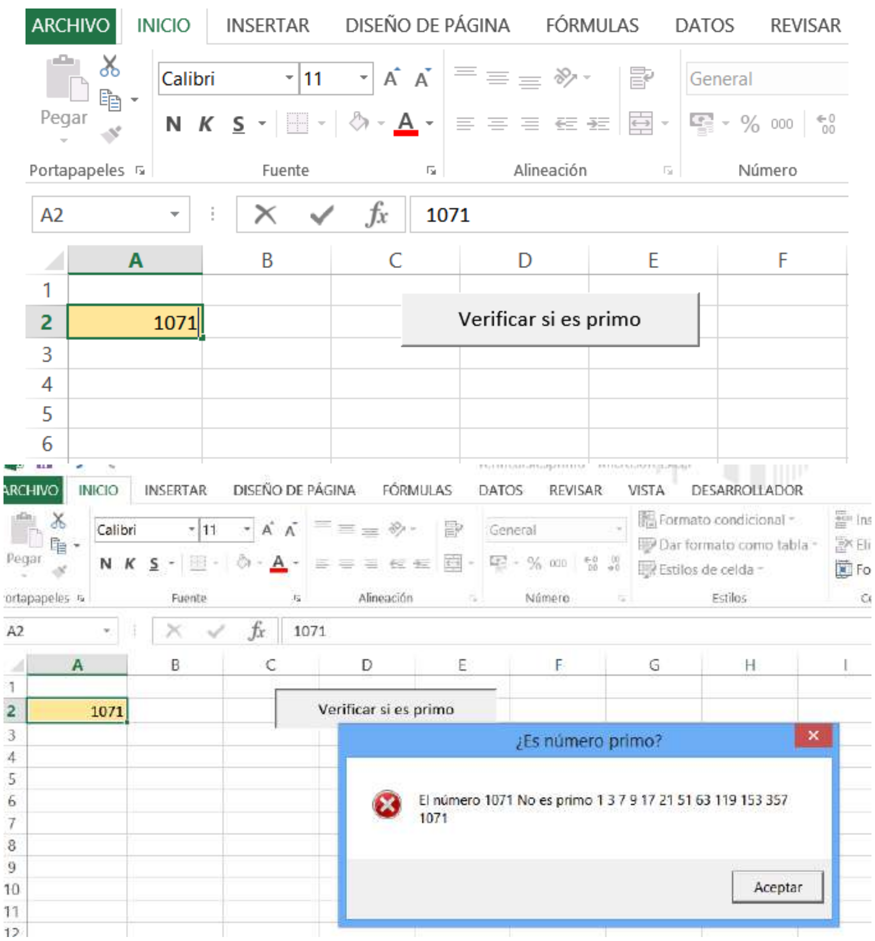


Figura 7: Hoja de cálculo de Microsoft Excel en la cual se puede verificar si un número es primo, en caso de no serlo, el sistema genera los números por los que éste es divisible.

Con Geogebra, para verificar si un número natural *x* es primo se debe escribir en la barra de entrada del programa la función *esprimo( )* y colocar el número dentro del paréntesis. El resultado se muestra en la vista algebraica donde se indicará True (Verdadero) o False (Falso) dependiendo si el número ingresado es primo o compuesto (Figura 8).

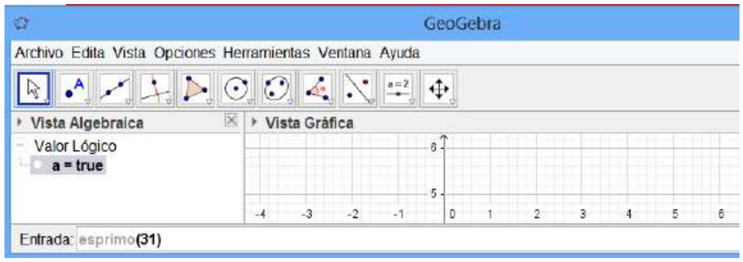


Figura 8: Función esprimo( ) de Geogebra, la cual genera un valor lógico tomando en cuenta si el número ingresado es o no primo.

Con wxMaxima, para ver si un número natural *x* es primo, una vez cargado el programa se debe pulsar la tecla *Enter*, cuando aparezca el cursor escribir la función *primep()*, dentro del paréntesis se ingresa el número. El software retorna True o False dependiendo si el número es primo o es compuesto.

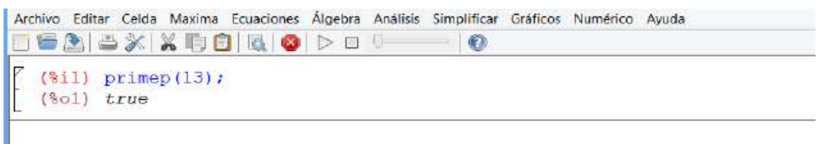


Figura 9: Función primep( ) con la que se determina si un número es o no primo con la ayuda de wxMaxima.

Teorema fundamental de la aritmética. Este teorema fue enunciado por primera vez por Euclides expresa que todo número natural mayor o igual que uno, puede ser expresado como el producto de números primos. Dicha expresión es única diferenciándose solo en el orden de los factores.

Los números primos son los elementos irreductibles en la matemática. En consecuencia se habla de la descomposición de un número natural *x* en sus factores primos. Es decir, los números naturales que al multiplicarlos dan como resultado ese número *x*.

Descomposición de un número natural en factores primos. Los primeros números naturales que son primos, es decir que son divisibles solamente entre sí mismos y entre el número 1 solamente, son:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,\ldots$$

Por lo tanto cualquier número compuesto puede ser descompuesto en sus factores primos.

El procedimiento es el siguiente:

Se divide el número entre el menor número primo, si el resultado es un número natural, ya se tiene el primer factor primo, en caso contrario se intenta con el siguiente número primo. Esta operación se continúa hasta obtener como resultado final a un número primo o al número 1.

En la actualidad, la presencia de herramientas de cómputo como la calculadora científica, las hojas de cálculo e inclusive el teléfono inteligente permiten efectuar las divisiones de prueba rápidamente, eso no sucedía hace uno años en los que era necesario aprenderse las denominadas reglas de la divisibilidad. Parte de estas reglas se indican a continuación, las cuales son buena práctica estudiarlas ya que ahorran gran cantidad de tiempo a la hora de la descomposición de una cifra.

Reglas de la divisibilidad. Se trata de reglas que permiten determinar con precisión si un número es o no divisible entre otro número. Un número es divisible entre otro cuando el resultado de la división es un número natural.

Divisibilidad por 2. Un número es divisible entre dos si termina en número par o en cero.

Ejemplo

Indicar si el número 654 es divisible entre dos.

Respuesta

654 termina en el número 4 el cual es un número par, en consecuencia dicho número es divisible entre dos.

Ejemplo

Indicar si el número 1750 es divisible entre dos.

Respuesta

1750 termina en el número 0, según el criterio de divisibilidad para el número dos se concluye que 1750 es divisible entre dos.

Divisibilidad por 3. Un número es divisible entre tres si la suma de sus cifras es un múltiplo de tres.

Ejemplo

Indicar si el número 27141 es divisible entre 3.

Respuesta

Se suman cada uno de los números que conforman la cifra:

$$2+7+1+4+1=15$$

15 es múltiplo de 3, por lo tanto el número 27141 es divisible entre 3.

Recuerde que un número natural z es múltiplo de un número natural x cuando $xy = z$, donde $y \in \mathbb{N}$. Cuando como parte de nuestra formación aprendimos las tablas de multiplicar, nos aprendimos los múltiplos del número dos, del número tres, del número cuatro, entre otros.

Ejemplo

Indicar si el número 4678231 es divisible entre 3.

Respuesta

Se suma cada uno de los números que conforman la cifra:

$$4 + 6 + 7 + 8 + 2 + 3 + 1 = 31$$

31 no es múltiplo de 3, no existe ningún número natural que multiplicado por 3 produzca como resultado 31. Se concluye por lo tanto que 4678231 no es divisible entre 3.

Divisibilidad por 5. Un número es divisible entre cinco si termina en cero o en cinco.

Ejemplo

Indicar si el número 3460 es divisible entre cinco.

Respuesta

3460 termina en el número cero, por lo tanto es divisible entre dos y también es divisible entre 5.

Divisibilidad por 7. Un número es divisible entre siete cuando la diferencia entre el número conformado por todas las cifras sin tomar en cuenta las unidades y el doble de las cifras de las unidades es múltiplo de siete o es igual a cero.

Ejemplo

Indicar si el número 1001 es múltiplo de 7.

Respuesta

$$100 - 2(1) = 98$$

98 es múltiplo de 7 por lo tanto 1001 es divisible entre 7

Ejemplo

Indicar si el número 1309 es múltiplo de 7.

Respuesta

$$130 - 2(9) = 112$$

Se aplica nuevamente la regla:

$$11 - 2(2) = 7$$
1309 es divisible entre 7

Divisibilidad por 11. Un número es divisible por once, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares y los lugares impares es cero o múltiplo de once.

Ejemplo

Indicar si el número 121 es divisible entre 11.

Respuesta

Cifras que ocupan los lugares impares: $1 + 1 = 2$
Cifras que ocupan los lugares pares: 2
Diferencia: $2 - 2 = 0$
121 es divisible entre 11

Ejemplo

Indicar si el número 2431 es divisible entre 11.

Respuesta

Cifras que ocupan los lugares impares: $2 + 3 = 5$
Cifras que ocupan los lugares pares: $4 + 1 = 5$
Diferencia: $5 - 5 = 0$
2431 es divisible entre 11

Ejemplo

Descomponer el número 124 en sus factores primos.

Respuesta

a. Se divide 124 entre 2; el resultado es 62.
b. Se divide 62 entre 2, el resultado es 31.
c. Se observa que 31 es un número primo.
d. Concluye la descomposición.

$$124 = 2x2x31$$

Esta secuencia de operaciones generalmente se resume de la siguiente manera

124	2
62	2
31	31
1	

Ejemplo

Descomponer el 3426 en sus factores primos.

Respuesta

a. Se divide 3426 entre 2; el resultado es 1713
b. Se divide 1713 entre 3; el resultado es 571
c. Si se intenta dividir al 571 entre los números menores que el siempre se obtiene un número que no es natural, en consecuencia el 571 es primo.

3426	2
1713	3
571	571
1	

$$3426 = 2x3x571$$

Ejemplo

Descomponer el número 8954 en sus factores primos.

Respuesta

8954	2
4477	11
407	11
37	37
1	

$$8954 = 2x11^2x37$$

Ejemplo

Descomponga el número 3572 en factores primos, con la ayuda de Geogebra.

Respuesta

Una vez cargado Geogebra, en la barra de entrada escribir la función *factores( )*, dentro del paréntesis escribir 3572 y pulsar la tecla *Enter*. El software genera la respuesta como una lista en la vista algebraica.

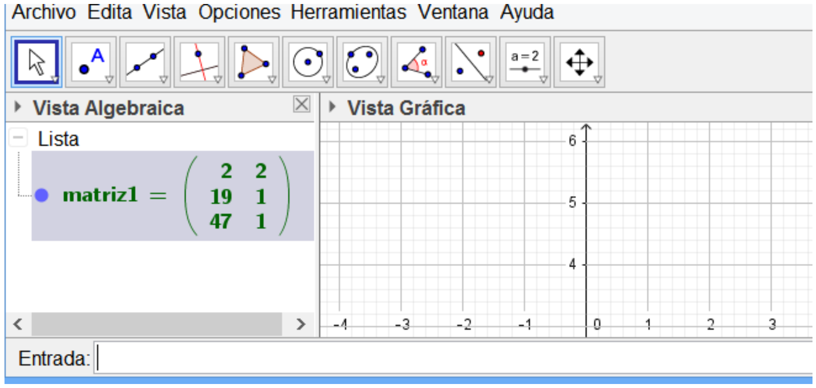


Figura 10: Factores primos del número 3572 calculados con Geogebra y generados como una matriz donde la primera columna representa a los factores y la segunda columna a las potencias de esos factores.

También se puede utilizar la función *factoresprimos( )*. En ese caso, la respuesta se genera como una lista en la vista algebraica, aspecto que muestra en la Figura 11.

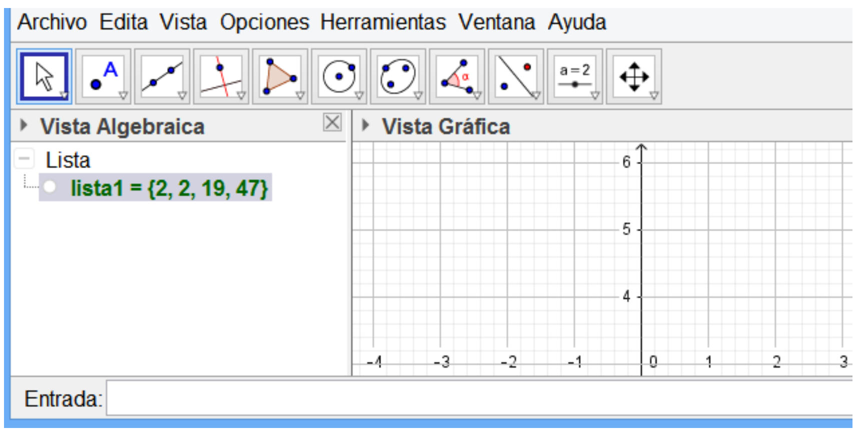


Figura 11: Factores primos del número 3572 calculados con la función factoresprimos de Geogebra y presentados como una lista.

Ejemplo

Mediante el uso de wxMaxima, descomponer el número 812544 en sus factores primos.

Respuesta

Una vez cargado wxMaxima, presionar la tecla *Enter* para permitir el ingreso de información. Escribir *factor(812544)* y pulsar simultáneamente las teclas *shift* + *Enter*. El programa genera la descomposición tal como se muestra en la Figura 12.

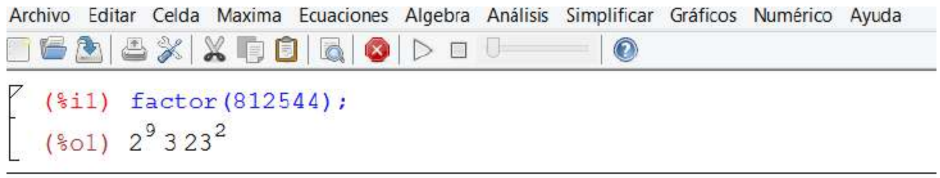


Figura 12: Descomposición del número 812544 en sus factores primos con la ayuda de wxMaxima.

Representación en la recta. Cada número natural se corresponde con un punto sobre la recta. En concordancia con los axiomas de Peano, los puntos sobre la recta mantienen entre sí una separación de una unidad, comienzan en 1 y crecen de manera indefinida hacia la derecha. En la Figura 13 se representan los primeros 5 números naturales.

Figura 13: Primeros cinco números naturales ubicados sobre la recta.

Para efectos de representación de un conjunto conformado por números naturales sobre la recta, es importante tomar en cuenta la escala. Es decir se debe procurar mantener la misma separación entre números naturales consecutivos.

Ejemplo

Representar en una recta al siguiente conjunto

$$A = \{10, 15, 30, 44, 67\}$$

Respuesta

Se trata de un conjunto conformado por números naturales. Para hacer la representación sobre la recta, lo primero que se debe revisar es el orden de los elementos, estos deben estar ordenados de forma creciente. Para el caso que nos ocupa, los números están ordenados. Luego hay que tomar en consideración que se está trabajando sobre un papel que tiene unos límites físicos dentro del cual se va a representar la recta con los puntos. El espacio de trabajo para una hoja milimetrada es de unos 15 centímetros para la orientación vertical y de uno 20 centímetros si se opta por la orientación horizontal. De igual forma es conveniente que el número más pequeño sea el número cero, aunque esto no debe ser una limitación seria.

$$Número\ Menor\ (Nm) = 10$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 67$$
$$Amplitud = NM - Nm = 67 - 10 = 57$$

Para el espacio en el papel, se divide la amplitud entre el espacio disponible, 15 cm para la orientación vertical y 20 cm para la orientación horizontal.

$$\frac{57}{15} = 3.8$$

Se puede redondear esta última cifra al entero inmediato superior que es 4 o para mayor comodidad a 5 que es un divisor de 10 y permite ubicaciones más precisas sobre el papel milimetrado.

La escala por lo tanto es 1:5 lo que significa que una unidad en el papel representa a 5 unidades en la realidad.

Una vez decidida la escala se traza la recta y se ubica cada elemento del conjunto identificado por una letra y un punto tal como se observa en la Figura 14.

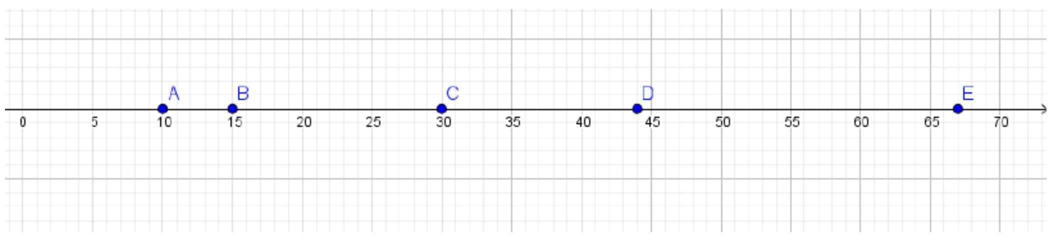


Figura 14: Representación sobre una recta de los elementos que conforman el conjunto numérico A. Es importante en los cálculos manuales considerar el efecto de la escala sobre el tamaño de la recta y la representación de los puntos.

Ejemplo

Representar en una recta el conjunto $B = \{55, 128, 230, 320, 445, 510\}$

Respuesta

Verificar que los elementos del conjunto estén ordenados. En caso contrario hay que ordenarlos antes del siguiente paso.

$$Número\ Menor\ (Nm) = 55$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 510$$
$$Amplitud = NM - Nm = 510 - 55 = 455$$

Se selecciona divide la amplitud entre 15 que el espacio disponible en el papel para una orientación vertical.

$$\frac{455}{15} = 30.33$$

El resultado de la división se redondea al entero inmediato que es 31, sin embargo es muy incómodo trabajar con esa escala, por lo tanto lo más recomendable es utilizar 25 o 40. Como 25 está más cercano de 30.33 se selecciona ese valor.

La escala es 1:25 lo que significa que una unidad en el papel equivale a 25 unidades de la realidad.

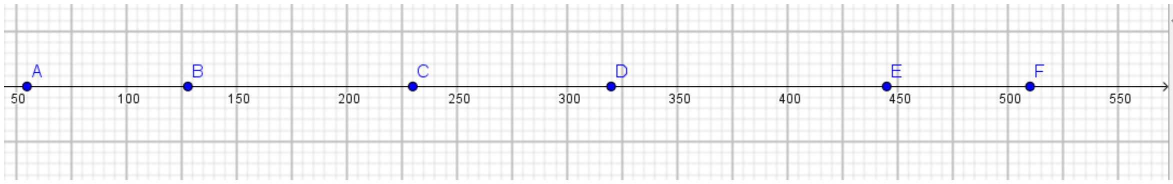


Figura 15: Representación gráfica del conjunto B. La figura está reducida, cada cuadrícula en negritas tiene un centímetro de lado. Cada centímetro en el papel equivale a 25 unidades.

Ejemplo

Utilice Geogebra para representar en una recta el conjunto

$$C = \{760, 920, 1250, 1400, 1580\}$$

Respuesta

Geogebra es muy útil para hacer representaciones gráficas. En este caso, una vez cargado el software, seleccionar la opción vista gráfica. Ir a la barra de entrada ubicada en la parte inferior de la ventana, si no logra visualizarla, activarla en el menú vista – Barra de entrada. Introducir cada elemento del conjunto como si se tratase de puntos: $(760{,}0)$ presionar *Enter*; $(920{,}0)$ presionar *Enter* y así sucesivamente para cada elemento o número que conforma al conjunto C. Cada punto es representado como un círculo relleno en el eje x de un sistema de coordenadas cartesianas. Para ver los puntos ubicar el cursor en un lugar vacío de la vista gráfica y alejar la vista con la rueda central hasta que aparezcan sobre la pantalla. La representación se muestra en la Figura 16.

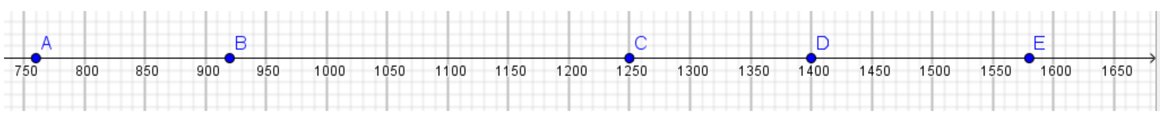


Figura 16: Representación gráfica del conjunto C. Una vez ingresados los puntos en Geogebra se debe hacer zoom hasta lograr ver la totalidad de ellos.

Orden en los números naturales. El hecho de representar sobre una recta a un conjunto de números naturales implica el uso de la idea de orden. De hecho para hacer dicha representación se requiere que los elementos se encuentren ordenados en forma creciente. En el mismo sentido, los axiomas de Peano indican que todo número natural a partir del 1 tiene un único sucesor, que por supuesto es mayor que su antecesor.

Si se tienen dos números naturales a y b, al compararlos existen solamente tres posibilidades

$$a > b$$
$$a < b$$
$$a = b$$

Esta expresión constituye la denominada ley de tricotomía. El signo $>$ se lee mayor que, el signo $<$ se lee menor que y el signo $=$ se lee igual que.

Si $a > b$ entonces a está a la derecha de b en la recta (Figura 17).

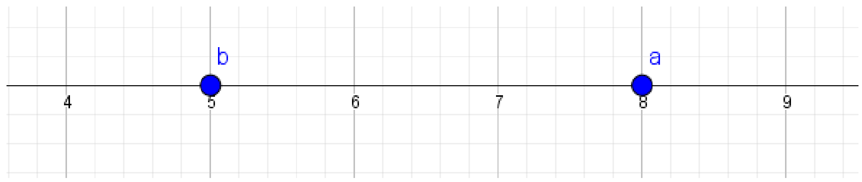


Figura 17: En caso de que el número a sea mayor que el número b, a siempre va a estar representado a la derecha de b.

Si $a < b$ entonces a está a la izquierda de b en la recta (Figura 18).

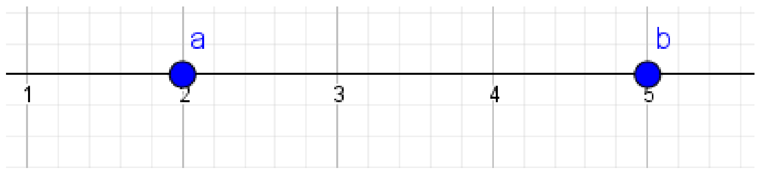


Figura 18: En el caso de que el número a sea menor que el número b, a siempre está a la izquierda de b, es decir aparece representado de primero..

Si $a = b$ entonces a y b ocupan el mismo lugar en la recta, se trata del mismo punto (Figura 19).

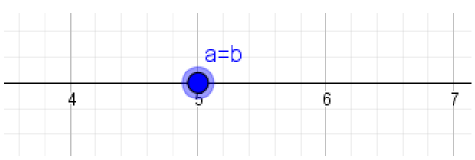


Figura 19: Dos números naturales iguales, en realidad es un solo número natural, en este caso a=b=5.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Un divisor d de un número natural n es otro número natural tal que produce un residuo igual a cero al dividir n entre d; es decir la división $n \div d$ es un número natural. Por ejemplo, 2 es divisor de 4 ya que $4 \div 2 = 2$; 3 es un divisor de 18 ya que $18 \div 3 = 6$.

Un número compuesto tiene varios divisores, un número primo tiene solamente dos divisores: el mismo número y la unidad. Cuando se comparan los divisores de dos números compuestos, existe la posibilidad de que uno o más divisores sean comunes, el mayor de esos divisores comunes es lo que se conoce como máximo común divisor (MCD). Cuando se comparan los divisores de dos números primos, el divisor común mayor es el número uno.

Mediante la aplicación de las reglas de la divisibilidad se obtiene la lista de los divisores de un número, aunque en la actualidad es preferible utilizar software, por ejemplo el comando para hacer esa operación con Geogebra es *ListaDivisores(n)* el cual se escribe en la barra de entrada de ese programa; con wxMaxima el comando es *divisors(n)*. En la Figura

20 se muestra la salida generada por Geogebra ante la petición de la lista de divisores de 70, 500 y 1071 respectivamente. De igual manera, en la Figura 21 se muestra la salida generada por wxMaxima para los divisores de 90, 162 y 2534 respectivamente.

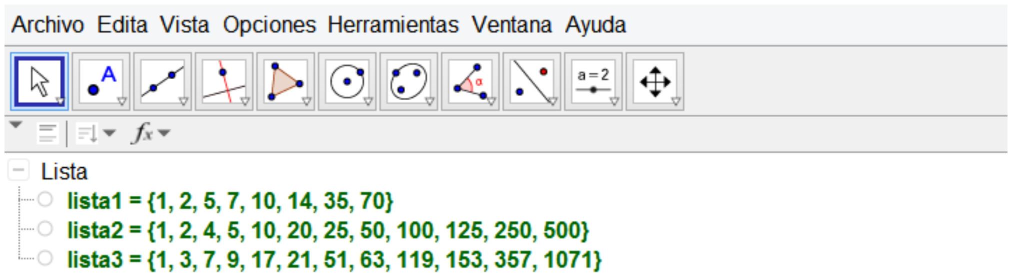


Figura 20: Lista de divisores generada con Geogebra con el comando ListaDivisores( ).. La lista 1 son los divisores de 70, la lista 2 son los divisores de 500 y la lista 3 son los divisores de 1071.

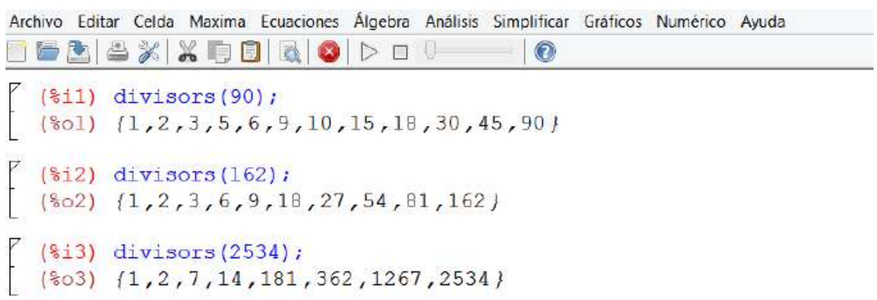


Figura 21: Divisores de 90, 162 y 2534 generados con wxMaxima a través del comando divisors( ).

Para calcular el MCD de dos o más números se descompone cada número en sus factores primos, se seleccionan los factores primos comunes solamente elevados a la menor potencia y finalmente se multiplican esos factores comunes.

Ejemplo

Calcular el MCD(70, 500)

Respuesta

Se está pidiendo el máximo común divisor de los números 70 y 500. De forma manual, se debe comenzar por el cálculo de los factores primos.

70	2
35	5
7	7
1	

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$$70 = 2x5x7 \qquad 500 = 2^2x5^3$$

$$MCD(70, 500) = 2x5 = 10$$

Ejemplo

Calcular con la ayuda de software el MCD(90, 162)

Respuesta

a. Con el uso de Geogebra.
Una vez iniciado el programa, escribir en la barra de entrada, ubicada en la parte inferior de la ventana principal: *mcd(90,162)* pulsar la tecla *Enter*. Observar la respuesta en la ventana algebraica (Figura 22).

Figura 22: MCD(90, 162) con Geogebra.

b. Con el uso de wxMaxima
Iniciar el programa, pulsar la tecla *Enter* para poder ingresar información. Escribir *gcd(90,162)* y pulsar *Shift+Enter*. La respuesta se observa en la Figura 23.

Figura 23: Máximo común divisor (gcd) de los números 90 y 162 con la ayuda de wxMaxima.

En el mismo sentido, un múltiplo *m* de un número natural *n* es el resultado que se obtiene al multiplicar *n* por un número natural *p*; es decir $n.p = m$.

Cuando se comparan los múltiplos de dos o más números naturales, existe la posibilidad de que existan múltiplos comunes, la más pequeña de esas coincidencias es lo que se conoce como mínimo común múltiplo.

Para calcular el mcm de dos o más números naturales se descompone cada número en sus factores primos, se seleccionan los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor potencia.

Ejemplo

Calcular el mínimo común múltiplo entre los números 764 y 1246

Respuesta

Se descompone cada número en sus factores primos

764	2
382	2
191	191
1	

1246	2
623	7
89	89
1	

$764 = 2^2 x 191$ $\quad$ $1246 = 2x7x89$

Se seleccionan los factores comunes y no comunes elevados a su mayor potencia. $mcm(764, 1246) = 2^2 x7x89x191 = 475972.$

$$mcm(764, 1246) = 475972$$

Con Geogebra, escribir en la barra de entrada *mcm(764,1246)* y pulsar la tecla *Enter*. La Figura 24 se corresponde con la respuesta emitida por el software.

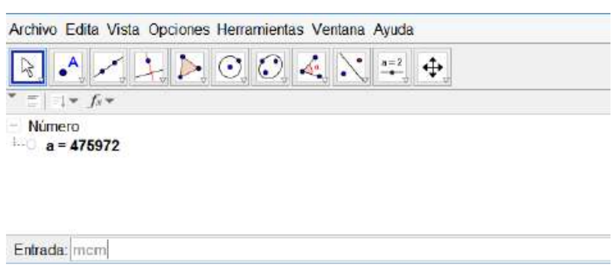


Figura 24: Mínimo común múltiplo de los números 764 y 1246 con el uso de Geogebra.

Con wxMaxima, pulsar la tecla *Enter* y escribir *lcm(764,1246)* y luego pul*sar Shift+Enter*. En la Figura 25 se observa la respuesta dada por el software.

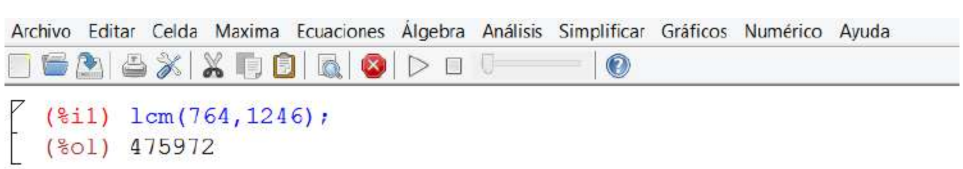


Figura 25: Mínimo común múltiplo entre los números 764 y 1246, con la ayuda de wxMaxima.

Operaciones con los números naturales. Las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división se realizan con los números naturales. Si centramos la atención en la suma o adición y en la multiplicación o producto se tienen las siguientes propiedades.

Adición.

1. Propiedad conmutativa.
   Significa que se los sumandos se pueden conmutar, es decir intercambiar de posición sin que el resultado de la suma se altere. Por ejemplo:
   $$2 + 3 = 5$$
   Es igual que se escriba:
   $$3 + 2 = 5$$

2. Propiedad asociativa.
   Si se tienen más de dos sumandos, se pueden efectuar sumas parciales entre estos. El resultado de la suma total no se altera. Por ejemplo:
   $$2 + 3 + 4 = 9$$
   Se puede plantear así:
   $$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$
   o también:
   $$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$

   En ambos casos se obtiene el mismo resultado para la suma. Recuerde que los paréntesis unen a los elementos, por lo tanto su presencia conduce a la realización de la operación contenida en ellos para poder eliminarlos.
   Con su calculadora usted puede practicar el uso de la propiedad asociativa y el uso de los paréntesis, los cuales generalmente están ubicados hacia el centro del teclado de las calculadoras de la marca Casio.

3. Presencia del elemento neutro.
   El elemento neutro para la suma es el número cero puesto que la presencia de éste en una operación de suma, no incide en el resultado final.
   Por ejemplo:
   $$3 + 4 = 7$$
   Podemos agregar el cero como sumando:
   $$3 + 4 + 0 = 7$$
   Y el resultado total de la suma continúa siendo el mismo.

4. Clausura.
   Esta propiedad señala que todas las operaciones de adición entre los números naturales tienen una solución.

Multiplicación.

1. Propiedad conmutativa.

Se tienen dos o más números naturales a los cuales se les está multiplicando, se obtiene el mismo resultado independientemente si se cambian las posiciones de los factores. Cuando hablamos de factor nos referimos a los números involucrados en la multiplicación.

$$2x3 = 6$$

Esa operación da exactamente igual si intercambiamos la posición de los factores.

$$3x2 = 6$$

Se debe prestar la atención necesaria cuando se multiplica, ya que generalmente cuando los números (factores) son colocados entre paréntesis, la equis que indica producto, se suprime. Por ejemplo.

$$(2)(3) = 6$$

Con una calculadora científica, usted puede hacer la operación, usando la tecla  así

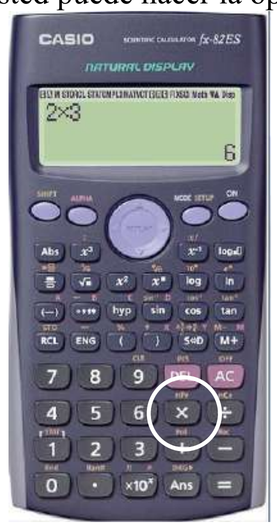


Figura 26: Producto de dos factores con la ayuda de la calculadora.

De igual manera, si usa paréntesis sin ningún símbolo entre ellos, la calculadora interpretará que se trata de un producto.

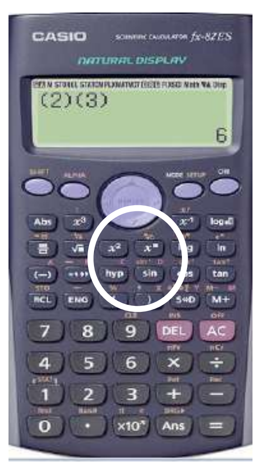


Figura 27: Multiplicación de factores usando paréntesis.

2. Propiedad asociativa.
   En un producto donde existan más de dos factores, se pueden efectuar operaciones parciales entre éstos sin que el resultado final se altere. Por ejemplo:

$$3x4x5 = 60$$

   Dicha operación se puede plantear también así:

$$(3x4)x5$$

   Lo que significa que primero se debe efectuar el producto involucrado dentro del paréntesis y luego ese resultado multiplicarlo por el número 5. Situación que conduce a:

$$12x5 = 60$$

   Igual resultado se produce si se plantea asi:

$$3x(4x5)$$

   Ya que se tendría

$$3x20 = 60$$

   Por eso se acostumbre escribir esta propiedad, para el caso del ejemplo, así:

$$(3x4)x5 = 3x(4x5)$$

   En los casos de productos generalmente se sustituye a la equis por un punto, e inclusive puede que no exista ningún símbolo entre los factores. Por ejemplo los productos ya explicados pueden escribirse así:

$$(3x4)5 = 60$$
$$3(4x5) = 60$$

3. Elemento neutro.
   Para el caso del producto, si se multiplica por el número uno, el resultado es el mismo número. Se dice entonces que el número uno es el elemento neutro para la multiplicación.

$$(3)(1) = 3$$
$$(14)(1) = 14$$

   Observe que el resultado en los productos efectuados es siempre el número diferente de uno involucrado en el producto. También observe que se ha preferido encerrar a por lo menos uno de los factores entre paréntesis.
4. Elemento absorbente.
   En el producto existe un factor (elemento) que ocasiona que el resultado total se convierta en cero. Si multiplicamos cualquier cantidad por el número cero, el resultado final es cero.

$$(1435)(0) = 0$$

5. Propiedad distributiva respecto a la adición.
   Se trata de una propiedad que involucra también a la suma. Cuando se tienen dos factores y uno de ellos contiene a una suma, se obtiene el mismo resultado si se distribuye el factor con cada uno de los sumandos. Por ejemplo:

$$4(5 + 7)$$

   Esta operación se puede resolver así:

$$4(12) = 48$$

Pero también se puede aplicar la propiedad distributiva.

$$4(5+7) = 4(5) + 4(7) = 20 + 28 = 48$$

6. Clausura.
   Todas las operaciones de producto entre números naturales conducen a un resultado.

Ejercicios

1. Representar en una recta los siguientes conjuntos
   a. $A = \{2, 5, 11, 19\}$
   b. $B = \{20, 60, 125, 198\}$
   c. $F = \{120, 340, 560, 780, 1100, 2200\}$
   d. $G = \{1500, 4200, 5600, 10400, 12300\}$
2. Descomponer los números siguientes en factores primos: 3342, 569, 1268, 45384. Utilizar para ello en primer lugar las reglas de divisibilidad y luego Geogebra o wxMaxima.
3. Calcular el Máximo común divisor y el mínimo común múltiplo: 600 y 210.
4. Calcular MCD(1345, 12356) con wxMaxima
5. Calcular mcm(2356, 7568) con Geogebra.
6. Hacer una lista de los divisores de 10458
7. Indicar cuál de los siguientes números es primo:
   a. 37
   b. 63
   c. 121
   d. 1117
   e. 45631.
8. Aplicar la propiedad distributiva.
   a. $4(6+7)$
   b. $(10+12)(20+3)$
   c. $(3+6)(4+5)$
   d. $(100+3)(5)$
9. Utilizar software para descomponer los siguientes números en factores primos
   a. 4567823
   b. 34567725
   c. 2330011146
   d. 12345553321

Números Enteros

Al efectuar la resta de números naturales, puede aparecer una situación como esta: $5-9$, donde el resultado es igual a -4 el cual no es un número natural. Esta fue una de las razones por las cuales fue necesaria la creación del conjunto de los números enteros.

Presentación intuitiva. Intuitivamente se puede entender un número entero como aquel que se encuentra completo, es decir es una cifra que no contiene partes decimales. En este mismo sentido, se puede asumir que los números Enteros son aquellos usados para hacer referencia a entidades que forma una estructura íntegra, por ejemplo: una casa, treinta vehículos, quinientos cuarenta y un árboles, una deuda de mil cuatrocientos bolívares, una pérdida de tres lápices, entre otros casos comunes de la vida diaria.

El conjunto de los números enteros por lo tanto es aquel conjunto conformado por los números naturales con el signo negativo, más el número cero, más los números naturales que ya hemos estudiado.

En la vida diaria se utilizan los números enteros cuando por ejemplo gastamos más de lo que ganamos, en ese caso decimos que nos estamos endeudando; dicha deuda se representa con un número negativo. También se utilizan los enteros para indicar que algo se encuentra por debajo del nivel de referencia, por ejemplo, cuando afirmamos que un alumno tiene un rendimiento negativo estamos diciendo que dicho alumno está obteniendo calificaciones inferiores al promedio del curso o peor aún, inferiores a la nota mínima aprobatoria.

Notación de los números enteros. Se define simbólicamente así:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Donde el conjunto $\mathbb{Z}^-$ está conformando por todos los números naturales con signo negativo.

$$\mathbb{Z}^- = \{\ldots - 4, -3 - 2, -1\}$$

$\mathbb{Z}^+$ está conformado por todos los números naturales con signo positivo, es decir el conjunto numérico ya estudiado y que hemos denominado conjunto de los números naturales.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Aparece el número cero como elemento del conjunto de los números enteros. Aunque algunos autores prefieren considerarlo como número natural.

Representación en la recta. La representación sobre la recta de este conjunto numérico se hace tal como se indica en la Figura 28.

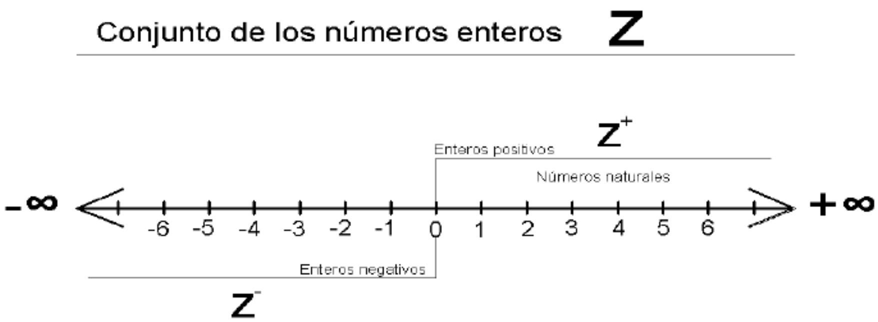


Figura 28: Representación en la recta del conjunto de los números enteros. Hacia la izquierda se tiene a menos infinitivo y hacia la derecha más infinito, para indicar que este conjunto numérico se extiende de manera indefinida hacia ambos lados de la recta.

En el caso de representar varios números enteros sobre la recta se debe tener el cuidado de seleccionar la escala adecuada de tal forma que se puedan ubicar todos los números en el espacio disponible en el papel.

Ejemplo

Representar en una recta al conjunto $A = \{-5, -3, -1, 2, 6\}$

Respuesta

Se verifica que los elementos del conjunto se encuentren ordenados de forma creciente.

$$Número\ Menor\ (Nm) = -5$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 6$$
$$Amplitud = NM - Nm = 6 - (-5) = 11$$

En este caso la escala es 1:1 puesto que se dispone de unos 15 centímetros en una hoja de papel milimetrado para la orientación vertical. La gráfica del conjunto se muestra en la Figura 29.

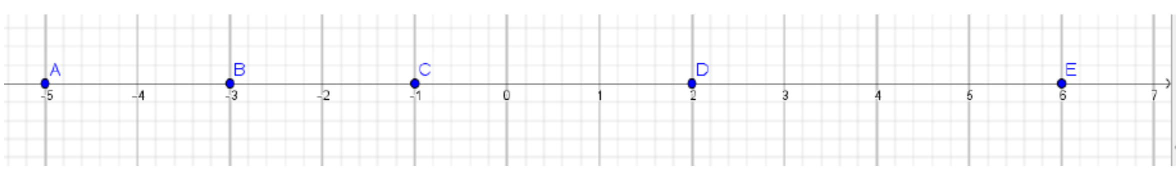


Figura 29: Representación en una recta de los elementos del conjunto A conformado por números enteros. En este caso la escala es 1 a 1.

Ejemplo

Representar en una recta al conjunto $B = \{-250, -40, -10, 30,\ 120, 400\}$

Respuesta

El primer paso consiste en ordenar los elementos del conjunto. En este caso los elementos se encuentran ordenados de manera creciente.

El segundo paso es calcular la amplitud de los valores numéricos

$$Número\ Menor\ (Nm) = -250$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 400$$
$$Amplitud = NM - Nm = 400 - (-250) = 650$$

El tercer paso es calcular la escala en función del espacio que se disponga en el papel. Para una orientación vertical de la recta se dispone de 15 cm.

$$\frac{650}{15} = 43.33$$

Se puede optar por la escala 1:40 o por la escala 1:50. Con la primera se va a requerir más de 15 cm para hacer la representación, con la segunda se va a necesitar menos de 15 cm. La Figura 30 muestra al conjunto B con la representación en escala 1:50.

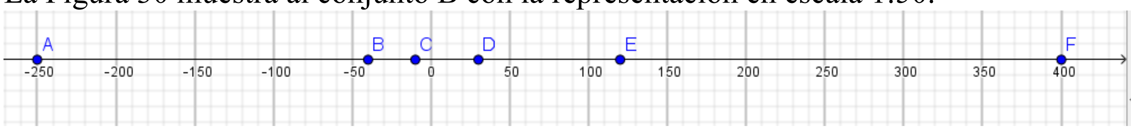


Figura 30: Representación sobre la recta de los elementos que conforman al conjunto B. La escala es 1:50.

Ejemplo

Representar en una recta al conjunto $C = \{-4100, -3550, -2200, -1400, -1000\}$

Respuesta

Una vez verificado que los elementos del conjunto están ordenados, se calcula la amplitud de los valores numéricos.

$$Número\ Menor\ (Nm) = -4100$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = -1000$$
$$Amplitud = NM - Nm = -4100 - (-1000) = -3100$$

Se considera una amplitud positiva: $Amplitud = 3100$

Se divide entre 20 con el fin de trazar la recta sobre el papel dispuesto en horizontal.

$$\frac{3100}{20} = 155$$

Se puede optar por la escala 1:150 o 1: 200. Para tener más holgura en la representación se selecciona la segunda opción. En la Figura 31 se muestra la recta con los elementos del conjunto C.

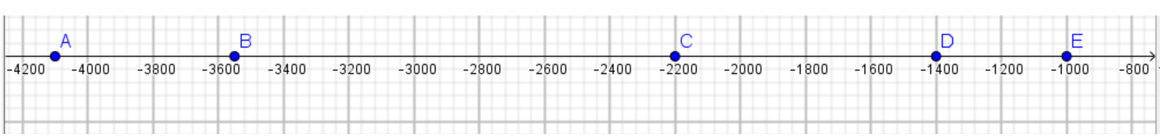


Figura 31: Representación gráfica del conjunto C. La escala es 1:200

Orden en los números enteros. Las relaciones de orden implican que los números enteros que están más hacia la izquierda son menores que aquellos que se encuentran más hacia la derecha de la recta. Esto también puede entenderse de la siguiente manera: dados dos números positivos, el mayor es el que está más alejado del número cero; dados dos números negativos, el mayor es el que está más cercano del cero; si los dos números son uno negativo y otro positivo, el mayor es el positivo.

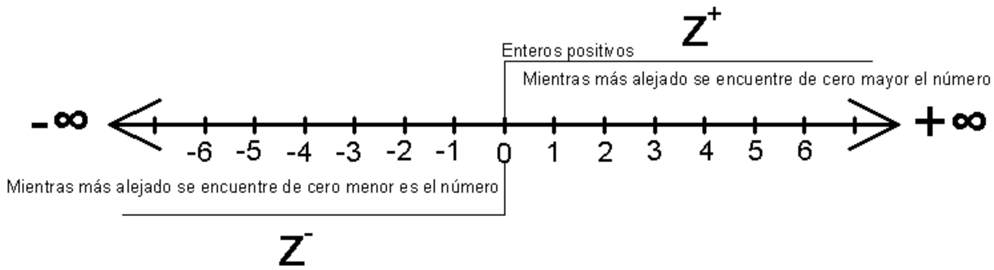


Figura 32: Los números enteros positivos están ubicados a la derecha del número cero, los números enteros negativos están ubicados a la izquierda del número cero.

Por ejemplo si se comparan los números -6 y -4, como -6 está más alejado del número cero entonces es menor que el número -4, el cual está más cerca.

En lenguaje simbólico:

$$-6 < -4$$

Ahora bien, la proposición puede ser leída al contrario, es decir desde el punto de vista del número -4. En ese caso -4 ésta más cerca de cero, por lo tanto es mayor que -6:

$$-4 > -6$$

Si se comparan los números 1 y 5, como ambos son positivos, el mayor es el que está más alejado del cero y el menor es el que está más cercano al cero.

$$1 < 5$$

O también

$$5 > 1$$

Quizás se entienda mejor si considera que los símbolos **<** y **>** constituyen puntos de vista del observador. Por ejemplo: Antonio tiene 20 años y Pedro tiene 55 años. Desde el punto de vista de Antonio, en primera persona dirá:

Yo soy menor que Pedro.

Utilizando lenguaje simbólico: $Antonio < Pedro$

Por su parte desde el punto de vista de Pedro, en primera persona dirá:

Yo soy mayor que Antonio.

Utilizando lenguaje simbólico: $Pedro > Antonio$

Operaciones con los números enteros. El conjunto de los números enteros, tiene las siguientes propiedades aritméticas (donde se encuentran involucradas las operaciones de suma y multiplicación), las cuales por ser de carácter genérico utilizan letras en vez de números. Cada una de esas letras se refiere a un número entero.

a. $(a + b) \wedge (a.b) \in \mathbb{Z}$

La suma algebraica y el producto pertenecen al conjunto Z. Esto significa que si se suman, se restan o se multiplican dos números enteros, el resultado es otro número Entero.

b. $\forall(a,b) \in \mathbb{Z} \rightarrow a+b=b+a \wedge a.b=b.a$

Dados dos números enteros cualquiera, el orden de los sumandos no altera el resultado final e igualmente si los multiplicamos, no importa el orden en que se encuentren los factores, siempre se va a obtener el mismo producto. Se trata de la propiedad conmutativa. Se puede cambiar el orden de los sumandos o de los factores, sin alterar el resultado.

c. $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} \rightarrow a+(b+c)=(a+b)+c \wedge a(b.c)=(a.b)c$

Si se tienen tres números enteros, es posible sumar dos de ellos y luego ese resultado sumarlo con el tercero, no importa el par de números que se seleccionen para la suma inicial, siempre se va a obtener el mismo resultado. De igual manera es posible realizar multiplicaciones parciales las cuales conducirán al mismo resultado independientemente de los factores que se seleccionen para los primeros productos. Se trata de la propiedad asociativa, la cual aplica para tres o más elementos y que se puede resumir indicando que es posible la realización de operaciones intermedias (respetando signos) entre los números.

d. $\exists\ 0,1 / \forall\ a \in Z \rightarrow a+0=a \wedge a.1=a$

Se trata de la propiedad que indica la existencia del elemento neutro. Si el número cero se le suma a cualquier entero se obtiene el mismo número; si el número uno se multiplica con cualquier número se obtiene el mismo número.

e. $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} \rightarrow a(b+c)=a.b+ac$

Dados tres números enteros cualquiera, la suma parcial de dos de ellos multiplicada con un tercero es igual a multiplicar ese tercer número por cada uno de los sumandos y luego efectuar las dos sumas resultantes. Se trata de la propiedad distributiva.

f. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} \,/\, (a)+(-a)=0$

Todo número entero tiene otro número con el signo invertido, de tal manera que al sumarlos el resultado es cero. Se trata de la propiedad conocida como inverso aditivo.

Regla de los signos. Como los números enteros involucran el uso de signos positivos y signos negativos, es común que se tengan que efectuar productos con esos signos, las reglas que rigen esos productos son:

Tabla 8

Regla de los signos para el producto de enteros.

+	x	+	=	+
-	x	-	=	+
+	x	-	=	-
-	x	+	=	-

Símbolos de agrupación. Cuando se trabaja en el conjunto de los números *Entero*s, a menudo se requiere del uso de contenedores para ubicar dentro de ellos operaciones numéricas. Dichos contenedores son los paréntesis, los corchetes y las llaves.

El orden de precedencia, es el indicado, lo que significa que ante la presencia de estos símbolos, primero debe resolverse lo que se encuentre dentro de los paréntesis, luego lo que está dentro de los corchetes y finalmente lo que se encuentra dentro de las llaves.

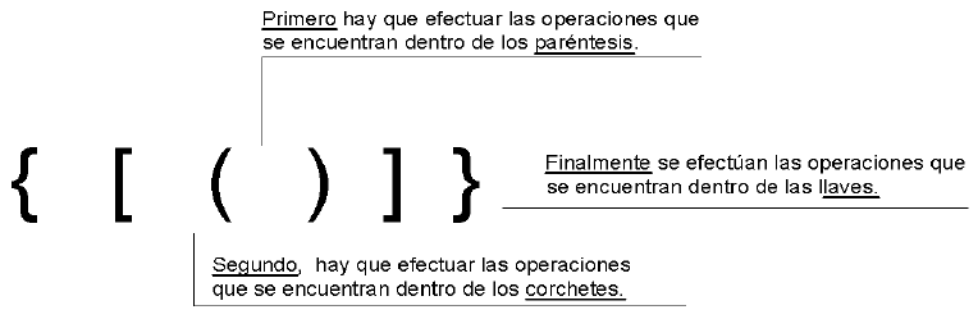


Figura 33: Precedencia de los símbolos de agrupación.

La eliminación de un símbolo de agrupación involucra una operación de multiplicación.

Ejemplo

Efectuar $3 - (5 - 7)$

Respuesta

Paso 1: Efectuar las operaciones dentro del paréntesis: $3 - (-2)$

Paso 2: Aplicar la regla de los signos y multiplicar los signos *menos* por *menos*

$$3 + 2$$

Paso 3: Efectuar la operación con los enteros: 5

Resultado final: 5

$$3 - (5 - 7) = 5$$

Valor absoluto. El valor absoluto de un número entero no es más que el valor de un entero sin tomar en cuenta el signo.

$$|a| = a$$
$$|-a| = a$$

El valor absoluto de un número se entiende como la distancia que existe desde ese número hasta cero.

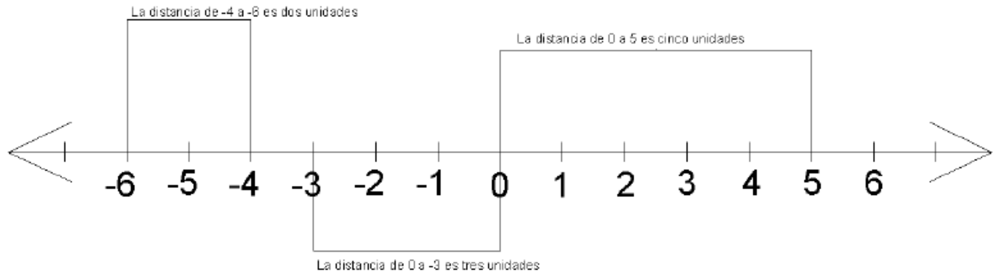


Figura 34: El valor absoluto de un número es la distancia de éste con respecto al cero. La distancia entre dos números es la diferencia entre el mayor valor absoluto y el de menor valor absoluto.

En la Figura 34 se observa que la distancia del número cero al número cinco es de cinco unidades, hay cinco espacios sobre la recta. Esa situación se representa simbólicamente así:

$$|5| = 5$$

También se observa que la distancia del número cero al número menos tres es igual a tres unidades ya que hay tres espacios sobre la recta. Esta situación, mediante símbolos, se representa así:

$$|-3| = 3$$

De igual forma en la figura, se observa que la distancia entre menos cuatro y menos 6 es igual a dos unidades, para calcular la distancia entre esos dos puntos basta con restar uno de otro. Simbólicamente esta situación es representable así:

$$|-4 - (-6)| = |-4 + 6| = |2| = 2$$

También es válido: $|6| - |4| = 2$

Suma de números enteros. Dados dos números enteros, si tienen igual signo su suma es la suma del valor absoluto de cada número y al final se le coloca el signo. Si los enteros tienen signos diferentes se resta el de mayor absoluto menos el de menor valor absoluto y se le coloca al resultado el signo del número entero de mayor valor absoluto.

Ejemplo

Efectuar $2 + 5$

Respuesta

Se trata de la suma de dos enteros positivos, en este caso el signo final es también positivo: $2 + 5 = 7$.

Ejemplo

Efectuar $-3 - 6$

Respuesta

Se trata de la suma de dos enteros negativos. El signo del resultado es negativo, los números se suman como si ambos fueran positivos: $-3-6=-9$

Ejemplo

Efectuar $-4+7$

Respuesta

La suma involucra a dos números con signos diferentes. En estos casos se resta el número de mayor valor absoluto del de menor valor absoluto. Como el número de mayor valor absoluto es 7, el signo del resultado es positivo.

$$-4+7=7-4=3$$

Ejemplo

Efectuar $-11+5$

Respuesta

La suma involucra a dos números con signos diferentes, por lo tanto se resta el de mayor valor absoluto del de menor valor absoluto. El signo del resultado es negativo, ya que el número de mayor valor absoluto es -11.

$$-11+5=-(11-5)=-6$$

En el caso de operaciones con más de dos números enteros, identificar a los números positivos y los negativos, sumar los elementos de cada grupo y finalmente restar los resultados del grupo positivo de los resultados del grupo negativo.

Ejemplo

Efectuar $3-5-6-7+5+11-2+8$

Respuesta

Se agrupan los enteros positivos y los enteros negativos

$$(3+5+11+8)-(5+6+7+2)$$
$$27-20=7$$
$$3-5-6-7+5+11-2+8=7$$

Multiplicación de números enteros. Para el producto se debe tener en cuenta la ley de los signos y los símbolos de agrupación.

Ejemplo

Efectuar $-5(4)$

Respuesta

El lector debe siempre tener presente que planteamientos como estos son comunes en operaciones con números enteros. La operación es un producto aunque el signo de multiplicar no esté presente de manera explícita, de igual forma, si un número no tiene signo debe considerarse que es positivo, tal como sucede con el cuatro que está dentro del paréntesis.

Se multiplican los signos: menos por más es igual a menos $(-x+=-)$.

Se multiplican los números: cinco por cuatro es igual a veinte $(5x4=20)$.

$$-5(4)=-20$$

Ejemplo

Efectuar $-4(-3)$

Respuesta

Es válido encerrar entre paréntesis el primer factor, por lo tanto el planteamiento puede escribirse así: $(-4)(-3)$

Se multiplican los signos: Menos por menos es igual a más $(-x-=+)$

Se multiplican los números: Cuatro por tres es igual a doce $(4x3=12)$

$$-4(-3)=12$$

Ejemplo

Efectuar $(-11)(-14)(25)(36)$

Respuesta

Se multiplican los signos. Se hace de dos en dos, los signos de los dos primeros números y los signos de los dos últimos números:

$-x-=+$

$+x+=+$

Se multiplican los signos a la derecha de cada igualdad:

$+x+=+$

Se multiplican los números: $(11)(14)(25)(36)=138\,600$

$$(-11)(-14)(25)(36)=138\,600$$

Potenciación de números enteros. La potenciación es una forma abreviada de multiplicar de forma repetida por un mismo número denominado base. Por ejemplo, $3x3x3x3x3 = 3^5$; en dicho caso el número 3 es la base y el número 5 es la potencia o exponente. En el caso de que tanto la base como la potencia sean números enteros, se observa lo siguiente:

Todo número entero negativo elevado a una potencia par genera un entero positivo.

$$(-2)^4 = 16$$
$$(-5)^2 = 25$$
$$(-1)^{10} = 1$$

Todo número entero negativo elevado a una potencia impar genera un entero negativo.

$$(-3)^3 = -27$$
$$(-4)^5 = -1024$$
$$(-7)^7 = -823\,543$$

Todo número entero positivo elevado a potencia par o impar genera un entero positivo.

$$3^2 = 9$$
$$(5)^3 = 125$$
$$(7)^5 = 16\,807$$

Ejemplo

Efectuar $(-3)^3 + (4)^2 + (-5)^4$

Respuesta

Con la calculadora científica se desarrolla cada potencia y luego se efectúa la suma. Es posible realizar esta operación mediante un solo paso. Sin embargo por aspectos didácticos, se explica por etapas.

$$(-3)^3 = -27$$
$$4^2 = 16$$
$$(-5)^4 = 625$$
$$(-3)^3 + (4)^2 + (-5)^4 = -27 + 16 + 625 = 614$$

Ejemplo

Efectuar $[(7^3)(-3)^5] + [(4^2)(-2)]$

Respuesta

Se utilizará Geogebra y wxMaxima para resolver esta operación.

Con Geogebra. Una vez cargado el software seleccionar la vista Cálculo Simbólico (CAS) y escribir las potencias tal cual están planteadas, solamente sustituir el corchete por paréntesis. Para la potencia se usa el símbolo ^, de tal forma que la entrada y la salida generada se muestran en la Figura 35.

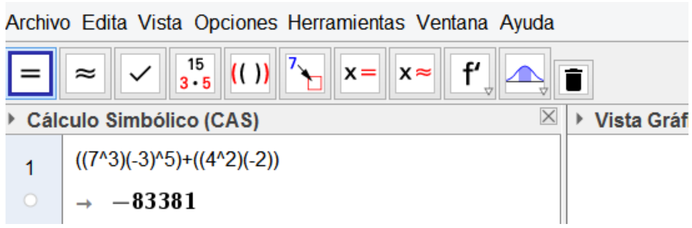


Figura 35: Ingreso de las potencias en la vista CAS de Geogebra.

$$[(7^3)(-3)^5] + [(4^2)(-2)] = 83\,381$$

Con wxMaxima. Una vez cargado el software, presionar la tecla *Enter* para ingresar los datos. No olvidar colocar el asterisco donde corresponda la multiplicación, cambiar los corchetes por paréntesis. Una vez ingresados los datos presionar la combinación de teclas *Shift+Enter* para que el programa genere la respuesta. El resultado se muestra en la Figura 36.

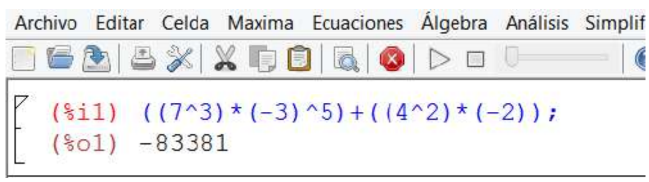


Figura 36: Resolución de operaciones con potencias de enteros usando wxMaxima.

Ejercicios

1. Los siguientes conjuntos de números enteros contienen elementos que están desordenados. Para cada conjunto dado se pide: (a) Ordenar los elementos en orden ascendente y (b) Representar cada conjunto sobre una recta.
   $A = \{-5, -20, 4, 10, 0, -10, 20, 8\}$
   $B = \{170, -50, 0, -200, 150, -100, 80\}$
   $C = \{2000, -500, 0, 1000, -1500, -1000, 300\}$
   $D = \{-80, -10, -30, -70, -20, 10\}$
   $E = \{-100, -300, -800, 200, -700, -900\}$
2. Resuelve las siguientes situaciones, empleando el concepto de número entero y tomando en consideración que el ascenso, las ganancias, el avance y el aumento se representan con números enteros positivos, en cambio el descenso, las pérdidas, el retroceso y la disminución se representan con números enteros negativos.
   a. Una persona parte del nivel del mar y asciende un día una montaña de 1500 metros, luego el otro día desciende 300 metros, el día siguiente desciende otros 200 metros, y al cuarto día asciende 700 metros ¿a qué altura se encuentra esa persona con respecto al nivel del mar?
   b. Juan es mototaxista, el día lunes tiene en su casa 10000 bolívares, sin embargo consume 5500 en comida para su casa y 3700 bolívares en un repuesto para su moto; en total ese día se ganó 7600 bolívares ¿cuánto dinero tiene Juan al final del día lunes?

c. Marzo es mes de mucho calor en San Fernando. Si en la mañana el termómetro marca 24 °C y al mediodía marca 35°C ¿cuánto se incrementó la temperatura en el mediodía de ese día con respecto a la temperatura de la mañana?
d. La matrícula inicial de la cohorte 2017-1 de los estudiantes de Castellano y literatura era de 39 alumnos, luego en la primera semana de clases ingresaron 7 alumnos, en las semanas siguientes se retiraron 18 alumnos ¿cuántos alumnos conforman actualmente esa cohorte?
e. Una persona tiene en una cuenta 55000 bolívares, deposita 15000 bolívares en el banco el día lunes, el miércoles retira 10000 bolívares, el jueves deposita 17500 bolívares ¿Cuánto dinero tiene en la cuenta esa persona el día viernes?

3. Resolver
   a. $(-4-5)+[-3(-2+5)+4]-6$
   b. $(-3)^4+(-2)^5+(-4)^2+50$
   c. $7-\{4-[5-(3-6)+3]+7-2\}+10$
   d. $(4+3-6)(5-2+1)$
   e. $(-6-9+2)(-4-2+7)$
4. Aplique la propiedad distributiva
   a. $(-3+2)(4-5)$
   b. $(-7)(10+4)$
   c. $(11)(-3+8)$
   d. $(12-7)(-5)$
   e. $(-4+2)(-3-10)$

Números Racionales

Si se dividen dos números enteros, es posible que usted obtenga como resultado otro número entero, pero también existe la posibilidad de que se obtenga un número que no es entero. De igual manera, al representar los números enteros consecutivos sobre una recta, usted observa que entre dos de esos números existe solamente un segmento de recta donde no es representable ningún otro número entero; es decir que entre dos enteros quedan unos "huecos" o espacios vacíos. Esos inconvenientes fueron resueltos en parte con la creación del conjunto de los números racionales.

Presentación intuitiva. Intuitivamente cuando se habla de un número racional se piensa en una fracción y, en efecto, los números racionales son aquellos que se pueden representar como el cociente (división) entre dos números enteros. Puede darse el caso de que esa división genere un entero, pero también que genere un número decimal.

Notación de los números racionales. La representación en notación de conjuntos de este conjunto numérico es:

$$Q=\left\{x/x=\frac{a}{b}\wedge(a,b)\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}$$

Es decir, el conjunto de los números racionales es el conjunto conformado por todos los números, tal que esos números surgen de una división de dos números enteros, con la condición que el número que actúa como divisor nunca debe ser igual a cero. Recuerde que la división entre el número cero no está definida, es indeterminada.

Un Número racional generalmente se representa como una fracción. Recordemos que la parte superior de una fracción se conoce como numerador y la parte inferior de una fracción lleva el nombre de denominador.

Figura 37: Elementos de una fracción

Se puede dar el caso que el número que actúa como numerador es divisible por el número que actúa como denominador, por lo tanto la fracción se convierte en un número entero. De igual forma todo número entero, puede ser expresado como la división de otros enteros. Por ejemplo tomemos el número 4.

$$\frac{100}{25} = 4 \qquad \frac{40}{10} = 4 \qquad \frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{8}{2} = 4$$

Observe que en esas cuatro operaciones siempre se obtiene como resultado el número cuatro. Por lo tanto el conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales, esto significa que cualquier número entero es un número racional. De tal forma que los conjuntos numéricos estudiados hasta ahora están conformados de esta manera:

$$N \subset \mathbb{Z} \subset Q$$

Orden en los números racionales. Un número racional se puede comparar con otro número racional y colocar entre ellos el signo $>, = o\ <$. Sin embargo, es importante indicar que entre dos números racionales existen infinitos números racionales, característica que distingue a este conjunto numérico de los previamente estudiados.

Ejemplo

Comparar los dos números racionales $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{8}$

Respuesta

Una opción es expresar las fracciones con un denominador común:

$$\frac{5}{6}\left(\frac{8}{8}\right)=\frac{40}{48}$$

$$\frac{3}{8}\left(\frac{6}{6}\right)=\frac{18}{48}$$

Como $40 > 18$ se concluye que $\frac{5}{6} > \frac{3}{8}$

Otra opción es multiplicar numerador con denominador de cada fracción y luego hacer la comparación.

$$\frac{5}{6}?\ \frac{3}{8} \to (5)(8)\ ?\ (6)(3) \to 40 > 18$$

Por lo tanto se concluye que $\frac{5}{6} > \frac{3}{8}$

Otra posibilidad que tenemos en la actualidad es efectuar la división con la calculadora:

Al dividir 5 entre 6 se obtiene: 0,8333 y al dividir 3 entre 8 se obtiene: 0,375. Si se comparan los dos números decimales obtenidos se llega a la conclusión ya descrita.

Ejemplo

Comparar las fracciones $\frac{15}{8}\ y\ \frac{9}{2}$

Respuesta

$$(15)(2)=30$$
$$(8)(9)=72$$
$$30<72 \to \frac{15}{8}<\frac{9}{2}$$
$$\frac{15}{8}<\frac{9}{2}$$

Representación en la recta. En los conjuntos numéricos formados por los números naturales y los números enteros, la ubicación de cualquiera de sus elementos sobre la recta es una tarea relativamente fácil, sin embargo en el conjunto de los números racionales los espacios que existían entre un número y otro de los conjuntos numéricos

mencionados son ocupados, tienen representación, por lo tanto la recta se vuelve densa ya que prácticamente toda su longitud representa a números racionales.
Entre dos números racionales existen infinitos números racionales

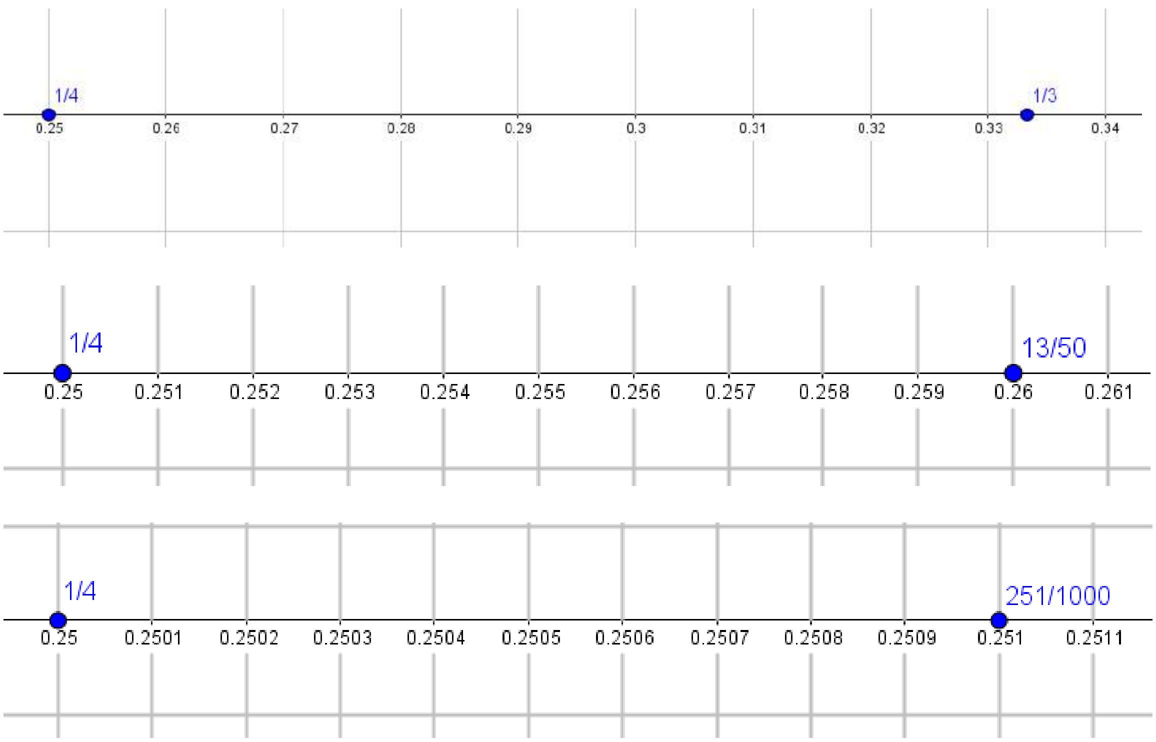


Figura 38: Entre dos números racionales existen infinitos números racionales. En estas tres representaciones hechas con el software Geogebra, se observa que independientemente que se estreche el intervalo, siempre van a existir infinitos números entre extremos.

En las figuras elaboradas con la ayuda del software Geogebra, generalizadas como Figura 38, se representa en primer lugar las fracciones $\frac{1}{4}\ y\ \frac{1}{3}$. Se observan algunos números racionales que están dentro de ese intervalo. La figura del medio corresponde a un intervalo más estrecho: $\frac{1}{4}\ y\ \frac{13}{50}$. De nuevo el espacio entre esos dos extremos es llenado por números racionales. En la figura de abajo se estrechó aún más el intervalo, sin embargo nos encontramos con infinitos números entre los dos extremos.

Ejemplo

Representar sobre la recta al conjunto

$$A = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{12}{7}, 4\right\}$$

Respuesta

En primer lugar hay que verificar que los elementos del conjunto estén ordenados en orden creciente. En este caso lo números están ordenados.

En segundo lugar se debe definir una escala que garantice que los números que se intenta representar ocupen un espacio adecuado sobre el papel.

$$Número\ Menor\ (Nm) = -\frac{9}{2}$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 4$$
$$Amplitud = NM - Nm = 4 - \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{17}{2}$$

Se divide la amplitud entre el espacio normal disponible en el papel milimetrado que es igual a 15 cm para un formato vertical.

$$\frac{\frac{17}{2}}{15} = \frac{17}{30} \cong 0.57$$

Se puede asumir una escala 1:0.5 que es igual a 2:1 o una escala 1:1; en el primer caso se requieren más de 15 cm para hacer la representación, en el segundo caso menos de 15 cm. En la Figura 39 se hace la representación gráfica utilizando la escala 1:1 es decir 1 cm en el papel es equivalente a una unidad.

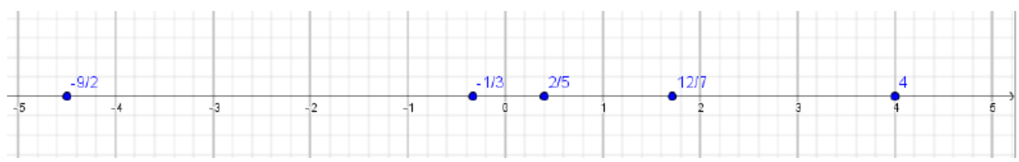


Figura 39: Representación en la recta de los elementos del conjunto A conformado por números racionales.

Ejemplo

Representar sobre la recta al conjunto

$$B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}$$

Respuesta

Lo primero que se debe hacer es ordenar los elementos del conjunto en orden ascendente.

$$B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right\}$$

Una vez ordenados los elementos, se procede a trazar una recta y seleccionar la escala que garantice que cada elemento va a estar representado. Se puede optar por hacer esta representación con la ayuda del software Geogebra, en cuyo caso se debe introducir en la barra de entrada los elementos del conjunto bajo la forma de puntos en el plano, esto es $\left({}^{1}/_{2}, 0\right)$; $\left({}^{2}/_{3}, 0\right)$; $\left({}^{4}/_{5}, 0\right)$; $\left({}^{3}/_{2}, 0\right)$. El resultado se observa en la Figura 40.

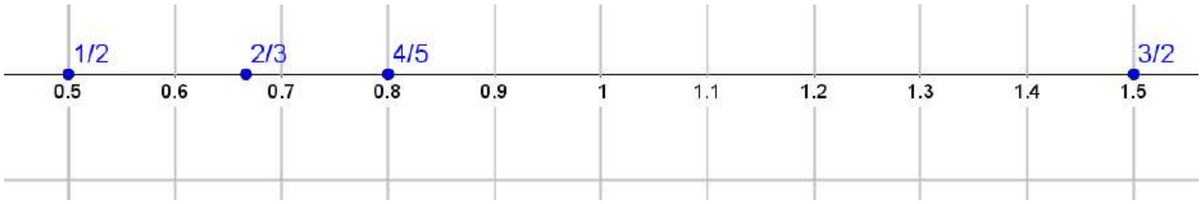


Figura 40: Representación sobre la recta de los elementos del conjunto B conformado por números racionales.

Operaciones fundamentales con números racionales. Se explica mediante ejercicios prácticos las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y se añade la operación de potenciación con números racionales. La diferencia con respecto a los conjuntos numéricos estudiados en las secciones previas, es que en esta ocasión nos involucramos con todas las operaciones, puesto que el resultado que genere cualquiera de ellas se encuentra enmarcado dentro del conjunto de los números racionales, aspecto que no sucede a veces cuando se trabaja con números naturales y números enteros.

Suma de números racionales. La suma de números racionales puede ser resuelta atendiendo en primer lugar a la estructura que presenta cada sumando, esto es, si se trata de números con idénticos denominadores o con diferentes denominadores. En cualquier caso también es aplicable el principio del mínimo común múltiplo de los denominadores o en última instancia, usar la tecnología y resolver la operación con la ayuda de una calculadora, mediante una hoja de cálculo o con software especializado en matemática.

Ejemplo

Efectuar: $\frac{7}{8}+\frac{3}{8}$

Respuesta

Como los denominadores de las fracciones son iguales, se escribe el mismo denominador y se suman los numeradores:

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7+3}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Se simplificó la fracción $\frac{10}{8}$ ya que 10 tiene mitad y 8 también resultando $\frac{5}{4}$, esto es conveniente hacerlo, sobre todo cuando se comprueban los resultados con calculadoras, ya que estos aparatos siempre reducen las fracciones a su mínima expresión antes de emitir la respuesta.

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{4}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$

Respuesta

De nuevo los denominadores de las fracciones son iguales, se escribe el mismo denominador y se suman algebraicamente los numeradores

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1-3+5}{4}=\frac{3}{4}$$

En este caso no es necesario simplificar, ya que la fracción está reducida a su mínima expresión.

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

Ejemplo

Efectuar: $5+\frac{2}{3}$

Respuesta

Se trata de la suma de un entero más una fracción. Ante esta situación se debe convertir el entero a fracción con denominador 1.

$$5+\frac{2}{3}=\frac{5}{1}+\frac{2}{3}$$

Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, $mcm(1,3)=3$.
Ese es el número que va a actuar como denominador en el resultado final.
Se divide

$3 \div 1 = 3$

Y ese resultado se multiplica por 5

$(3)(5)=15$

Se divide

$3 \div 3 = 1$

Y ese resultado se multiplica por 2

$(1)(2)=2$

La operación completa es así

$$\frac{5}{1}+\frac{2}{3}=\frac{15+2}{3}=\frac{17}{3}$$

$$5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$$

Ejemplo

Resolver: $\frac{7}{15}+\frac{4}{21}+\frac{10}{11}-\frac{3}{13}$

Respuesta

Los denominadores de las fracciones son diferentes. Una de las maneras de solucionar esta suma es mediante el cálculo del mcm de los divisores:

15	3	21	3	11	11	13	13
5	5	7	7	1		1	
1		1					

$15 = 3x5$ $\quad 21 = 3x7$ $\quad 11 = 11$ $\quad 13 = 13$

$$mcm(15, 21, 11, 13) = 3x5x7x11x13 = 15015$$

$15015 \div 15 = 1001$

$1001x7 = 7007$

$15015 \div 21 = 715$

$715x4 = 2860$

$15015 \div 11 = 1365$

$1365x10 = 13650$

$15015 \div 13 = 1155$

$1155x3 = 3465$

$$\frac{7}{15} + \frac{4}{21} + \frac{10}{11} - \frac{3}{13} = \frac{7007 + 2860 + 13650 - 3465}{15015} = \frac{20052}{15015} = \frac{6684}{5005}$$

$$\frac{7}{15} + \frac{4}{21} + \frac{10}{11} - \frac{3}{13} = \frac{6684}{5005}$$

Ejemplo

Resolver: $1\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}$

Respuesta

Los números racionales que tienen esa estructura se denominan números mixtos, Todo número mixto tiene una parte entera y una parte fraccionaria. Existen dos maneras de resolver la suma planteada.

Opción 1: Se suman las partes enteras y las partes fraccionarias por separado

Parte entera: $1 + 5 = 6$

Parte fraccionaria: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Como la fracción resultante es impropia, es decir la expresión decimal es mayor que la unidad, se convierte a número mixto al dividir por la forma tradicional. El cociente es el número entero y la parte mixta es el residuo entre el divisor.

3	2
1	1

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ahora se resuelve la nueva operación con el entero más el mixto

$$6 + 1\frac{1}{2}$$

Parte entera: $6 + 1 = 7$

Parte fraccionaria: $\frac{1}{2}$

Por lo tanto

$$1\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} = 7\frac{1}{2}$$

Opción 2: Se realiza la conversión de los números mixtos a fracciones impropias

$$1\frac{2}{3} = \frac{(1)(3)+2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$5\frac{5}{6} = \frac{(5)(6)+5}{6} = \frac{30+5}{6} = \frac{35}{6}$$

Se suman las fracciones $\frac{5}{3} + \frac{35}{6}$

Se requiere el $mcm(3,6)$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

3=3 $\qquad$ $6 = 2x3$

$$mcm(3,6) = 6$$

$$\frac{5}{3} + \frac{35}{6} = \frac{10 + 35}{6} = \frac{45}{6}$$

Se convierte la fracción impropia a número mixto

$$\begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 7 \end{array}$$

$$\frac{45}{6} = 7\frac{3}{6} = 7\frac{1}{2}$$

Ejemplo

Resolver: $\frac{14}{15} + 12 - 4\frac{3}{7} + 2\frac{6}{11} - \frac{17}{19}$

Respuesta

Se convierten los números mixtos a fracción impropia:

$$4\frac{3}{7}=\frac{28+3}{7}=\frac{31}{7}$$

$$2\frac{6}{11}=\frac{22+6}{11}=\frac{28}{11}$$

Se convierten los enteros a fracción:

$$12=\frac{12}{1}$$

La suma algebraica queda ahora de la siguiente manera:

$$\frac{14}{15}+\frac{12}{1}-\frac{31}{7}+\frac{28}{11}-\frac{17}{19}$$

Se requiere el mínimo común múltiplo de los números 15, 7, 11, 19. De los cuatro números el único compuesto es $15=3x5$. Los demás números son primos. Por lo tanto

$$mcm(15,7,11,19)=15x7x11x19=21\,945$$

$$\frac{14}{15}+\frac{12}{1}-\frac{31}{7}+\frac{28}{11}-\frac{17}{19}=\frac{20482+263340-97185+55860-19635}{21945}$$
$$=\frac{222862}{21945}$$

Si queremos expresar el resultado de la operación como número mixto:

$$\begin{array}{r|l} 222862 & 21945 \\ \hline 341210 & \end{array}$$

$$\frac{222862}{21945}=10\frac{3412}{21945}$$

$$\frac{14}{15}+\frac{12}{1}-\frac{31}{7}+\frac{28}{11}-\frac{17}{19}=\frac{222862}{21945}$$

Producto de números racionales. Para multiplicar números racionales expresados mediante fracciones, se multiplican los numeradores, incluidos los signos negativos y positivos y los denominadores. La fracción resultante se expresa reducida a su mínima expresión, motivo por el cual es conveniente descomponer en factores primos a cada factor involucrado en el producto y luego simplificar.

Ejemplo

Resolver: $\frac{3}{5}\left(\frac{10}{13}\right)$

Respuesta

$$\frac{3}{5}\left(\frac{10}{13}\right)=\frac{3(10)}{5(13)}=\frac{3(2)(5)}{5(13)}=\frac{6}{13}$$

Se tomó en consideración la descomposición del único número compuesto presente

10	2
5	5
1	

$$\mathbf{10 = 2x5}$$

Luego se simplificó el número 5, ya que aparece una sola vez en el numerador y en el denominador.

$$\frac{3}{5}\left(\frac{10}{13}\right) = \frac{6}{13}$$

Ejemplo

Resolver: $(-6)\left(\frac{12}{17}\right)$

Respuesta

$$(-6)\left(\frac{12}{17}\right) = \left(-\frac{6}{1}\right)\left(\frac{12}{17}\right) = \frac{(-6)(12)}{(1)(17)} = \frac{-72}{17} = -\frac{72}{17}$$

Cuando se multiplica un entero por una fracción se expresa el entero como una fracción con denominador 1. El signo negativo de la fracción resultante puede ser colocado en numerador o a la altura de la raya de fracción, inclusive en el denominador. Lo más común es la segunda opción. Por otra parte, el denominador es un número primo y el numerador no lo contiene dentro de sus factores primos, de tal manera que la fracción está reducida a su mínima expresión.

Sin embargo, se tiene la alternativa de expresar la respuesta como un número mixto ya que la fracción resultante es impropia, es decir el numerador es mayor que el denominador.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 17 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$$

$$-\frac{72}{17} = -4\frac{4}{17}$$

$$(-6)\left(\frac{12}{17}\right) = -\frac{72}{17}$$

Ejemplo

Resolver: $\left(\frac{25}{31}\right)\left(\frac{5}{23}\right)\left(-\frac{11}{12}\right)$

Respuesta

Los paréntesis sin algún signo entre ellos indican de manera implícita un producto; por lo tanto la solución de esta operación consiste en multiplicar los tres numeradores y los tres denominadores.

$$\left(\frac{25}{31}\right)\left(\frac{5}{23}\right)\left(-\frac{11}{12}\right)=\frac{(25)(5)(-11)}{(31)(23)(12)}=\frac{-1375}{8556}=-\frac{1375}{8556}$$

La fracción resultado es una fracción propia, puesto que el numerador es menor que el denominador, de tal forma que no es posible hacer la conversión a número mixto.

$$\left(\frac{25}{31}\right)\left(\frac{5}{23}\right)\left(-\frac{11}{12}\right)=-\frac{1375}{8556}$$

Ejemplo

Resolver: $\frac{12}{5}x\frac{2}{3}x\frac{7}{8}$

Respuesta

El producto está planteado con fracciones que están multiplicadas usando el símbolo tradicional: la equis. Se observa además que hay un número compuesto en el numerador y otro número compuesto en el denominador. Lo recomendable es descomponer esos números y simplificar.

12	2	8	2
6	2	4	2
3	3	2	2
1		1	
$\mathbf{12=2^2.3}$		$8=2^3$	

$$\frac{12}{5}x\frac{2}{3}x\frac{7}{8}=\frac{2^2x3x2x7}{5x3x2^3}=\frac{7}{5}$$

Se produjeron simplificaciones importantes. $2^2x2=2^3$ en el numerador se simplificó con 2^3 del denominador; también se simplificaron los 3 presentes en el numerador y el denominador.

La fracción resultante es impropia, si el lector lo desea puede expresar el resultado como un número mixto.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$$

$$\frac{12}{5}x\frac{2}{3}x\frac{7}{8}=\frac{7}{5}$$

Ejemplo

Resolver: $\frac{765}{1124}x\frac{346}{3278}x\frac{129}{385}$

Respuesta

También es posible efectuar el producto en el numerador y en el denominador y luego descomponer tanto el numerador como el denominador de la fracción resultado. Esto aplica sobre todo en casos como el planteado, donde hay diferentes números compuestos involucrados en la operación.

$$\frac{765}{1124}x\frac{346}{3278}x\frac{129}{385}=\frac{34145010}{1418521720}$$

3414501	3	141852172	2
1138167	3	70926086	2
379389	3	35463043	7
126463	17	5066149	11
7439	43	460559	11
173	173	41869	149
1		281	281
$\mathbf{3414501=3^3x17x43x173}$		$8=2^2x7x11^2x149x281$	

En este caso no existen factores primos comunes, por lo tanto no se puede simplificar.

$$\frac{765}{1124}x\frac{346}{3278}x\frac{129}{385}=\frac{3414501}{141852172}$$

División de números racionales. Esta operación involucra la multiplicación del numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción y la división de ese resultado entre el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{12}{5}\div\frac{3}{7}$

Respuesta

$$\frac{12}{5}\div\frac{3}{7}=\frac{(12)(7)}{(5)(3)}=\frac{(4)(3)(7)}{(5)(3)}=\frac{28}{5}$$

Observe que se planteó el producto y luego se descompuso el único número compuesto en sus factores primos: $12=(4)(3)$, posteriormente se simplificó el 3 en numerador y el 3 en el denominador.

$$\frac{12}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{28}{5}$$

Ejemplo

Resolver: $124 \div \frac{3}{4}$

Respuesta

Para dividir un entero entre una fracción se multiplica el entero por denominador de la fracción, para conformar el numerador de la fracción resultado, el numerador de la fracción se convierte en denominador en la fracción resultado.

$$124 \div \frac{3}{4} = \frac{(124)(4)}{(3)} = \frac{496}{3}$$

$$124 \div \frac{3}{4} = \frac{496}{3}$$

Ejemplo

Resolver: $\left(\frac{7}{12}\right) \div \left(-\frac{9}{13}\right)$

Respuesta

$$\left(\frac{7}{12}\right) \div \left(-\frac{9}{13}\right) = \frac{(7)(13)}{(12)(-9)} = -\frac{91}{108}$$

$$: \left(\frac{7}{12}\right) \div \left(-\frac{9}{13}\right) = -\frac{91}{108}$$

Ejemplo

Resolver: $\left(-\frac{12}{19}\right) \div \left(\frac{5}{8}\right)$

Respuesta

$$\left(-\frac{12}{19}\right) \div \left(\frac{5}{8}\right) = \frac{(19)(5)}{(-12)(8)} = \frac{95}{-96} = -\frac{95}{96}$$

$$: \left(-\frac{12}{19}\right) \div \left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{95}{96}$$

Ejercicios

1. Coloque el $>$ o $<$ entre los pares de números racionales según corresponda, justifique su respuesta.
   a. $\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}$
   b. $\frac{3}{8}\quad\frac{1}{10}$
   c. $-\frac{5}{4}\quad-\frac{7}{3}$
   d. $-\frac{12}{9}\quad\frac{2}{5}$
   e. $\frac{20}{17}\quad-\frac{30}{29}$
2. Represente en una recta cada conjunto, recuerde verificar si los elementos están ordenados y seleccionar la escala adecuada.
   a. $A=\left\{\frac{10}{3},-\frac{4}{7},\frac{5}{2},-\frac{7}{5},\frac{3}{4}\right\}$
   b. $B=\left\{-\frac{11}{2},-\frac{8}{3},-\frac{3}{2},\frac{2}{5},\frac{12}{7}\right\}$
   c. $C=\left\{\frac{81}{11},\frac{21}{2},-\frac{40}{3},-\frac{103}{4},\frac{90}{2}\right\}$
   d. $D=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{17}{12},-\frac{31}{28},-\frac{25}{19},-\frac{42}{31}\right\}$
3. Efectuar las operaciones siguientes:
   a. $\frac{2}{5}+\frac{8}{5}+\frac{11}{5}$
   b. $46+\frac{11}{6}$
   c. $\frac{12}{17}-\frac{11}{13}+\frac{15}{8}$
   d. $\frac{13}{4}+\frac{15}{16}+\frac{31}{30}+\frac{51}{48}$
4. Efectuar las operaciones siguientes:
   a. $\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)$
   b. $\frac{23}{4}\div\frac{14}{3}$
   c. $\left(\frac{4}{7}-8\right)\left(\frac{10}{9}+6\right)$
   d. $\left(\frac{32}{5}+\frac{25}{4}-\frac{15}{2}\right)\div\left(\frac{6}{5}+\frac{24}{7}\right)$
5. Convertir las siguientes fracciones impropias a números mixtos:
   1. $\frac{13}{3}$
   2. $\frac{5}{2}$
   3. $\frac{24}{9}$
   4. $\frac{52}{5}$

Razón y proporción. Cuando se comparan dos cantidades es posible hacerlo mediante una operación de diferencia, con lo que se logra una cifra numérica que indica cuánto excede una cantidad a la otra. También se puede estar interesado en verificar cuántas veces una cantidad ocupa a la otra cantidad, es decir cuántas veces está contenida una cantidad en la otra, proceso que se logra a través de la división. En todo caso, la comprensión de la idea de razón y de proporción es el punto de partida para entender la forma como se encuentran relacionadas muchas magnitudes presentes en nuestras actividades diarias.

Razón aritmética. Se entiende por razón aritmética a la diferencia entre dos cantidades, por ejemplo la razón entre una cantidad a y otra cantidad b es $a - b$. Al primer término se le conoce como antecedente y al segundo término como consecuente. Si tanto al antecedente como al consecuente se le suma o resta un número, la razón aritmética no se altera.

Ejemplo

Calcular la razón aritmética entre los números 4 y 3.

Respuesta

$$4 - 3 = 1$$

Se lee: la razón aritmética de 4 a 3 es igual a 1.
Si se suma 5 al antecedente y al consecuente se tiene

$$(4 + 5) - (3 + 5) = 9 - 8 = 1$$

Ejemplo

En un aula hay 12 niños y 8 niñas, indicar la razón aritmética de niños a niñas.

Respuesta

La razón aritmética de niños a niñas es $12 - 8 = 4$.

Se lee: la razón aritmética de 12 a 8 es igual a 4. También: La razón aritmética de niños a niñas es 4. En el aula los niños exceden a las niñas en una cantidad de 4,

Razón geométrica. Se entiende por razón geométrica al cociente entre dos cantidades, por ejemplo la razón entre una cantidad a y una cantidad b es $\frac{a}{b}$. Si en una razón geométrica se multiplica el numerador y el denominador por el mismo número, la razón no se altera.

$$\frac{5(9)}{7(9)} = \frac{5}{7}$$

Ejemplo

En un aula hay 12 niños y 8 niñas ¿cuál es la razón geométrica de niños a niñas en el aula?

Respuesta

La razón geométrica de niños a niñas en el aula es:

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto la razón geométrica de niños a niñas en el aula es 3 a 2, la cual se puede escribir también así: 3: 2. Por cada 3 niños en el aula hay 2 niñas.

Ejemplo

En una biblioteca hay 10 libros de matemática y 6 libros de computación, calcule (a) razón de libros de matemática a libros de computación, (b) razón de libros de computación a libros de matemática.

Respuesta

(a) Libros de matemática a libros de computación

$$\frac{10}{6}$$

Fracción que simplificada es equivalente a $\frac{5}{3}$

La razón de libros de matemática a libros de computación es 5 a 3

(b) Libros de computación a libros de matemática

$$\frac{6}{10}$$

Fracción que simplificada es equivalente a $\frac{3}{5}$

La razón de libros de computación a libros de matemática es 3 a 5.

Proporción. Una proporción es una igualdad entre razones geométricas. De manera general se expresa como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Observe que se trata de dos razones geométricas, razón por la cual igualdades como las indicadas reciben también el nombre de proporciones geométricas.

Los valores a y d se conocen como extremos de la proporción y los valores b y c como medios de la proporción.

Si se multiplica ambos lados de una proporción por el mismo número, la proporción no se altera, de igual modo si se resta o suma el mismo número en ambos lados, la proporción no se altera.

La multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios

$$a.d = b.c$$

Ejemplo

Calcule el valor de x en la siguiente proporción:

$$\frac{x}{6} = \frac{13}{28}$$

Respuesta

$$x = \left(\frac{13}{28}\right)(6) = \frac{39}{14}$$

$$x = \frac{39}{14}$$

Ejemplo

Si una persona camina 5 km en 30 minutos ¿cuántos kilómetros camina en 70 minutos?

Respuesta

$$\frac{x}{5} = \frac{70}{30}$$

$$x = \left(\frac{7}{3}\right)(5) = \frac{35}{3}$$

La persona camina $\frac{35}{3}$ Km en 70 minutos.

Ejercicios

1. En el aula hay 24 alumnas y 12 alumnos ¿cuál es la razón aritmética de alumnos a alumnas? ¿cuál es la razón geométrica de alumnos a alumnas?
2. En la mañana la temperatura es de 24°C y al mediodía es de 36°C ¿Cuál es la razón aritmética de la temperatura del mediodía respecto a la temperatura de la mañana?
3. Un equipo de béisbol ganó 20 juegos y perdió 15 ¿Cuál es la razón geométrica de juegos ganados a juegos perdidos?
4. En un semestre un alumno aprobó 5 materias pero reprobó 2 ¿cuál es la razón geométrica de materias aprobadas a materias reprobadas?
5. Durante una hora, en cierta vía circulan 120 autos y 74 motos, indique la razón geométrica de motos a autos que circulan por la vía.
6. El largo de un rectángulo es 5x y el ancho es 3x ¿cuál es la razón geométrica del ancho del rectángulo a su perímetro?

7. Normalmente la razón de asistencia a clase de alumnas a alumnos es 7:4 si un día de clase asisten 6 alumnos ¿Cuántas alumnas asistieron ese día?
8. La razón de votos válidos a votos nulos en una elección normalmente es 9: 1, si el número de votos válidos en esa elección fue de 4 543 162 ¿cuántos votos nulos hubo?

Números irracionales

A pesar de que con el conjunto de los números racionales, la recta numérica se vuelve densa, de tal forma que infinitos números racionales ocupan el espacio entre dos racionales cualquiera independientemente si están muy cerca o muy lejos; aún en ese conjunto numérico existen "huecos" sobre la recta que no pueden ser llenados por números racionales. Los números que completan esos espacios vacíos son los números irracionales.

Presentación intuitiva.
Los números irracionales son aquel conjunto numérico que no se puede expresar como el cociente entre dos números enteros. Al contrario de los números racionales que son números decimales periódicos, estos son decimales infinitos, es decir números que no conforman una secuencia específica luego de la coma (punto) que separa al entero de la parte decimal.

Intuitivamente se relaciona a los números irracionales con las raíces, aspecto que no está del todo alejado de la realidad puesto que muchas raíces cuadradas y de otro índice forman parte de este conjunto numérico. En general toda raíz que no sea un número natural es un número irracional.

Estos números surgen de la geometría y los más comunes son:

$$\sqrt{2}, \pi, e, \varphi$$

El número $\sqrt{2}$ es la hipotenusa de un cuadrado de lado 1.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \ldots$$

El número π es la relación del perímetro de una circunferencia con su diámetro.

$$\pi = 3.141592653589793 \ldots$$

El número e es el número de Euler, base de los logaritmos naturales.

$$e = 2.718281828459045 \ldots$$

El φ es el número de oro, cuya expresión matemática es $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\varphi = 1.618033988749895 \ldots$$

Muchas raíces son números irracionales: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{47}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{123}$.

Notación para los números irracionales.
Para la notación del conjunto de los números irracionales, generalmente se utiliza la letra I, sin embargo hay que tener presente que existe otro conjunto numérico que también suele utilizar esta letra, se trata del conjunto de los números imaginarios.

$$I = \{x/x \notin Q\}$$

Orden en los números irracionales.
Es imposible representar toda la parte decimal que conforma un número irracional, por lo tanto lo que se observa generalmente en los escritos bien sea en papel o pantallas de dispositivos electrónicos, son

expresiones redondeadas a cierta cantidad de decimales. Esto facilita la labor de hacer comparaciones con números irracionales, sobre todo cuando se trabaja de forma manual.

Para este conjunto numérico también se debe tener en cuenta que si $a > b$ entonces a está ubicado sobre la recta a la derecha de b, de igual manera si $a < b$, a está a la izquierda de b sobre la recta. El mismo efecto aplica a la hora de ordenar los elementos en una serie.

A la hora de comparar raíces positivas de igual índice es mayor aquella cuya parte subradical o radicando sea mayor. Los elementos que conforman a una raíz se indican en la Figura

$$\sqrt[n]{x} = a$$

Donde n es el índice de la raíz. Si $n = 2$ se lee raíz cuadrada de x…, si $n = 3$ se lee raíz cúbica de x y así sucesivamente; $\sqrt{\ }$ es el radical; x es la es radicando o parte subradical; a es la raíz.

Cuando $n = 2$ no se coloca el 2 de tal forma que:

$\sqrt{x}$ se lee raíz cuadrada de x.

Ejemplo

Comparar los números e y φ

Respuesta

Ya se han indicado los valores decimales tanto de la base de los logaritmos naturales como de la razón aurea. En esta ocasión se redondeará cada número a dos cifras significativas solamente con la idea de no tener que trabajar con tantas cifras solamente para hacer una comparación.

$$e = 2.72$$
$$\varphi = 1.62, \text{ por lo tanto:}$$
$$e > \varphi$$

Ejemplo

Comparar los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$

Respuesta

Son raíces cuyo índice es 2. Al comparar los radicandos se observa que $2 < 7$, en consecuencia:

$$\sqrt{2} < \sqrt{7}$$

Ejemplo

Comparar los números $\sqrt[3]{7}$ con $\sqrt[5]{4}$

Respuesta

Con algún dispositivo de cálculo es fácil determinar el valor decimal de cada raíz y hacer la comparación. Sin embargo se explica cómo hacerlo de forma manual.

Se trata de raíces con índices diferentes. En este caso se busca el mínimo común índice, es decir $mcm(3{,}5)$; como ambos números son primos, $mcm(3{,}5) = 15$.

$15 \div 3 = 5 \rightarrow 5\ es\ el\ exponente\ de\ 7$

$15 \div 5 = 3 \rightarrow 3\ es\ el\ exponente\ de\ 4$

Los números a comparar ahora son: $\sqrt[15]{7^5}$ y $\sqrt[15]{4^3}$

Como $7^5 = 16807$ y $4^3 = 64 \rightarrow \sqrt[15]{7^5} > \sqrt[15]{4^3}$

$$\sqrt[3]{7} > \sqrt[5]{4}$$

Representación en la recta. Una vez que se han tenido en cuenta las relaciones de orden entre los elementos de un conjunto cuyos elementos son números irracionales hay que considerar que con papel y lápiz la representación de estos números nunca va a ser precisa. Sin embargo ante el uso de esos recursos existe la opción de incorporar objetos como regla y compás los cuales permiten ubicar a ciertas raíces de manera exacta sobre la recta.

En la figura 41, elaborada con Geogebra, se observa que se ha trazado un rectángulo de lado 1, tomando como eje de rotación el número 0 y como radio la hipotenusa de ese rectángulo se ha trazado una semicircunferencia que toca a la recta inferior en el punto A, el cual corresponde a $\sqrt{2}$. Por el punto A se ha trazado una recta perpendicular al eje y que toca a la recta coloreada en azul, para conformar un nuevo triángulo rectángulo cuyos catetos son: $\sqrt{2}\ y\ 1$, la hipotenusa de ese triángulo es $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$, al trazar una semicircunferencia con centro en el origen y radio la hipotenusa de ese triángulo se toca a la recta o eje de coordenadas en el punto B el cual es la ubicación exacta de $\sqrt{3}$. Siguiendo ese mismo esquema se logró representar a 2 (punto C) y a $\sqrt{5}$ (Punto D).

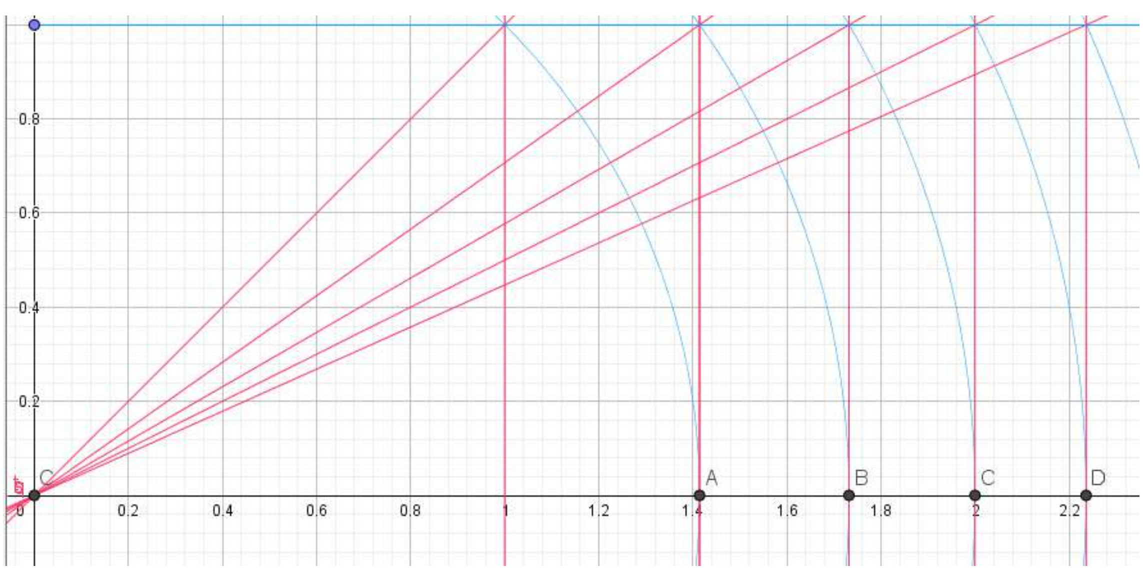


Figura 41: Ubicación exacta sobre la recta de los puntos A, B, C y D que corresponden a la raíz cuadrada de 2, la raíz cuadrada de 3, raíz cuadrada de y raíz cuadrada de 5 respectivamente.

Operaciones con números irracionales. Los ejemplos y ejercicios siguientes en su mayoría están planteados sobre la base de raíces. Para su solución hay que tener en cuenta las reglas de la potenciación tales como:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$
$$a^{\frac{n}{m}}.a^{\frac{p}{t}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{t}}$$

Suma de números irracionales. Para sumar dos o más números irracionales se toma en consideración si una raíz con igual radicando e igual índice aparece repetida, el resultado es esa raíz multiplicada por la suma o resta de los coeficientes. De igual manera hay que tomar en cuenta la propiedad que indica que si sumamos o restamos un número irracional a un entero, el resultado es un número irracional.

Ejemplo

Resolver $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

Respuesta

Los dos términos de la suma contienen a la raíz cuadrada de 2. La suma consiste en sumar los coeficientes y expresar el resultado multiplicado por la raíz cuadrada.

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (1 + 3)\sqrt{2}$$
$$4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 7\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$

Respuesta

En este caso hay términos que contiene a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$. Se agrupan los términos semejantes. Se suman o restan los coeficientes que acompañan a cada tipo de raíz. El resultado va a contener ambas raíces.

$$\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 7\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = -4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$
$$(-4 + 5)\sqrt{2} + (1 - 7 + 3)\sqrt{5}$$
$$\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 7\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = \sqrt{2} - 3\sqrt{5}$$

Ejemplo

Resolver: $3\pi + 5\pi - 2\pi$

Respuesta

Se trata de una suma algebraica de la constante irracional Pi. Como los tres términos son semejante, se suman o restan los coeficientes. El resultado contiene la constante pi.

$$3\pi + 5\pi - 2\pi = (3 + 5 - 2)\pi = 6\pi$$
$$3\pi + 5\pi - 2\pi = 6\pi$$

Ejemplo

Resolver: $4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$

Respuesta

Los tres términos contienen $\sqrt{7}$ por lo tanto para sumarlos se agrupan los coeficientes. El resultado contiene $\sqrt{7}$

$$4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = (4 - 3 - 8)\sqrt{7}$$
$$4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = -7\sqrt{7}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

Respuesta

La suma no contiene términos comunes, por lo tanto queda tal como está planteada.

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Producto de números irracionales. El conjunto de los números irracionales no es cerrado respecto a la multiplicación, por ejemplo $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son ambos números irracionales, sin embargo la multiplicación de ambos no es irracional. Se hace uso de la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. También de las propiedades de la potenciación

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{3}\sqrt{2}$

Respuesta

Es un producto de raíces cuadradas con radicandos diferentes. Una manera de resolver el producto es:

$$\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{(3)(2)} = \sqrt{6}$$

También es posible hacer la conversión de las raíces en potencias fraccionarias y aplicar las reglas de la potenciación.

$$\sqrt{3}\sqrt{2} = (3)^{\frac{1}{2}}(2)^{\frac{1}{2}} = (3.2)^{\frac{1}{2}} = (6)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{5}\sqrt[3]{7}$

Respuesta

Los índices y los radicandos son diferentes. Se busca el mínimo común múltiplo de los índices, conocido como mínimo común índice (mci). Se divide ese mci entre el índice de cada raíz y se elevan los radicando a esa potencia. Se conforma una sola raíz con índice igual al mci.

$$mci(2,3) = 6$$
Indice de $\sqrt{5} = 2 \rightarrow 6 \div 2 = 3$
Indice de $\sqrt[3]{7} = 3 \rightarrow 6 \div 3 = 2$
$$\sqrt{5}\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{(5)^3(7)^2} = \sqrt[6]{(125)(49)} = \sqrt[6]{6125}$$
$$\sqrt{5}\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{6125}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt[12]{x^5y^7}\sqrt[7]{4x^2y^3}\sqrt{3x}$

Respuesta

Los radicandos de cada raíz son diferentes y también lo son los índices de las raíces. Se calcula el mci entre los números 12, 7 y 2. Se divide ese mci entre cada índice. Se elevada cada radicando a el cociente de esa división. Se conforma una sola raíz con índice igual al mci.

$$mci(2,7,12) = 84$$
Indice de $\sqrt[12]{x^5y^7} = 12 \rightarrow 84 \div 12 = 7$
Indice de $\sqrt[7]{4x^2y^3} = 7 \rightarrow 84 \div 7 = 12$
Indice de $\sqrt{3x} = 2 \rightarrow 84 \div 2 = 42$
$$\sqrt[12]{x^5y^7}\sqrt[7]{4x^2y^3}\sqrt{3x} = \sqrt[84]{(x^5y^7)^7(4x^2y^3)^{12}(3x)^{42}}$$
$$= \sqrt[84]{(x^{35}y^{49})(4^{12}x^{24}y^{36})(3^{42}x^{42})}$$
$$= \sqrt[84]{3^{42}4^{12}x^{101}y^{85}}$$

Como las potencias tanto de la x como de la y son mayores que el índice de la raíz, se dividen entre 84 para simplificar. El cociente es la potencia que sale de la raíz, el resto es la potencia del radicando.

$$101 \div 84 = 1\ resto\ 17$$
$$85 \div 84 = 1\ resto\ 1$$

$$\sqrt[84]{3^{42}4^{12}x^{101}y^{85}} = xy\sqrt[84]{3^{42}4^{12}x^{17}y}$$

$$\sqrt[12]{x^5y^7}\sqrt[7]{4x^2y^3}\sqrt{3x} = xy\sqrt[84]{3^{42}4^{12}x^{17}y}$$

Ejemplo

Resolver: $(\sqrt[5]{3})(\sqrt[7]{3^4})$

Respuesta

Los índices son diferentes, para multiplicar se convierte cada raíz en potencias fraccionarias.

$$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$$
$$\sqrt[7]{3^4} = 3^{\frac{4}{7}}$$
$$\left(\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[7]{3^4}\right) = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)\left(3^{\frac{4}{7}}\right) = 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{7}} = 3^{\frac{7+20}{35}} = 3^{\frac{27}{35}}$$
$$3^{\frac{27}{35}} = \sqrt[35]{3^{27}}$$
$$\left(\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[7]{3^4}\right) = \sqrt[35]{3^{27}}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt[3]{5}\sqrt{7}$

Respuesta

Tanto los radicandos como los índices de las raíces son diferentes. Se calcula el mínimo común múltiplo de los índices (mci). Se divide el mci entre el índice de cada raíz. Se conforma una sola raíz de índice igual al mci y con potencias del radicando elevadas a los resultados de las divisiones del mci entre las potencias de las raíces.

$$mci(2,3) = 6$$

Índice de $\sqrt[3]{5} = 3 \rightarrow 6 \div 3 = 2$

Índice de $\sqrt{7} = 2 \rightarrow 6 \div 2 = 3$

$$\sqrt[3]{5}\sqrt{7} = \sqrt[6]{5^2 7^3} = \sqrt[6]{8575}$$
$$\sqrt[3]{5}\sqrt{7} = \sqrt[6]{8575}$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{2}\left(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\right)$

Respuesta

Se aplica la propiedad distributiva, aunque también se puede efectuar la suma dentro del paréntesis, ya que se trata de términos comunes.

$$\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right)$$
$$=3\sqrt{(2)(2)}+5\sqrt{(2)(2)}=3(2)+5(2)=6+10=16$$
$$\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)=16$$

Ejemplo

Resolver: $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

Respuesta

Se aplica la propiedad distributiva, el resultado es una suma ya que los radicandos son diferentes.

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}\right)=\sqrt{15}+\sqrt{21}$$
$$\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=\sqrt{15}+\sqrt{21}$$

División de números irracionales. Para la división de raíces con igual radicando, se expresa cada raíz como potencia fraccionaria y se aplican las propiedades de la potenciación. Cuando los radicandos son diferentes es poca la simplificación que se puede efectuar con éstos.

Ejemplo

Efectuar: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$

Respuesta

Como los radicandos en el numerador y en el denominador son iguales, se expresan las raíces como potencias fraccionarias y se aplica la regla de la división de potencias de igual base.

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{3}}}=5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{6}}$$
$$5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{5}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{8\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}$

Respuesta

El radicando 6 es un número compuesto cuyos factores primos son 2 y 3, por lo tanto la raíz del numerador puede descomponerse y producir una simplificación con la raíz del denominador. El coeficiente 8 se puede descomponer como 4.2 para simplificar con el coeficiente del denominador.

$$8\sqrt{6} = 8\sqrt{2.3} = 4.2\sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$\frac{8\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{4.2\sqrt{2}\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{8\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$

Respuesta

Los radicandos en el numerador y en el denominador son números compuestos, su expresión en factores primos contiene al número 2 como factor común. Al simplificar, las raíces generan números enteros en el numerador y en el denominador.

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2.3^2}}{\sqrt{2.5^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3^2}}{\sqrt{2}\sqrt{5^2}} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{-2\sqrt{50}}{-\sqrt{5}}$

Respuesta

El radicando del numerador se descompone en factores primos y produce una simplificación con el denominador. Los signos negativos en el numerador y denominador generan un valor positivo.

$$\frac{-2\sqrt{50}}{-\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{2.5^2}}{-\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}\sqrt{2.5}}{-\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{-2\sqrt{50}}{-\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{45\sqrt[5]{3^4}}{9\sqrt[7]{15}}$

Respuesta

El radicando del numerador está expresado como potencia, el radicando del denominador es un número compuesto que puede expresarse como el producto de factores primos. Se producen simplificaciones importantes con los radicandos al expresarlos como potencias fraccionarias. Con los coeficientes sucede igual.

$$\frac{45\sqrt[5]{3^4}}{9\sqrt[7]{15}} = \frac{5.9\sqrt[5]{3^4}}{9\sqrt[7]{3.5}} = \frac{5\left(3^{\frac{4}{5}}\right)}{\left(3^{\frac{1}{7}}\right)\left(5^{\frac{1}{7}}\right)} = \left(5^{1-\frac{1}{7}}\right)\left(3^{\frac{4}{5}-\frac{1}{7}}\right)$$

$$= \left(5^{\frac{6}{7}}\right)\left(3^{\frac{23}{35}}\right) = \sqrt[35]{3^{23}}\sqrt[7]{5^6}$$

$$\frac{45\sqrt[5]{3^4}}{9\sqrt[7]{15}} = \sqrt[35]{3^{23}}\,\sqrt[7]{5^6}$$

Ejemplo

Efectuar: $\frac{4\pi}{8\pi}$

Respuesta

El número irracional π aparece con la misma potencia en numerador y en el denominador, en consecuencia se simplifica y el resultado es un número racional.

$$\frac{4\pi}{8\pi} = \frac{4\pi}{2.4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2}$$

Ejercicios

1. Comparar los siguientes pares de números irracionales colocando los símbolos $<$ y $>$ según corresponda.
   a. $\sqrt[3]{5} \quad \sqrt[5]{7}$
   b. $\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{2}$
   c. $-\sqrt[7]{11} \quad -\sqrt[3]{5}$
   d. $\sqrt[3]{14} \quad \pi$
   e. $e \quad \sqrt{7}$
2. Efectuar:
   a. $\sqrt{5}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
   b. $\sqrt[3]{7}+\sqrt[5]{11}+4\sqrt[3]{7}+2\sqrt[5]{11}$
   c. $\sqrt{8}+5\sqrt{2}+\sqrt{32}$
   d. $5\varphi-4\pi+11\varphi+2\pi$
   e. $\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{2}$
3. Efectuar:
   a. $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$
   b. $\sqrt[3]{19}\sqrt[5]{38}$
   c. $(-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{24})$
   d. $(\sqrt{5}+\sqrt{11})(\sqrt{5}-\sqrt{11})$
   e. $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{7}\right)\left(\frac{5}{4}\sqrt[3]{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\sqrt{7}\right)$
4. Efectuar:
   a. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$
   b. $\frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{11}\right)\left(-\frac{4}{7}\sqrt[5]{11^2}\right)}{3\sqrt[3]{121}}$
   c. $\frac{(\sqrt[3]{5})(\sqrt[4]{25})(\sqrt[5]{50})}{\sqrt[3]{2}}$
   d. $\left(\frac{3}{14}\sqrt[5]{\pi}\right)\div\left(-\frac{6}{7}\sqrt[3]{\pi^2}\right)$
   e. $\frac{12\sqrt[3]{10}}{(3\sqrt{2})(2\sqrt[3]{5})}$

Números reales

Se finaliza el estudio de los conjuntos numéricos con este conjunto que actúa como conjunto universal del resto de los conjuntos estudiados en este capítulo. Esto significa que todos esos conjuntos mencionados están incluidos dentro del conjunto de los números reales.

$$N \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R}$$

Inclusive, los números irracionales son un subconjunto de los números reales.

Presentación Intuitiva.

Desde un punto de vista intuitivo diremos que los números reales son aquellos números que el ser humano utiliza a diario sin mayores pretensiones que la de expresar cantidades.

Se preguntará el lector acerca de la existencia de otros conjuntos numéricos adicionales a este conjunto, la respuesta es sí. El más conocido es el conjunto de los números complejos, sin embargo este tema no es motivo de estudio en este libro.

Notación para los números reales.

Los números reales se representan con la letra $\mathbb{R}$ y la manera más adecuada simbolizarlos es mediante la expresión

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{N} \vee x \in \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{Q} \vee x \in I\}$$

La cual es tomada de la lógica proposicional y resume lo indicado acerca de la pertenencia de un elemento a alguno de los conjuntos numéricos estudiados previamente en este capítulo y que lo hacen a la vez miembro del conjunto de los números reales.

Orden en los números reales.

Para ubicar a cualquier par de números reales sobre una recta, el mayor de estos debe estar a la derecha de la recta. De igual forma para conformar series crecientes de números reales, el menor se ubica hacia la izquierda de tal manera que sea el primero en leerse y el mayor de todos se ubica hacia la derecha y es el último en leerse.

En la Figura 42 se expresan los lineamientos que definen el orden en los números reales. Todo real positivo está ubicado a la derecha de cero, todo real negativo está a la izquierda de cero. Los números reales positivos se simbolización como $\mathbb{R}^{+}$, los números reales negativos como $\mathbb{R}^{-}$.

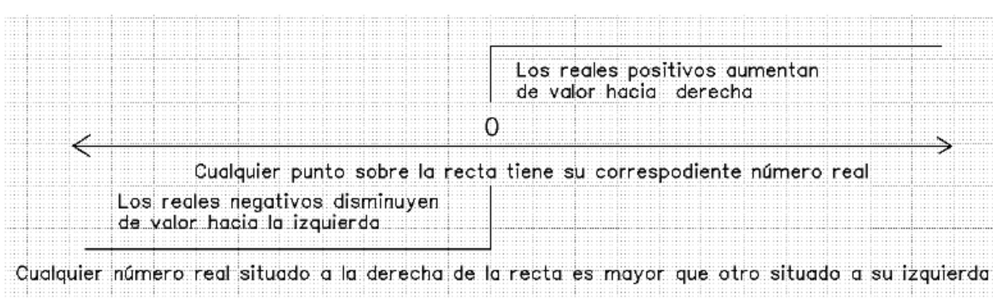


Figura 42: Orden en el conjunto de los números reales.

Si se tienen los números reales a, b, c y d, se cumplen las siguientes propiedades de la relación de orden:

Propiedad transitiva: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$. Si un número es menor que otro y ese otro a su vez es menor que un tercero entonces el primer número también es menor que ese tercero.

Propiedad aditiva: $a < b \Rightarrow a + d < b + d$. Si al comparar dos números reales el primero es menor que el segundo, entonces esta desigualdad se mantiene si se le suma el mismo valor a ambos números.

Propiedad multiplicativa: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c \vee a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$. Si al comparar dos números reales el primero es menor que el segundo, al multiplicar a ambos números por otro número real positivo, la desigualdad se mantiene. En cambio si se multiplican los dos números por un mismo número real negativo, entonces la desigualdad cambia de sentido.

Representación en la recta. Con los números reales, la recta que se ha estado considerando para representar los conjuntos numéricos, completa toda su longitud, se hace continua a lo largo de todo su recorrido, de tal forma que cualquier punto sobre ella es un número real. Dicha recta también es llamada recta real, puesto que sobre ella se representan los elementos de los conjuntos numéricos que conforman a los números reales, por lo tanto es correcto hacer referencia al término recta real desde el momento que se trabaja con los números naturales.

Operaciones con números reales. Evidentemente que todas las operaciones estudiadas con los conjuntos numéricos previos son aplicables en este conjunto y todas ellas son cerradas, es decir generan un resultado numérico que con toda seguridad se encuentra dentro del conjunto de los números reales.

Suma de números reales.

Ejemplo

Efectuar: $2+\frac{4}{5} + 1.98 + (-3)^2$

Respuesta

Se calcula la fracción generatriz del número decimal 1.98 y se desarrolla la potencia.

$$1.98 = \frac{198}{100}$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$2+\frac{4}{5} + 1.98 + (-3)^2 = 2 + \frac{4}{5} + \frac{198}{100} + 9 = \frac{1100+80+198}{100} = \frac{1378}{100} = \frac{689}{50}$$

$$2+\frac{4}{5} + 1.98 + (-3)^2 = \frac{689}{50}$$

Ejemplo

Efectuar: $4.32 + 8 + 2.693 + 3.2$

Respuesta

Ante la suma decimales y enteros se convierte cada uno de los sumandos a número decimal con igual cantidad de cifras decimales, tomando como referencia el número con mayor cantidad de decimales.

$$4.32 + 8 + 2.693 + 3.2 = 4.320 + 8.000 + 2.693 + 3.200$$
$$= 18.213$$
$$4.32 + 8 + 2.693 + 3.2 = 18.213$$

Ejemplo

Efectuar: $5 + \frac{6}{11} - \frac{1}{2} - 6.74$

Respuesta

El resultado exacto de esta operación se logra al convertir el número decimal 6.74 como una fracción y expresar el resultado también como fracción. Hay que tomar en consideración el hecho de que muchas fracciones generan decimales periódicos que al redondearlos producen resultados con pérdida de precisión, en consecuencia, es preferible expresarlos como fracción.

$$5 + \frac{6}{11} - \frac{1}{2} - 6.74 = 5 + \frac{6}{11} - \frac{1}{2} - \frac{674}{100} = \frac{5500+600-550-7414}{1100} = -\frac{1864}{1100} = -\frac{466}{275}$$

$$5 + \frac{6}{11} - \frac{1}{2} - 6.74 = -\frac{466}{275}$$

Producto de números reales.

Ejemplo

Efectuar: $(1.0325)(-3.642)$

Respuesta

De forma manual.

Se multiplica el último número de la segunda cifra por cada uno de los números de la primera cifra, comenzando por la derecha, luego el penúltimo y así sucesivamente hasta cubrir toda la cifra.

$2x5 = 10\ se\ escribe\ 0\ y\ se\ lleva\ 1$
$2x2 = 4\ más\ 1\ es\ igual\ a\ 5$
$2x3 = 6$
$2x0 = 0$
$2x1 = 2$

$$20650$$

$4x5 = 20 \; se \; escribe \; 0 \; y \; se \; lleva \; 2$
$4x2 = 8 \; más \; 2 \; es \; igual \; a \; 10, se \; escribe \; 0 \; y \; se \; lleva \; 1$
$4x3 = 12 \; más \; 1 \; es \; igual \; a \; 13, se \; escribe \; 3 \; y \; se \; lleva \; 1$
$4x0 = 0 \; más \; 1 \; es \; igual \; a \; 1$
$4x1 = 4$

$$41300$$

$6x5 = 30 \; se \; escribe \; 0 \; y \; se \; lleva \; 3$
$6x2 = 12 \; más \; 3 \; es \; igual \; a \; 15, se \; escribe \; 5 \; y \; se \; lleva \; 1$
$6x3 = 18 \; más \; 1 \; es \; igual \; a \; 19, se \; escribe \; 9 \; y \; se \; lleva \; 1$
$6x0 = 0 \; más \; 1 \; es \; igual \; a \; 1$
$6x1 = 6$

$$61950$$

$3x5 = 15 \; se \; escribe \; 5 \; y \; se \; lleva \; 1$
$3x2 = 6 \; más \; 1 \; es \; igual \; a \; 7$
$3x3 = 9$
$3x0 = 0$
$3x1 = 3$

$$30975$$

Se suman las cifras obtenidas de la siguiente forma:

```
      20650
     41300
    61950
   30975
   --------
   37603650
```

1.0325 tiene cuatro decimales y 3.642 tiene tres decimales, se cuenta 7 comenzando por el número más a la derecha del resultado del producto, en consecuencia el punto decimal se ubica entre 3 y 7.

$$3.7603650$$

Ahora solo falta el signo, más por menos es igual a menos

$$(1.0325)(-3.642) = -3.7603650$$

Con algún dispositivo de cómputo.

Es muy fácil efectuar productos de este tipo tanto con la calculadora científica como con software, de tal forma que solo basta escribir las cifras y solicitar que se multiplique para obtener el resultado.

Ejemplo

Efectuar: $(21.433)(2.24)$ y exprese el resultado con dos cifras decimales.

Respuesta

De forma manual.

Se realiza la multiplicación bajo el principio del ejemplo anterior; en este caso se hará de forma resumida:

$$
\begin{array}{r}
21433 \\
224 \\
\hline
85732 \\
42866 \\
42866 \\
\hline
4800992
\end{array}
$$

El primer factor tiene tres decimales y el segundo tiene dos decimales, el total es 5. Para ubicar el punto decimal se cuentan 5 lugares comenzando por el último número que es 2.

El resultado es:

$$48.0092$$

Como se quiere el resultado con dos cifras decimales, hay que sumarle 1 a el segundo cero después del punto decimal, ya que el número que le sigue es 9. Siempre que el número siguiente al que se va a redondear sea mayor o igual que 5 hay que sumarle 1, en caso contrario el número a redondear permanece igual.

El resultado redondeado es:

$$48.01$$

Con la calculadora.

En la mayoría de los modelos de la marca Casio, existe una tecla "MODO" o Mode - Setup, donde se puede configurar la calculadora para que redondear desde 0 a 9 decimales. Una vez presionada la tecla modo, buscar el número que corresponde a la opción FIX y luego presionar la tecla correspondiente al número de dígitos que se quiere redondear. En la Figura 43 se observa la pantalla para configuración (Setup) de una calculadora Casio. Presione la tecla 2 para que la calculadora muestre números decimales en vez de fracciones.

Figura 43: Pantalla para la configuración de la calculadora Casio Fx-82ES. Para redondear a 0-9 cifras se presiona el número 6.

En la Figura 44 se observa que la calculadora ofrece opciones para redondear entre 0 cifras decimales y 9 cifras decimales. Para el caso del ejemplo, presionar la tecla 2.

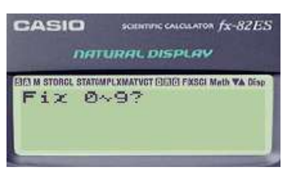


Figura 44: El usuario puede pulsar cualquier tecla del 0 al 9 en función de la cantidad de dígitos decimales que desea redondear.

Lograda la configuración de la calculadora, se introducen las cantidades a multiplicar, la calculadora redondea el resultado a dos decimales, tal como se muestra en la Figura 45.

Figura 45: Una vez determinados los dígitos a redondear, el usuario simplemente escribe las cantidades, el resultado se emite redondeado.

Si el usuario desea trabajar en modo normal, presionar la tecla modo (setup) para que la calculadora muestre la pantalla indicada en la Figura 44, luego presionar la tecla 8 (modo normal) y luego el número 1.

División de números reales. Se plantean algunos ejemplos donde se resuelven las divisiones por el método tradicional de a través del uso del lápiz y papel. Por supuesto que luego de conocer los fundamentos de la división está abierta la posibilidad para probar con los recursos tecnológicos existentes, de los cuales nunca se debe abusar y utilizar indiscriminadamente sin tener los fundamentos teóricos que permitan comprender la razón de la generación de determinados resultados.

Ejemplo

Efectuar: $352.67 \div 42$

Respuesta

Se multiplica el dividendo y el divisor por 100 con el fin de convertir el número decimal a entero.

$$35267 \div 4200$$

Se comparan los cuatro primeros números del dividendo con el divisor:

$$Es\ (3526 \geq 4200): No$$

Se comparan los cinco primeros números del dividendo con el divisor:

$$Es\ (35267 > 4200): Si$$

Como la respuesta es sí, se divide 35267 entre 4200.

Se prueba con un número que al multiplicarlo por 4 (primer número del divisor) sea menor o igual que 35. Se prueba con 8.

$8x0 = 0$, se compara con 7 y se registra la diferencia: **7**

$8x0 = 0$, se compara con 6 y se registra la diferencia: **6**

$8x2 = 16$, se compara con 22 y se registra la diferencia: **6**

$8x4 = 32$, se compara con 33 ya que se ha descontado dos unidades para el 22, en el paso anterior, se registra la diferencia: **1**

$$Es\ (1667 < 4200): Si$$

Como la respuesta es sí, el número **8** es la parte entera del cociente.

Se añade un cero a 1667 y se divide entre 4200 para calcular el primer número decimal.

$$16670 \div 4200$$

Se simplifican los últimos ceros del numerador y el denominador.

$$1667 \div 420$$

Se prueba con un número natural que al multiplicarlo por 4 resulte menor que 16. El más cercano es 3.

$3x0 = 0$, se compara con 7 y se registra la diferencia: **<u>7</u>**

$3x2 = 6$, se compara con 6 y se registra la diferencia: **<u>0</u>**

$3x4 = 12$, se compara con 16 y se registra la diferencia: **<u>4</u>**

$$Es\ (407 < 420): si$$

Como la respuesta es sí, el número **3** es el primer decimal del cociente. Si la respuesta hubiera sido no, se prueba con el número 4.

Se añade un cero al 407 y se divide entre 420 para calcular el segundo número decimal.

$$4070 \div 420$$

Se simplifican los últimos ceros en ambas cifras

$$407 \div 42$$

Se buscar un número que multiplicado por 4 resulte menor que 40. Se prueba con 9.

$9x2 = 18$, se compara con 27 y se registra la diferencia: **<u>9</u>**

$9x4 = 36$, se compara con 38 ya que se ha descontado 2 unidades para el 27 en el paso anterior, se registra la diferencia: **<u>2</u>**

$$Es\ (29 < 42): Si$$

Como la respuesta es sí, el número **9** es el segundo decimal.

Se añade un cero al número 29 y se divide entre 42 para calcular el tercer número decimal.

$$290 \div 42$$

Se busca un número que multiplicado por 4 resulte menor que 29. Se prueba con 7.

$7x2 = 14$, se compara con 20 y se registra la diferencia: 6

$7x4 = 28$, se compara con 27 ya que se ha descontado 2 unidades para el 20, la diferencia es negativa, por lo tanto hay que probar con un número menor que 7.

$6x2 = 12$, se compara con 20 y se registra la diferencia: **<u>8</u>**.

$6x4 = 24$, se compara con 27 y se registra la diferencia: **<u>3</u>.**

$$Es\ (38 < 42): Si$$

Como la respuesta es sí, el número **6** es el tercer decimal.

Se añade un cero al número 38 y se divide entre 42 para calcular el cuarto número decimal.

$$380 \div 42$$

Se busca un número que multiplicado por 4 resulte menor que 38. Se prueba con 9.

$9x2 = 18$, se compara con 20 y se registra la diferencia: **<u>2</u>**

$9x4 = 36$, se compara con 36 ya que se ha descontado 2 unidades para el 20 en el paso anterior, se registra la diferencia: **<u>0</u>**.

$$Es\ (2 < 42): Si$$

Como la respuesta es sí, el número **9** es el cuarto decimal.

$$352.67 \div 42 = 8.3969$$

Estos pasos se escriben de manera abreviada así:

$$\begin{array}{r|l} 35267 & 4200 \\ \cline{2-2} 16670 & 8.3969 \\ 4070 & \\ 290 & \\ 380 & \\ 02 & \end{array}$$

Ejemplo

Efectuar: $75473 \div 21$

Respuesta

Se comparan los dos primeros números del dividendo con el divisor:

$$Es\ (75 \geq 21): Si$$

Como la respuesta es sí, se divide 75 entre 21.

Se prueba con un número que al multiplicarlo por 2 sea menor o igual que 7. Se prueba con 3.

$3x1 = 3$, se compara con 5 y se registra la diferencia: **2**.

$3x2 = 6$, se compara con 7 y se registra la diferencia: **1**.

$$Es\ (12 < 21): Si$$

Como la respuesta es afirmativa, el número **3** es parte entera del cociente.

Se añade el número 4 a 12 para formar 124 y se divide entre 21.

$$124 \div 21$$

Se prueba con un número que al multiplicarlo por 2 resulte menor que 12. El más cercano es 5.

$5x1 = 5$, se compara con 14 y se registra la diferencia: **9**.

$5x2 = 10$, se compara con 11 ya que se ha descontado una unidad para el 14 en el paso anterior, se registra la diferencia: **1**.

$$Es\ (19 < 21): Si$$

Como la respuesta es afirmativa, **5** es la segunda cifra del cociente.

Se añade 7 al 19 para formar 197 y se divide entre 21 para calcular la tercera cifra del cociente.

$$197 \div 21$$

Se busca un número que multiplicado por 2 resulte un número menor que 19. Se prueba con 9.

$9x1 = 9$, se compara con 17 y se registra la diferencia: **8**.

$9x2 = 18$, se compara con 18 y se registra la diferencia: **0**.

$$Es\ (8 < 21): Si$$

Como la respuesta es afirmativa, **9** es la tercera cifra del cociente.

Se añade 3 al 8 para formar 83 y se divide entre 21 para calcular la cuarta cifra del cociente.

$$83 \div 21$$

Se busca un número que multiplicado por 2 sea menor que 8. Se prueba con 3.

$3x1 = 3$, se compara con 3 y se registra la diferencia: **0**.

$3x2 = 6$, se compara con 8 y se registra la diferencia: **2**.

$$Es\ (20 < 21): Si$$

Como la respuesta es afirmativa, **3** es la cuarta cifra del cociente.

Se añade cero a 20 para forma 200 y se divide entre 21 para calcular la primera cifra decimal.

$$200 \div 21$$

Se busca un número que multiplicado por 2 sea menor que 20. Se prueba con 9.

$9x1 = 9$, se compara con 10 y se registra la diferencia: **1**.

$9x2 = 18$, se compara con 19 y se registra la diferencia: **1**.

$$Es\ (11 < 21): Si$$

Como la respuesta es afirmativa, **9** es la primera cifra decimal.

$$75473 \div 21 = 3593{,}9$$

Todos los pasos se resumen así:

```
75473 |21
124    3593.9
 197
  083
   200
    11
```

Propiedades de los números reales. Se resumen los axiomas indicados en las secciones previas. Los primeros cinco corresponden a las propiedades denominadas de cuerpo y se indican de manera general tanto para la suma como para el producto, las otras son propiedades de orden y la última es una propiedad presente solamente en los números reales, ellas son:

1. Propiedad conmutativa

$$a + b = b + a$$
$$a.b = b.a$$

2. Propiedad asociativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a.(b.c) = (a.b).c$$

3. Propiedad distributiva

$$a(b + c) = a.b + a.c$$

4. Existencia del elemento neutro

$$a + 0 = a$$
$$a.1 = a$$

5. Existencia de elementos inversos

$$a + (-a) = 0$$
$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

6. Ley de tricotomía
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow (a = b) \vee (a > b) \vee (a < b)$$
7. Producto de números reales de igual signo
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad Si\ \ a > 0 \wedge b > 0 \vee a < 0 \wedge b < 0 \rightarrow a.b > 0$$
8. Producto de números reales de diferente signo
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad Si\ \ a > 0 \wedge b < 0 \vee a < 0 \wedge b > 0 \rightarrow a.b < 0$$
9. Densidad de los números reales
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists\ c\ \in \mathbb{R}/\ \ a < c \wedge c < b$$

Ejemplo

Calcular el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de -57

Respuesta

Inverso aditivo =57, ya que $-57 + 57 = 0$
Inverso multiplicativo = $-\frac{1}{57}$, ya que $(-57)\left(-\frac{1}{57}\right) = 1$

Ejemplo

Aplicar la propiedad de densidad de los números reales e indicar al menos 3 números reales entre el par $(0.024; 0.026)$.

Respuesta

Entre los números reales dados hay infinitos números reales:
0.0241; 0.02465; 0.025.

Ejercicios

1. Efectuar:
   a. $4+\frac{3}{5} + 1.43 - 0.85$
   b. $(6 - 8) - (13.82 + 10.91)$
   c. $-\left(\frac{13}{11} - 10\right) - \left(\frac{6}{17} + 2\right)$
   d. $(-2)^5 + (-3)^2 - (-4)^3$
2. Efectuar:
   a. $\left(1 + \frac{3}{8}\right)\left(3 - \frac{4}{5}\right)$
   b. $(3^2 + 4^2)(5 - 7^2)$
   c. $(24.9765)(-12.764)$

d. $(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4^2})(\sqrt[3]{-12})$

3. Efectuar:
   a. $\frac{45}{39} \div 12$
   b. $\left(\frac{3}{5}\right) \div 4.58$
   c. $(-2357) \div (543)$
   d. $357.045 \div 324.12$
4. Calcular el inverso aditivo y el inverso multiplicativo
   a. 485
   b. -987
   c. $\frac{16}{29}$
   d. $-\frac{1}{9}$
5. Indique 5 números reales entre los pares de números reales dados
   a. $2\ y\ 3$
   b. -5 y -2
   c. 0.06 y 0.08
   d. -1.914 y -1.903

Resumen

- Se define un sistema de numeración como el conjunto de leyes, palabras y signos que tienen como fin la enunciación y representación de los números.
- En los sistemas de numeración posicionales el valor de un dígito depende de la posición donde se encuentre.
- El sistema de numeración decimal está constituido por números cuya base el número 10, cada 10 unidades conforman una unidad de orden superior, cada tres órdenes de unidad conforman una clase.
- La Real Academia Española recomienda que no debe utilizarse puntos ni comas para separar los grupos de tres dígitos en la parte entera de un número, sólo se admite el uso de un pequeño espacio en blanco.
- Un número decimal está conformado por un número entero y una parte no entera con un valor entre cero y uno.
- Se recomienda el uso del punto como separador de decimales.
- Los números binarios tienen como base al número dos.
- En el sistema de numeración octal, la base es el número ocho.
- La base del sistema de numeración hexadecimal es 16.
- El sistema de numeración romano utiliza caracteres alfabéticos para representar cantidades, ningún carácter debe estar repetido más de tres veces.
- Los conjuntos numéricos están dotados de las operaciones binarias de adición y multiplicación.
- Intuitivamente se puede afirmar que los números naturales son aquellos que se utilizan para contar.
- Los números naturales se dividen en números primos y números compuestos, los primeros son aquellos que son divisibles solamente entre sí y entre la unidad.
- El teorema fundamental de la aritmética expresa que todo número natural mayor o igual que uno puede ser expresado como el producto de números primos.
- Un divisor de un número natural es otro número natural que produce un residuo igual a cero al efectuar la división entre otro número natural.
- Un múltiplo de un número natural es el resultado que se obtiene al multiplicar es número por otro número natural.
- Un número entero no contiene partes decimales, pero si puede contener signos negativos o positivos.
- El valor absoluto de un número es su valor sin tener en cuenta el signo, representa la distancia desde ese número a cero.
- La potenciación es una forma abreviada de multiplica de forma repetida por un mismo número denominado base.
- Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente entre dos números enteros.
- La razón aritmética es la diferencia entre dos cantidades, la razón geométrica es el cociente entre dos cantidades.
- Una proporción es una igualdad entre dos razones geométricas.
- Los números irracionales son aquel conjunto numérico conformado por números que no se pueden expresar como el cociente entre dos enteros.

- Los números reales son aquellos números que el ser humano utiliza a diario sin mayores pretensiones que la de expresar cantidades.
- El inverso aditivo de un número es el mismo número con el signo cambiado, el inverso multiplicativo es igual a uno sobre el mismo número.

Términos Clave

- Sistema de numeración
- Conjunto numérico
- Sistema binario
- Sistema octal
- Sistema hexadecimal
- Sistema decimal
- Números romanos
- Números naturales
- Números primos
- Números compuestos
- Máximo común divisor
- Mínimo común múltiplo
- Números enteros
- Números racionales
- Razón
- Proporción
- Números irracionales
- Números reales

Ejercicios de Autoevaluación

1. Escribir en lenguaje natural cada cifra
   a. 45722
   b. 0.090002
   c. 854284.87
   d. 60000032
   e. 5.000026
2. Dados los números siguientes en el sistema decimal, realizar la conversión a: (a) sistema binario, (b) Sistema octal, (c) sistema hexadecimal.
   a. 45
   b. 1283
   c. 1025
   d. 38999
   e. 7992067
3. Convertir a números romanos o a números decimal según convenga
   a. 45
   b. $DXLIII$
   c. 600563
   d. $\overline{\overline{VII}}\,\overline{CCXXIV}III$
   e. 999000901
4. Descomponer los números en factores primos
   a. 780
   b. 2468
   c. 12986
   d. 295540
   e. 4670954
5. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo
   a. 472; 12840
   b. 546; 248
   c. 924; 480
   d. 4694; 10482
   e. 124950; 240755
6. Representar en la recta a los conjuntos
   a. $A = \{10, 14, 45, 60, 74\}$
   b. $B = \{-200, -150, -90, 100, 150\}$
   c. $C = \{1.0; 1.2; 1.5; 1.7; 1.8; 2.0\}$
   d. $D = \{2000, 2400, 2800, 3200, 4400\}$
   e. $E = \left\{-45, -\frac{30}{2}, -\frac{50}{5}, \sqrt{25}, 20\right\}$
7. Resolver
   a. $(-10 - 3)(5 - 7)$
   b. $\left[\left(5 + \frac{1}{2}\right)\left(4 - \frac{2}{3}\right)\right] + \left[20 + \left(\frac{3}{4} + 2\right)\left(\frac{5}{3} - 1\right)\right]$
   c. $(2^5 + 1)(3^4 + 2)$
   d. $\left(\frac{7}{9}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^4$

e. $\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{10}{3}+\frac{8}{5}\right)$

8. Una caja contiene 50 lápices color azul y 30 lápices color negro, calcular (a) razón de lápices negros a lápices azul, (b) razón de lápices azul a lápices negros.
9. Calcular el valor de x en las proporciones siguientes.
   a. $\frac{x}{10}=\frac{3}{4}$
   b. $\frac{-1}{4}=\frac{x}{5}$
   c. $\frac{10}{x}=\frac{50}{3}$
   d. $\frac{6}{7}=\frac{8}{x}$
   e. $-\frac{12}{5}=\frac{4}{x}$
10. Efectuar
    a. $\left(\sqrt[5]{4}\right)\left(\sqrt[7]{4}\right)$
    b. $\frac{5}{12}+\frac{9}{25}+\frac{7}{36}-\frac{2}{9}$
    c. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\left(\sqrt[7]{625}\right)$
    d. $\left(\frac{8}{9}\right)^3\left[\frac{4}{5}+7\left(\frac{1}{3}-2\right)\right]$
    e. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}+4\right)\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}-2\right)$

Bibliografía Recomendada

Alvares, J., Torres, J., López, J., De la Cruz, E., Tetumo, J. (2007). *Matemáticas básicas. Elementos de apoyo*. Universidad Juarez Autónoma de Tabasco: México.

Del Pozo, E., Díaz, Z., Fernández, J., Segovia, J. (2007). *Matemáticas fundamentales para estdios universitarios*. Delta: Madrid.

Camargo, L., García, G., Samper, C., Serrano, C. (2015). *Alfa 8 con estándares*. Norma: Bogotá.

Macías, María (s.f.). *Evolución histórica del concepto de número.* Recuperado de https://goo.gl/dyKzGW

Núñez, R. (2007). *Números racionales e introducción a los irracionales*. Iktus: España.

Tussy, A., Gustafson, R. (2007). *Matemáticas básicas*. Cengage Learning: España.

CAPÍTULO 4

Fundamentos de Algebra

Expresiones algebraicas
- Definición
- Reducción de términos semejantes
- Valor numérico de expresiones algebraicas

Polinomios
- Elementos
- Propiedades
- Operaciones

Productos notables
- Cuadrado de un binomio
- Suma por diferencia de dos cantidades
- Cubo de un binomio
- Producto de dos binomios con un término común.

Casos de factorización
- Factor común
- Trinomio cuadrado perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio de la forma x^2+bx+c
- Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.

Objetivos:

General

Resolver situaciones prácticas tomadas tanto de la vida real como de los procesos matemáticos relacionados con el álgebra haciendo énfasis en la solución de ecuaciones de una variable real.

Específicos

- Analizar las expresiones algebraicas considerando los elementos constitutivos de éstas y el valor numérico.
- Resolver situaciones prácticas relacionadas con los polinomios tomando en cuenta las operaciones básicas.
- Practicar el desarrollo y productos notables.
- Resolver casos de factorización de expresiones algebraicas.
- Resolver ecuaciones de primer y segundo grado tanto manualmente como con Software matemático.

Introducción

Mediante una expresión algebraica se realiza una generalización y un modelo matemático ya que ésta involucra al menos una variable y como tal es susceptible de cambio, asumir cualquier valor dentro de un rango permitido. Por supuesto que cuando se plantea un modelo estamos representando algún evento de la realidad, de tal manera que con las herramientas aportadas por el álgebra se pueden desarrollar proposiciones que una vez convertidas al lenguaje matemático son manipulables a través de un conjunto de reglas.

El recorrido académico que realiza un individuo lo lleva en todas sus etapas a involucrarse con las matemáticas las cuales le ofrecen las herramientas necesarias para poder afrontar con éxito situaciones que con toda seguridad encontrará en su transitar como ser en este mundo cambiante y lleno de oportunidades pero también de retos. Dentro de esas herramientas se encuentra el estudio de aritmética y del álgebra, bien sea de manera explícita o bajo otra denominación pero con los principios básicos de estas importantes ramas de las matemáticas.

En los capítulos previos se hizo lo posible por ejemplificar y plantear problemas bajo la óptica de la aritmética, se plantearon las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división más la potenciación y la radicación bajo el esquema de los conjuntos numéricos procurando no involucrarnos demasiado con variables representadas con letras del alfabeto tales como x, y o z. En el presente capítulo se tiene la oportunidad de estudiar los principios del álgebra, la cual es la parte de las matemáticas que nos brinda herramientas para hacer generalizaciones utilizando números, letra y signos.

Debe señalarse que a través del álgebra nos adentramos hacia la abstracción, hacia la capacidad de poder expresar la realidad con la ayuda de símbolos, aspecto que para muchos estudiantes se convierte en una situación problemática pero que sin embargo con un poco de cuidado y mucha práctica se transforma en algo divertido y agradable. Sobre todo en nuestros días, cuando las tecnologías de la información y la comunicación nos ofrecen alternativas al cálculo mediante papel y lápiz, única opción que disponían quienes les correspondió estudiar sin estos últimos medios de apoyo.

Por consiguiente, en el presente capítulo se estudia en primer lugar las expresiones algebraicas, luego los polinomios, las factorizaciones y los productos notables, para finalizar con las ecuaciones de primer y segundo grado. Para lograr los objetivos propuestos, algunas explicaciones consideradas importantes son resaltadas y la mayoría de ellas son apoyadas por programas de cálculo simbólico como Geogebra y Maxima, los cuales pertenecen a la categoría de software libre y por lo tanto pueden descargarse sin costo alguno de la web.

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una estructura conformada por letras, números, signos más o menos, combinados con por lo menos una de las operaciones siguientes: suma, resta, multiplicación o potenciación de exponente racional
Por ejemplo:

a. $2x$
b. $5x^2 + x + 1$
c. $\frac{4x^5}{7y}$
d. $\sqrt[3]{2x} + y + z$

Tipos de expresiones algebraicas

1. Expresiones algebraicas enteras. La variable está elevada a un número entero positivo solamente y aparece en el numerador. (Ejemplos a, b y c).
2. Expresiones algebraicas racionales. La variable está elevada a un número entero negativo y aparece en el numerador o a un número entero positivo pero aparece en el denominador. (Ejemplos d, e y f).
3. Expresiones algebraicas irracionales. Son aquellas expresiones donde al menos una de las variables está elevada a un exponente fraccionario o se encuentra dentro de una raíz. (Ejemplos g, h, i).

Ejemplos:

a. $5x^2 - 3x + 1$
b. $\frac{3}{4}y^5 + \frac{1}{2}x + 2x + 3y$
c. $\frac{x^7+2x^4+6x}{3}$
d. $\sqrt{21}y^2 + 11y^{-3}$
e. $35 - \frac{4}{2x}$
f. $\frac{5z^3+10z^2}{2y}$
g. $7x^2 + \frac{5}{9}x^{\frac{1}{3}}$
h. $8\sqrt[5]{xy} + x^2y$
i. $\frac{\sqrt{x}}{9} - \frac{1}{7}\sqrt[3]{x}$

Términos de una expresión algebraica

Una expresión algebraica está conformada básicamente por términos. Se define término como aquella expresión cuyas partes no se encuentran separadas por los signos más o menos.

Ejemplo

Identificar los términos que conforman la expresión algebraica

$$4xy^2 - \frac{3x}{2y}$$

Respuesta

La expresión algebraica

$$4xy^2 - \frac{3x}{2y}$$

Consta de dos términos que son $4xy^2; -\frac{3x}{2y}$

El término $4xy^2$ está a la izquierda del signo menos

El término $\frac{3x}{2y}$ está a la derecha del signo menos

Ejemplo

Señale los términos de la expresión algebraica

$$7\sqrt{x} + \frac{x^2}{4} - 10$$

Respuesta

La expresión algebraica

$$7\sqrt{x} + \frac{x^2}{4} - 10$$

Consta de tres términos que son $7\sqrt{x}$; $\frac{x^2}{4}$; -10

El término $7\sqrt{x}$ está a la izquierda del signo más.

El término $\frac{x^2}{4}$ se encuentra entre el signo más y el signo menos

El término 10 se encuentra a la derecha del signo menos.

Ejemplo

Señale los términos que conforma la expresión algebraica

$$-\frac{27x^3y^7}{13z^5}$$

Respuesta

La expresión algebraica

$$-\frac{27x^3y^7}{13z^5}$$

Consta de un solo término. Observe que el signo menos no está separando a alguna otra parte de la expresión.

Ejemplo

Identifique los términos que conformación la expresión algebraica

$$\sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

Respuesta

La expresión algebraica

$$\sqrt[3]{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$$

Consta de un solo término. Dentro de la raíz hay una suma de dos variables, sin embargo esa suma es el radicando.

Ejemplo

Identifique los términos de la expresión algebraica

$$\frac{x^3 + 3y}{z^2 + 1}$$

Respuesta

La expresión algebraica

$$\frac{\mathrm{x}^3 + 3\mathrm{y}}{\mathrm{z}^2 + 1}$$

Consta de dos términos ya que el numerador se puede expresar como la suma de dos fracciones con igual denominador.

$$\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{z}^2 + 1} + \frac{3\mathrm{y}}{\mathrm{z}^2 + 1}$$

Elementos constitutivos de un término. Un término consta a su vez de elementos que es conveniente identificar con el fin de adentrarnos en el lenguaje matemático. Observe el siguiente término.

$$-4x^3y$$

El signo del término es negativo
El coeficiente del término es 4
La parte literal o variables del término son *x* e *y*
Los exponentes de las variables son 3 y 1.

Ejemplo

Determine los elementos que constituyen el siguiente término:

$$\frac{\sqrt{5}x^7}{9}$$

Respuesta

Signo: Positivo
Coeficiente: $\frac{\sqrt{5}}{9}$
Variable: x
Exponente de la variable: 7

Ejemplo

Dada la expresión algebraica siguiente, determine los elementos que constituyen a cada término.

$$\frac{6}{7}y^3z^4 - \frac{xyz^3}{10} + 7$$

Respuesta

Se trata de una expresión algebraica de tres términos, revisemos cada uno de ellos.
Primer término: $\frac{6}{7}y^3z^4$
Signo: positivo
Coeficiente: $\frac{6}{7}$
Variables: y; z
Potencias: 3 y 4

Segundo término: $-\frac{xyz^3}{10}$
Signo: negativo
Coeficiente: $\frac{1}{10}$
Variables: x, y, z
Potencias: 1, 1, 3

Tercer término: 7
Signo: positivo
Coeficiente: 7
Variables: ninguna
Potencias: 0

Términos semejantes. Dos o más términos son semejantes si contienen a las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplo

El término $4x^2y^3$ es semejante con el término $-11x^2y^3$
Observe que la variable x tiene exponente 2 y la variable y tiene exponente 3 en los dos casos.

Ejemplo

El término $\frac{3}{7}y^5z^4$ es semejante con el término $\sqrt{2}y^5z^4$ el cual a su vez es semejante con el término $-124y^5z^4$
En los tres casos las variables son las mismas y tienen el mismo exponente.

Ejemplo

El término $54x^2y^2$ no es semejante al término $54xy^2$
Observe que el exponente de la variable x en el primer caso es 2 y en el segundo caso es 1.

Grado de un término. El grado de un término está definido por la suma de los exponentes de las variables que lo conforman.

Ejemplo

Determine el grado del término

$$\frac{7}{5}x^2y^3$$

Respuesta

El exponente de x es 2, el de y es 3 por lo tanto el grado del término es 5.

Ejemplo

Determine el grado del término

$$5^3y^4z^3$$

Respuesta

El exponente de y es 4 y el de z es 3, en consecuencia el grado del término es 7. El exponente del número no se considera para efectos de la determinación del grado.

Grado de una expresión algebraica

El grado de una expresión algebraica es el grado más alto de los términos que conforman la expresión.

Ejemplo

Determine el grado de la expresión algebraica

$$23x^3y - 12x^2y^2 + 15x^3y^5$$

Respuesta

El término que tiene el grado más alto es el tercero $15x^3y^5$ el cual tiene un grado igual a 8. Por lo tanto la expresión algebraica es de grado 8.

Expresiones algebraicas de acuerdo a los términos que contienen

Hay expresiones algebraicas que tienen nombres particulares en función del número de términos presentes.

Monomio: Expresión algebraica de un solo término (ejemplo a)
Binomio: Expresión algebraica de dos términos (Ejemplo b)
Trinomio: Expresión algebraica de tres términos (Ejemplo c)
Multinomio: Expresión algebraica de más de un término (Ejemplo d)
Polinomios: Expresión algebraica entera de más de un término (Ejemplo e).

Ejemplo

a. $\frac{6x^7}{5y^2z}$
b. $\frac{5}{7}xy^4 - \sqrt[5]{x^3y}$
c. $\frac{x^3}{4} - 10xy^2 - \frac{3}{8}$
d. $4\sqrt{xy} + \frac{3}{x} - x^{-3} + 1$
e. $-4x^3 + 10x - 2$

Valor numérico de una expresión algebraica

Al asignar un valor a la variable o variables que acompañan a cada término de una expresión algebraica, la estructura se convierte en numérica en su totalidad y en consecuencia se puede obtener un resultado que pertenece a cualquiera de los conjuntos numéricos estudiados.

Ejemplo

Dada la expresión algebraica

$$7x^3y^2 - 5xy^3$$

Calcule el valor numérico cuando $x = 3; y = -2$.

Respuesta

$$\begin{aligned} 7x^3y^2 - 5xy^3 &= 7(3)^3(-2)^2 - 5(3)(-2)^3 \\ &= 7(27)(4) - 15(-8) \\ &= 756 + 120 = 876 \end{aligned}$$

$$7x^3y^2 - 5xy^3 = 876\ si\ x = 3; y = -2$$

Calcule el valor numérico de la expresión algebraica siguiente si $x = -3, y = -4$

$$\frac{12x^3 + 2xy^4}{4 + x^2}$$

Respuesta

$$\begin{aligned} \frac{12x^3 + 2xy^4}{4 + x^2} &= \frac{12(-3)^3 + 2(-3)(-4)^4}{4 + (-3)^2} \\ &= \frac{12(-27) + 2(-3)(256)}{4 + (9)} \\ &= \frac{-324 - 1536}{13} = \frac{-1860}{13} \end{aligned}$$

$$\frac{12x^3 + 2xy^4}{4 + x^2} = -\frac{1860}{13}\ si\ x = -3; y = -4$$

Frases como expresiones algebraicas

En el lenguaje ordinario es común expresar frases como: (a) el doble de un número, (b) la quinta parte de una cosa, (c) el triple de la edad, entre otras que se requieren para transmitir la idea de cantidad o de número. Por lo tanto se requiere un adiestramiento básico para convertir la idea en una expresión algebraica que la represente simbólicamente y en consecuencia pueda registrarse de manera simbólica para facilitar operaciones propias del álgebra. De igual forma, se debe tener en cuenta la ayuda derivada de las reglas del lenguaje, específicamente lo establecido por la Real Academia Española.

En ese sentido, en el sitio web dl.rae.es, se observa que el adjetivo cuantificador numeral tiene varios significados y que existen varios tipos de numerales entre los que mencionamos dos: Numeral multiplicativo y numeral fraccionario. Se define al primer tipo como aquella expresión que surge al multiplicar una cantidad por un número natural por ejemplo *triple*. Los numerales fraccionarios expresan la división de un todo en partes, por ejemplo *un tercio*. En la tabla siguiente se indican esos numerales partiendo de los números cardinales.

Tabla 1

Tipos de numerales usados en frases como expresiones algebraicas.

Tipos de numerales		
Cardinales	multiplicativos	fraccionarios
Uno	Sencillo	Entero
Dos	Doble, duplo	Mitad, medio
Tres	Triple, triplo	Tercio
Cuatro	Cuádruple	Cuarto
Cinco	Quíntuple	Quinto
Seis	Séxtuple	Sexto
Siete	Séptuple	Séptimo
Ocho	Óctuple	Octavo
Nueve	Nónuplo	Noveno
Diez	Décuplo	Décimo
Once	Undécuplo	Onceavo
Doce	Duodécuplo	Doceavo
Trece	Terciodécuplo	Treceavo
Veinte	Veintuplo	Veinteavo

Tomando en cuenta los numerales indicados, se puede convertir a lenguaje simbólico matemático, las expresiones:

1. El triple de un número más 5.

   Sea x el número.

$$3x + 5$$

2. Un octavo de una cantidad más el triple de otra cantidad.

   Sea *x* una cantidad, *y* la otra cantidad.

$$\frac{1}{8}x + 3y$$

3. El peso de la bolsa es la doceava parte del peso de la persona que la transporta.

   Sea x el peso de la bolsa, y el peso de la persona.

$$x = \frac{1}{12}y$$

4. El séxtuple de una cifra más la mitad de la misma disminuida en 5.

   Sea *x* la cifra

$$6x + \left(\frac{x}{2} - 5\right)$$

5. Dos tercios de las ganancias aumentadas en 100

   Sea y las ganancias

$$\frac{2}{3}(y + 100)$$

6. La mitad de la edad de María más 15 años.
   Sea x la edad de María

$$\frac{1}{2}x + 15$$

7. La suma de tres números naturales consecutivos.
   Sea x el primer número natural
   El segundo número natural es $x + 1$
   El tercer número natural es $x + 2$

$$x + (x + 1) + (x + 2)$$

8. La octava parte de la herencia, menos la quinta parte de lo que tiene depositado en los bancos.

   Sea *x* el monto total de la herencia, *y* el total depositado en los bancos.

$$\frac{x}{8} - \frac{y}{5}$$

9. El triple del dinero invertido este año en el proyecto A más las dos terceras partes de lo invertido el año pasado en el proyecto B.

   Sea x el dinero invertido este año en el proyecto A, y lo invertido el año pasado en el proyecto B.

$$3x + \frac{2}{3}y$$

10. La doceava parte de lo que cuesta actualmente menos 50 bolívares.

    Sea x el costo actualmente.

$$\frac{x}{12} - 50$$

Ejercicios

1. Clasifique cada expresión algebraica de acuerdo al tipo y explique
   a. $x^{10} + 4y^4 - 3$
   b. $3x^{-2} + 1$
   c. $x^4y^{\frac{1}{3}} + 4xy$
   d. $\frac{2}{xy} + x - 5$
   e. $11x^2y^3 + 5xy^3 - 3x$
   f. $\frac{3x}{2y} - 8xy$
   g. $5\sqrt{x} + 6x$
   h. $7x^3 + 6y^2 - x^{\frac{1}{4}}$

2. Identifique los términos que conforma cada expresión algebraica
   a. $x + 4$
   b. $2x + 5y + 6$
   c. $\frac{x+y^3}{3}$
   d. $\sqrt[3]{4x + 10y^2}$
   e. $4x^4 - 5y$
3. Determine los elementos que constituyen cada término
   a. $\frac{4}{5}x$
   b. $\frac{3x^3-4x+1}{x^2-5}$
   c. $\sqrt{5x}$
   d. $-\frac{2}{5}x^4y^2$
   e. $-\frac{3}{4}x^{-3}yz$
4. Conforme pares de términos semejantes

a	$-x^3$	a	$5x^2y^5$
b	$\sqrt{7}x^2$	b	$15x^{-1}$
c	$8x^2y^5$	c	$\frac{x^3}{4}$
d	$\frac{xy^3z^2}{2}$	d	$\frac{3}{5}x^3y^2z^2$
e	$\frac{4}{x}$	e	$\frac{\sqrt{xy}}{3}$
f	$-x^3y^2z^2$	f	$-11x^5y$
g	$6\sqrt{xy}$	g	$-12xy^3z^2$
h	$-9x^5y$	h	$-2x^2$

5. Indique el grado de cada término
   a. $14x^2yz$
   b. xy
   c. $-3x^5y^2$
   d. $\frac{2x}{7}$
   e. -548
6. Indique el grado de cada expresión algebraica
   a. $x^2 - 5x^4 + 2x^5$
   b. $6xy + 11x^2y + 13xy^3$
   c. $\frac{4x^2+1}{3} + x^3$
   d. $3 + 7xyz^2 + 5x^2yz$
   e. $\frac{x+5x^2}{2x} + 5$
7. Calcule el valor numérico de cada expresión algebraica, dados los valores de las variables.

a. $2x^3 + 4x - 5 \qquad x = -5$
b. $7xy^3 + 8x^2y + 9x + 1 \quad x = -1 \quad y = 3$
c. $\frac{x^3y}{z} + 5xy^2 - 7x \quad x = -3 \quad y = -1 \quad z = 3$
d. $\sqrt{x-7} + 8xy \quad x = 16 \quad y = 4$
e. $\frac{x^3+5y+z}{2x+y} + x^3y^3z + 4xy \quad x = -2 \quad y = 2 \quad z = 4$

8. Convierta al lenguaje simbólico matemático las siguientes expresiones
   a. Las dos terceras partes más un quinto.
   b. El séptuple del monto invertido más 500.
   c. Un millón menos un duodécuplo de las ganancias del mes.
   d. Cuatro onceavos de segundos para reaccionar.
   e. El padre tiene el séptuple de la edad del hijo más tres años.

Polinomios

Un polinomio es una estructura algebraica entera, es decir todos los exponentes de las variables son números enteros positivos y éstas se encuentran ubicadas exclusivamente en el numerador del término.

Un polinomio está conformado por más de un término con las características indicadas, aspecto que lo distingue de un multinomio que también está constituido por más de un término pero en estos últimos pueden existir alguno o varios de ellos de tipo racional o de tipo irracional, según la clasificación de las expresiones algebraicas indicadas al comienzo de este capítulo.

Notación para los polinomios

Los polinomios se representan con las letras intermedias del alfabeto, generalmente en mayúscula, luego de esa letra se utiliza un paréntesis y dentro de ese paréntesis se escribe la variable o variables presentes en la estructura del polinomio.

Ejemplo

$$P(x) = x + 4$$

Respuesta

Se trata del polinomio identificado con la letra P y que contiene a la variable x. $P(x)$ Se lee “pe de equis”.

Ejemplo

$$Q(x, y, z) = 7x^2y^3z^2 - 3xy^4z^5$$

Respuesta

Se trata del polinomio identificado con la letra Q que contiene a las variables x, y, z. $Q(x,y,z)$ se lee "q de equis, ye, zeta".

Valor numérico de un polinomio

La idea es sustituir la variable o variables presentes en el polinomio por un número, esto convierte a la estructura del polinomio en una expresión que contiene solamente números y en consecuencia se pueden efectuar las operaciones propuestas y el resultado es un número.

Ejemplo

Dado el polinomio $P(x,y) = 11xy + 7x^2 - 8y^2 + 10$ calcule (a) $P(1,1)$, (b) $P(-1,2)$

Respuestas

a. $P(1,1) = 11(1)(1) + 7(1)^2 - 8(1)^2 + 10$

$$=11 + 7 - 8 + 10 = 20$$
$$P(1,1) = 20$$

b. $P(-1,2) = 11(-1)(2) + 7(-1)^2 - 8(2)^2 + 10$

$$= -22 + 7(1) - 8(4) + 10$$
$$= -22 + 7 - 32 + 10$$
$$= -54 + 17 = -37$$
$$P(-1,2) = -37$$

Ejemplo

Dado el polinomio $Q(y) = 25y^3 + 12y^2 - 15y - 8$ calcule (a) $Q(-3)$, (b) $Q(a^2)$

Respuestas

a. $Q(-3) = 25(-3)^3 + 12(-3)^2 - 15(-3) - 8$

$$= 25(-27) + 12(9) + 45 - 8$$
$$= -675 + 108 + 45 - 8 = -530$$
$$Q(-3) = -530$$

b. $Q(a^2) = 25(a^2)^3 + 12(a^2)^2 - 15(a^2) - 8$

$$25a^6 + 12a^4 - 15a^2 - 8$$
$$Q(a^2) = 25a^6 + 12a^4 - 15a^2 - 8$$

Se observa en ese último ejemplo que ante una entrada simbólica, dicho símbolo se mantiene en la salida. Es decir, el resultado de la operación no es solamente numérico.

Polinomios de una variable

Los polinomios de una variable tienen la estructura general siguiente

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde a_n, a_{n-1}, a_1 son los coeficientes de la variable elevada a la respectiva potencia. a_0 es el coeficiente para el exponente cero, conocido como término independiente.

Son ejemplos de polinomio de una variable los siguientes

a. $p(x) = 4x^5 - 11x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x + 3$
b. $q(y) = 8y^7 + 14y^3 - 20y^2 - 32$
c. $r(z) = \frac{3}{5}z^4 + \frac{6}{7}z^3 + z^2 + 9z + 2$
d. $s(x) = \frac{21x^{10} - 35x^7 + 15x^3 + 10}{7}$
e. $t(x) = x^2 - 1$
f. $u(x) = 7x + 2$

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio de una variable es el exponente más alto de la variable en ese polinomio.

En el caso a, el exponente más alto de la variable es 5, es decir se trata de un polinomio de quinto grado.

En el caso c, el exponente más alto de la variable es 4, es decir se trata de un polinomio de cuarto grado.

En el caso e, el exponente más alto de la variable es 2, es decir se trata de un polinomio de segundo grado.

En el caso f, el exponente más alto de la variable es 1, es decir se trata de un polinomio de primer grado.

Operaciones con polinomios

Las operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división estudiadas en los conjuntos numéricos, se efectúan también con los polinomios. De igual manera, al tratarse de elementos numéricos expresados de forma genérica a través de variables, las propiedades correspondientes a los sistemas numéricos aplican en dichas operaciones.

El uso de software para el cálculo simbólico ha evolucionado mucho últimamente, en tal sentido los ejemplos indicados serán resueltos de la manera tradicional y serán tratados en Geogebra y en Maxima, con su respectiva explicación.

Suma de polinomios. La suma de polinomios consiste eliminar símbolos de agrupación y luego agrupar términos semejantes. En el mismo sentido, la resta de polinomios consiste en multiplicar por menos uno el sustraendo y luego efectuar una suma.

Ejemplo

Dados los polinomios

$$P(x) = 3x^4 - 7x^2 + 10x$$
$$Q(x) = 15x^2 + 12x - 20$$

Se pide:

a. $P(x) + Q(x)$

b. $P(x) - Q(x)$

Respuestas

a. $P(x) + Q(x) = (3x^4 - 7x^2 + 10x) + (15x^2 + 12x - 20)$
Se eliminan los paréntesis y se marcan con símbolos idénticos los términos que son semejantes.

$$= 3x^4 - 7x^2 + 10x + 15x^2 + 12x - 20$$

Se suman coeficientes, teniendo en cuenta los signos los términos que están encerrados dentro de figuras idénticas (términos semejantes).

$$= 3x^4 + 8x^2 + 22x - 20$$
$$P(x) + Q(x) = 3x^4 + 8x^2 + 22x - 20$$

b. $P(x) - Q(x) = (3x^4 - 7x^2 + 10x) - (15x^2 + 12x - 20)$
Se eliminan los paréntesis tomando en consideración que el signo de los elementos del segundo paréntesis (sustraendo) debe invertirse. Luego se identifican los términos semejantes con alguna figura geométrica o rayas.

$$= 3x^4 - 7x^2 + 10x - 15x^2 - 12x + 20$$

Se suman o restan los coeficientes de los términos semejantes

$$= 3x^4 - 22x^2 - 2x + 20$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^4 - 22x^2 - 2x + 20$$

Ejemplo

Dados los polinomios

$$P(x) = \sqrt{7}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 6$$
$$Q(x) = \frac{5}{7}x^5 - \frac{3}{11}x^3 + \sqrt{3}x^2 - 10$$

Efectuar $Q(x) - P(x)$

Respuesta

$$Q(x)-P(x)=\left(\frac{5}{7}x^5-\frac{3}{11}x^3+\sqrt{3}x^2-10\right)-\left(\sqrt{7}x^3+x^2+\frac{3}{2}x+6\right)$$

$$=\frac{5}{7}x^5-\frac{3}{11}x^3+\sqrt{3}x^2-10-\sqrt{7}x^3-x^2-\boxed{\frac{3}{2}x}-6$$

$$=\frac{5}{7}x^5-\left(\frac{3}{11}+\sqrt{7}\right)x^3+\left(\sqrt{3}-1\right)x^2-16$$

$$Q(x)-P(x)=\frac{5}{7}x^5-\left(\frac{3}{11}+\sqrt{7}\right)x^3+\left(\sqrt{3}-1\right)x^2-\frac{3}{2}x-16$$

Solución con Geogebra. El software Geogebra es muy útil para resolver polinomios, la figura es la salida que genera el programa. En primer lugar se selecciona la opción cálculo simbólico (CAS) al cargar el programa como se muestra en la Figura 1.

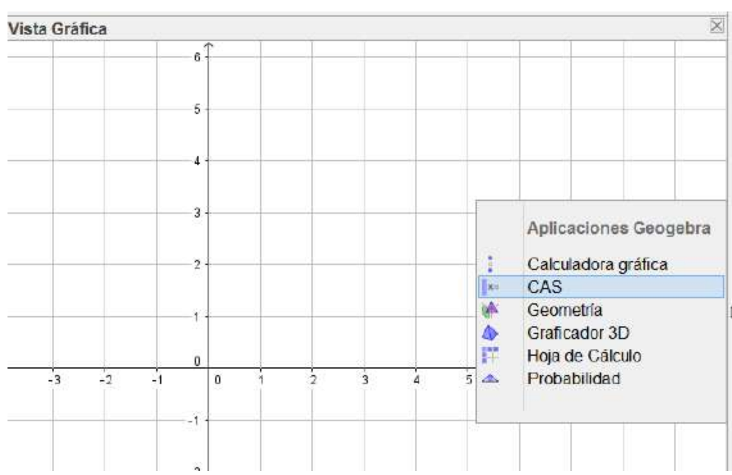


Figura 1: Ventana inicial de Geogebra, donde el usuario tiene la opción de seleccionar la aplicación deseada.

Luego en la ventana CAS se introduce la estructura de cada polinomio, es necesario activar el teclado virtual, sobre todo para los exponentes (Figura 2).

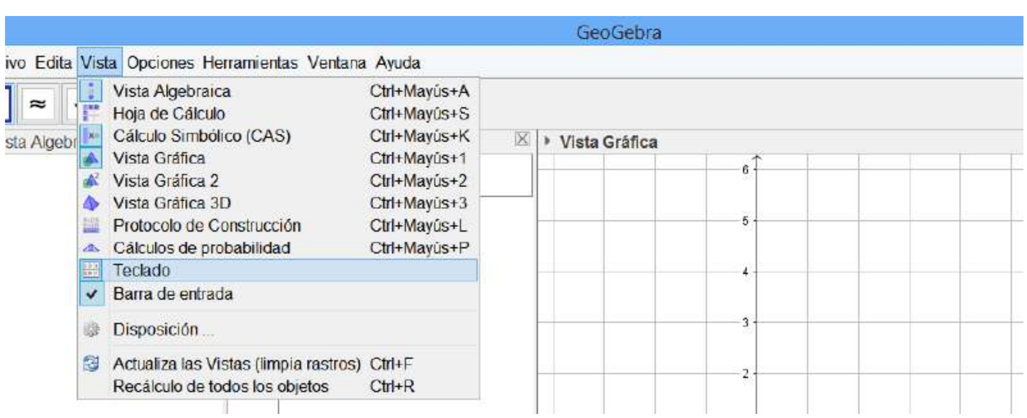


Figura 2: Con Geogebra se puede usar el teclado virtual de Java, el cual se activa en el menú Vista - Teclado.

Ubicar el teclado virtual en un lugar de la ventana donde pueda escribir fácilmente la estructura del polinomio. Para ello simplemente arrastrar con el botón izquierdo del ratón el teclado (Figura 3).

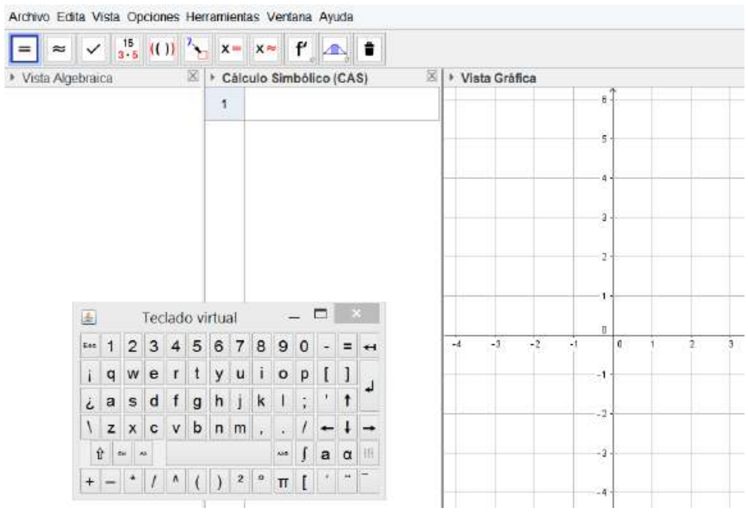


Figura 3: El teclado virtual puede ser desplazado con el ratón para dejar espacio para la escritura de las expresiones algebraicas.

Introducir los polinomios, en la línea 1 de la ventana cálculo simbólico escribir el polinomio tal cual aparece en la Figura 4. Comenzar con la letra P, luego el paréntesis y demás secuencia. Para la raíz cuadrada se escribe "raízn" y el sistema le indica donde escribir el radicando y el índice de la raíz. En el caso de las fracciones hay que encerrarlas en paréntesis. Al finalizar de escribir presionar la tecla *Enter*, seguidamente el sistema muestra la estructura mejorada del polinomio. Si no la muestra como en la figura, verificar que se encuentre activo el botón "Evaluación Exacta" ubicado en la parte superior izquierda con el símbolo =.

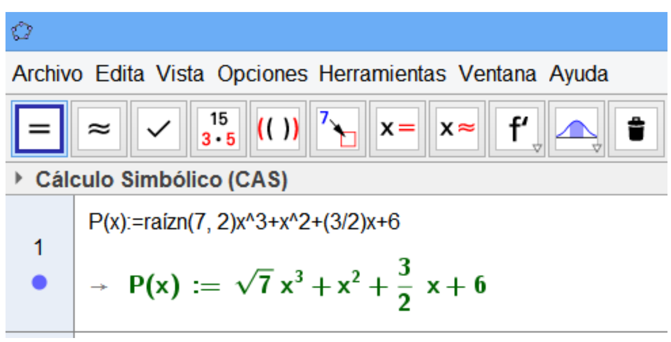


Figura 4: Escritura de la estructura del polinomio P(x) y manera en que Geogebra muestra el resultado.

Introducir el otro polinomio en la fila 2 y en la fila 3 introducir la operación requerida, en este caso $Q(x) - P(x)$. El programa genera una respuesta sin agrupar los términos semejantes.

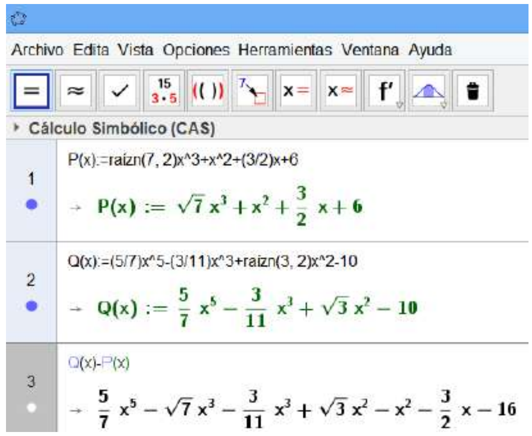


Figura 5: En la fila 2 de la ventana CAS se introdujo el polinomio Q(x) y en la fila 3 se muestra el resultado.

Para que Geogebra agrupe los términos que son semejantes, se debe pulsar el botón "Desarrolla" .Es el mismo resultado que se ha obtenido manualmente, la diferencia es que Geogebra desarrolló la fracción contenida en el segundo sumando. En la ventana derecha aparece la vista gráfica, donde se representa en un sistema de coordenadas cartesianas las funciones polinómicas las cuales pueden verse con mucho detalle haciendo el acercamiento correspondiente.

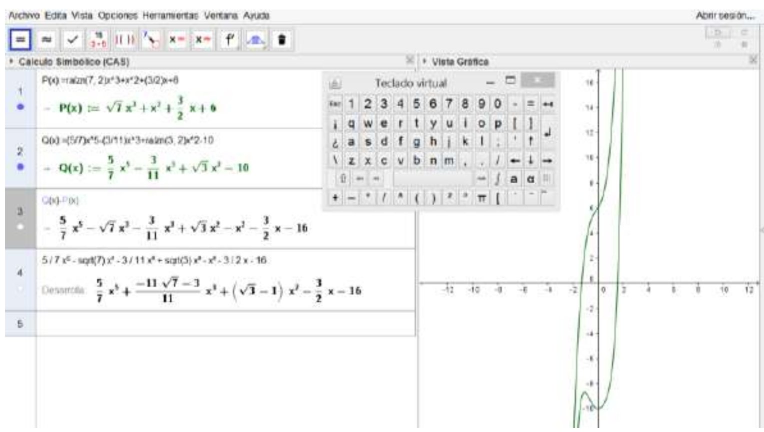


Figura 6: Resultado de la diferencia de los polinomios. A la derecha está la ventana Vista gráfica, donde Geogebra muestra la gráfica del polinomio resultante.

Solución con Maxima. Igual que Geogebra, Maxima es un software que puede manejar cálculo simbólico. Como sucede con la mayoría de esta categoría de software, mediante el uso de comandos los cuales están en el idioma inglés, se logra alcanzar el mayor potencial de los recursos, sin embargo la versión para Windows, llamada wxMaxima ofrece al usuario alternativas importantes con el uso del ratón.

Iniciar el programa y en la ventana de edición presionar la tecla Enter para comenzar a escribir la estructura del primer polinomio, la cual aparece en la Figura 7 en letra azul. La raíz cuadrada se genera con el comando sqrt( ), hay que indicar explícitamente el producto colocando un asterisco donde corresponda, la fracción se debe encerrar entre paréntesis, Se recomienda terminar la instrucción con punto y coma, aunque no es estrictamente necesario puesto que wxMaxima lo hace por nosotros.

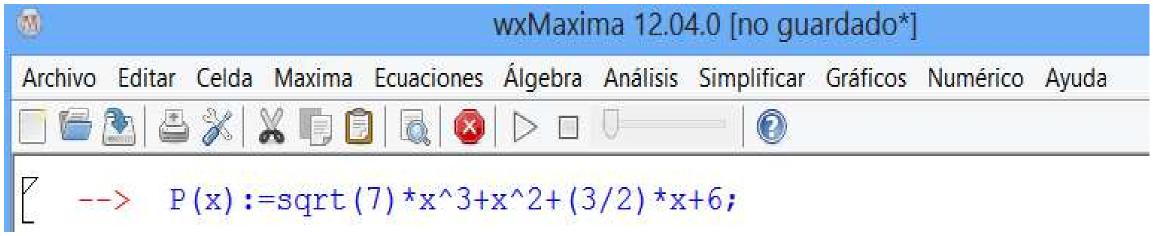


Figura 7: Luego de Presionar la tecla Enter, wxMaxima está listo para aceptar las instrucciones del usuario, en este caso se ha escrito la estructura del polinomio P(x).

Presionar la combinación de teclas *Shift* + *Enter*. Luego de una pausa muy breve, el programa presenta el polinomio escrito correctamente. Observar que a la izquierda hay dos paréntesis color rojo, el primero *%i1* significa que es la primera entrada (input 1), el segundo indica la primera salida (output 1). En cualquier momento el usuario puede referirse a ellas con la denominación del paréntesis y de esa manera se evita tener que escribir toda la estructura que está a la derecha en color azul o en color negro. Esta situación se muestra en la Figura 8. Presionar de nuevo *Enter* para disponer del cursor de entrada.

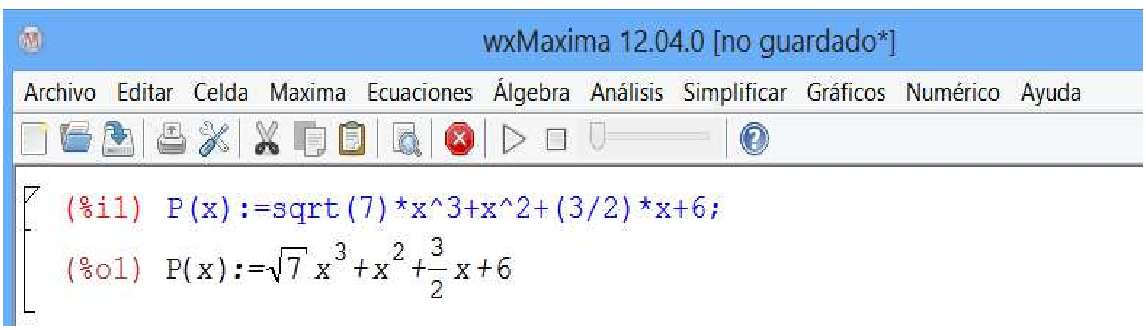


Figura 8: wxMaxima identifica las entradas del usuario con %i más un número, la salida la identifica con %o más un número.

Luego de escribir la estructura del polinomio $Q(x)$, finalizar con punto y coma y presionar Shift+Enter, se observa tanto la entrada 2 como la salida 2 (Figura 9).

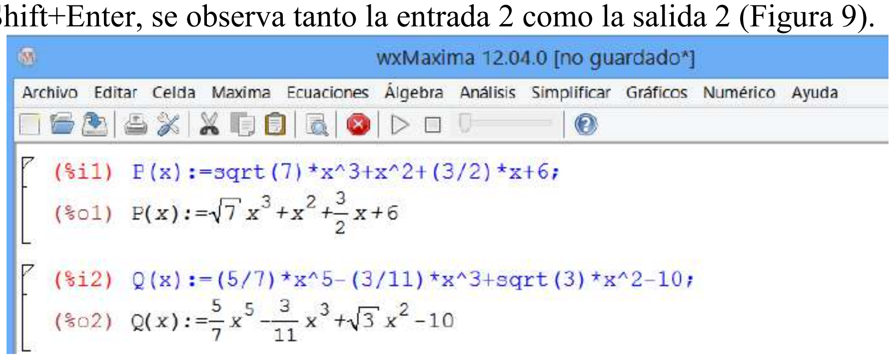


Figura 9: Se observan las dos entradas del usuario y las dos salidas generadas por wxMaxima.

Una vez que se encuentran cargados en memoria los dos polinomios, se pueden efectuar diversas operaciones algebraicas con ellos. En el caso que nos ocupa, presionar la tecla *Enter* para tener acceso al cursor de entrada que consiste en una flecha roja horizontal, se escribe la diferencia entre los dos polinomios y se presiona *Shift+Enter*. El software genera su respuesta %o3. La diferencia con el resultado manual o de Geogebra se debe a que no ha agrupado los términos semejantes.

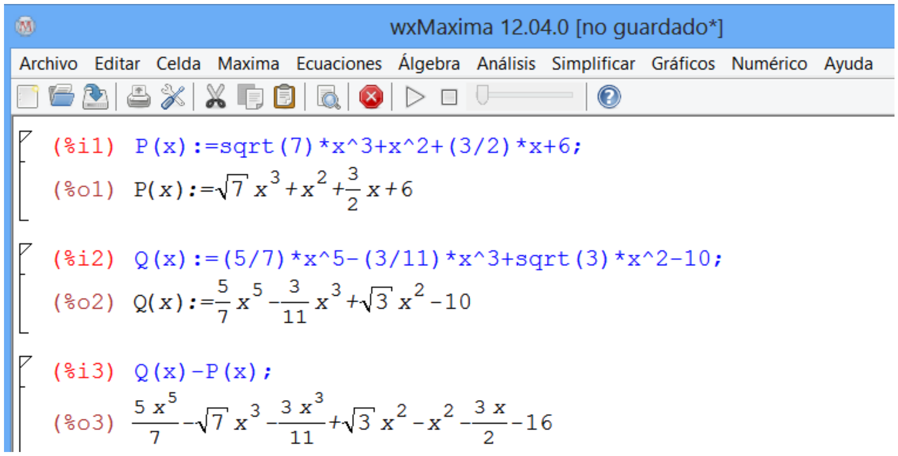


Figura 10: Se presiona la tecla Enter para poder ingresar la resta de polinomios, el software genera la salida 3 con el resultado de la operación sin agrupar los términos semejantes.

Existen opciones para agrupar los términos semejantes de este resultado, una de ellas es utilizar el menú “Simplificar” – “Simplificar radicales” (Figura 11).

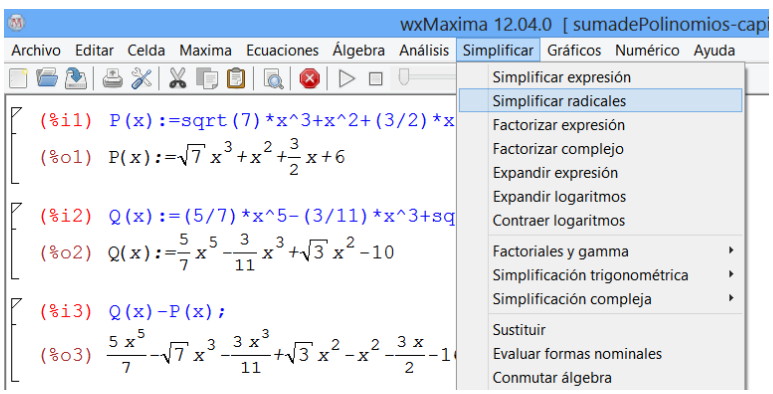


Figura 11: Una opción para simplificar la expresión algebraica.

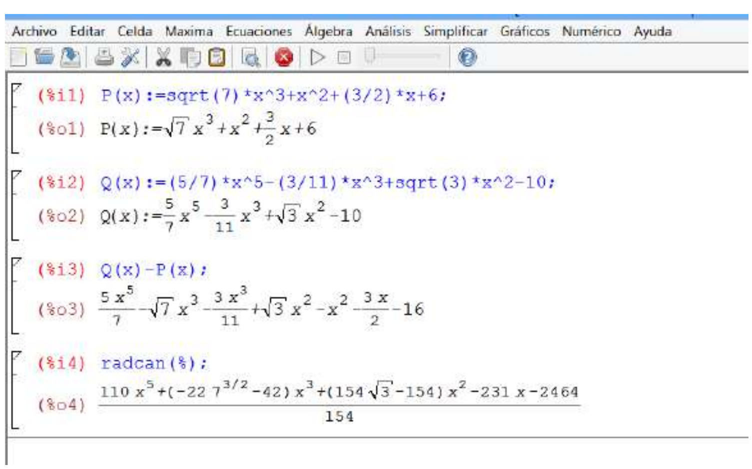


Figura 12: Resultado de la operación de resta de polinomios luego de la simplificación.

Maxima realiza la simplificación e indica el resultado en forma canónica, es decir en la forma normal en que se debería expresar una fracción, para ello se calculó el mcm de los divisores y la raíz numérica fue convertida como una potencia fraccionaria.

Observemos una característica importante de *Maxima* en la última operación. El comando para simplificar radicales *radcan* está seguido de un paréntesis que contiene el símbolo %. Dicho símbolo puede usarse en un comando para hacer referencia a la última salida; es decir que idéntico resultado se hubiera obtenido si se escribe *radcan(%o4)*. Esa característica es aprovechada en *wxMaxima* para procesar requerimientos del usuario a través del Menú activado con el ratón, tal como se hizo en esta ocasión. Si se hubiera usado la instrucción "Simplificar expresión" en la ventana mostrada en la Figura 11 se hubiera logrado el mismo resultado.

Producto de polinomios. En el producto de polinomios se utiliza con mucha frecuencia la regla de las potencias, de los signos y la propiedad distributiva. El lector debe también considerar el hecho de que dispone de herramientas informáticas que le ayudan en su proceso de aprendizaje, al poder verificar con ellas los resultados obtenidos manualmente.

Ejemplo

Se tienen los polinomios $Q(x) = 7x^2 + 3x \quad R(x) = -4x^3 + 2x$. Se pide efectuar $Q(x).R(x)$.

Respuesta

$$\begin{gathered} Q(x).R(x) = (7x^2 + 3x)(-4x^3 + 2x) \\ = (7x^2)(-4x^3) + (7x^2)(2x) + (3x)(-4x^3) + (3x)(2x) \\ = -28x^5 + 14x^3 - 12x^4 + 6x^2 \\ Q(x).R(x) = -28x^5 - 12x^4 + 14x^3 + 6x^2 \end{gathered}$$

Ejemplo

Dados los polinomios $P(y) = \frac{4}{5}y^5 - \frac{3}{7}y^3 + \frac{3}{8}y \;\; Q(y) = \frac{11}{12}y^3 - \frac{7}{9}y^2 + \frac{3}{5}y$
Se pide efectuar $P(y).Q(y)$

Respuesta

$$\begin{gathered} P(y).Q(y) = \left(\frac{4}{5}y^5 - \frac{3}{7}y^3 + \frac{3}{8}y\right)\left(\frac{11}{12}y^3 - \frac{7}{9}y^2 + \frac{3}{5}y\right) \\ = \left(\frac{4}{5}y^5\right)\left(\frac{11}{12}y^3\right) + \left(\frac{4}{5}y^5\right)\left(-\frac{7}{9}y^2\right) + \left(\frac{4}{5}y^5\right)\left(\frac{3}{5}y\right) \\ + \left(-\frac{3}{7}y^3\right)\left(\frac{11}{12}y^3\right) + \left(-\frac{3}{7}y^3\right)\left(-\frac{7}{9}y^2\right) + \left(-\frac{3}{7}y^3\right)\left(\frac{3}{5}y\right) \end{gathered}$$

$$+\left(\frac{3}{8}y\right)\left(\frac{11}{12}y^3\right)+\left(\frac{3}{8}y\right)\left(-\frac{7}{9}y^2\right)+\left(\frac{3}{8}y\right)\left(\frac{3}{5}y\right)$$

$$=\frac{44}{60}y^8-\frac{28}{45}y^7+\frac{12}{25}y^6-\frac{33}{84}y^6+\frac{21}{63}y^5-\frac{9}{35}y^4+\frac{33}{96}y^4-\frac{21}{72}y^3+\frac{9}{40}y^2$$
$$=\frac{11}{15}y^8-\frac{28}{45}y^7+\frac{12}{25}y^6-\frac{11}{28}y^6+\frac{1}{3}y^5-\frac{9}{35}y^4+\frac{11}{32}y^4-\frac{7}{24}y^3+\frac{9}{40}y^2$$
$$=\frac{11}{15}y^8-\frac{28}{45}y^7+\left(\frac{12}{25}-\frac{11}{28}\right)y^6+\frac{1}{3}y^5+\left(-\frac{9}{35}+\frac{11}{32}\right)y^4-\frac{7}{24}y^3+\frac{9}{40}y^2$$

$$P(y).Q(y)=\frac{11}{15}y^8-\frac{28}{45}y^7+\frac{61}{700}y^6+\frac{1}{3}y^5+\frac{97}{1120}y^4-\frac{7}{24}y^3+\frac{9}{40}y^2$$

Verifiquemos este resultado con Geogebra:

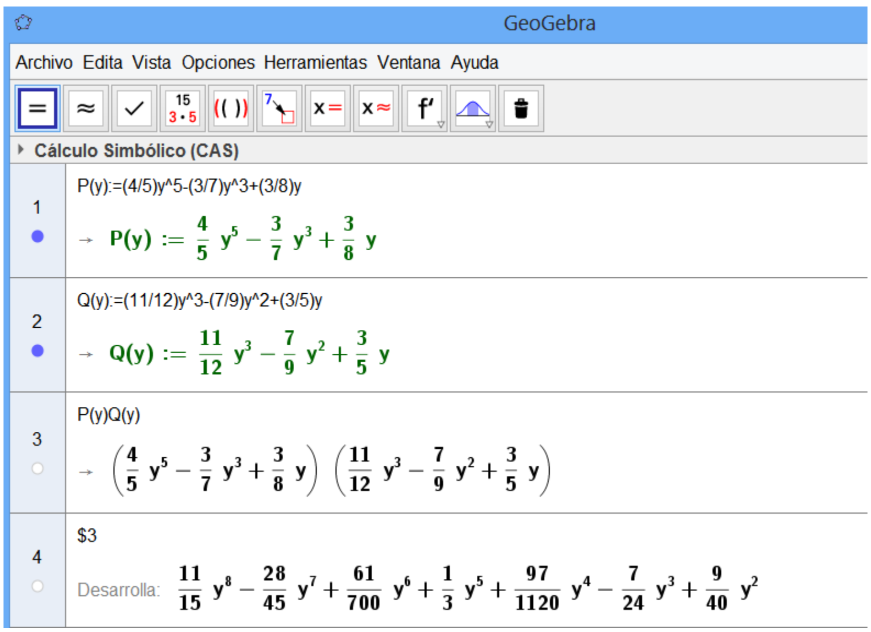


Figura 13: Producto de dos polinomios con la ayuda de Geogebra. La fila 3 de la ventana CAS muestra el resultado.

En las filas 1 y 2 de la figura se introdujeron las fórmulas de los polinomios, en la fila 3 se realizó el producto de los polinomios y el sistema mostró el producto indicado, es decir la estructura de cada polinomio encerrada en paréntesis. Se presionó el botón “Desarrolla” y la fila 4 muestra el resultado tal cual se obtuvo manualmente.

Verifiquemos el resultado con Maxima:

Se introducen las estructuras de los polinomios. Esto puede hacerse en una sola entrada escribiendo la fórmula correspondiente a $P(y)$ luego punto y coma, luego la estructura de de $Q(y)$ seguida de punto y coma y la combinación de las teclas *Shift + Enter*. El programa genera dos salidas *(%o1)* y *(%02)* correspondientes a cada polinomio. Presionar Enter y escribir el producto de los polinomios, punto y coma y *Shift+Enter*; se produce la salida 3 *(%o3)* en la cual aparece el producto indicado. Con el ratón se va al menú Simplificar – Expandir expresión, el programa genera el comando *expand(%)* que significa expandir la última salida y produce la salida 4 *(%o4)*, la cual es la respuesta que se obtuvo de manera manual y con Geogebra.

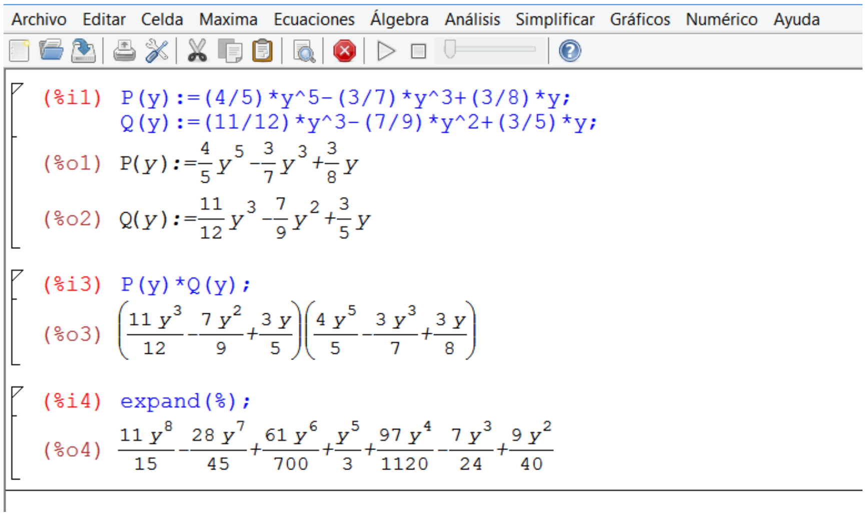


Figura 14: Uso de wxMaxima para efectuar el producto de dos polinomios.

Ejercicios

1. Sume los siguientes polinomios
   $p(x,y) = 4xy + 10x^2y - 6xy^2$
   $q(x,y) = -5xy + 2xy^2$
2. Dados los polinomios
   $p(x,y,z) = 11x^5y^4z + 3xy^5z^3 - 4x^2y^2z^2$
   $q(x,y,z) = 4x^2y^2z^2 + 3x^5y^4z$
   Efectuar
   a. $p(x,y,z) + q(x,y,z)$
   b. $p(x,y,z) - q(x,y,z)$
   c. $q(x,y,z) - p(x,y,z)$
3. Dados los polinomios
   $p(x) = 45x^3 - 5x^2 - 20x + 11$
   $q(x) = 6x^5 + 10x^4 - 2x^2 - 4$
   $r(x) = 23x^4 + 12x^2 + x + 10$
   Efectuar:
   a. $p(x).q(x)$
   b. $q(x).r(x)$
   c. $p(x).r(x)$
   d. $p(x).q(x).r(x)$

División de polinomios. Se parte de la división de monomios, para luego dividir polinomios entre monomios y finalizar con la división de dos polinomios. Se recuerda que cuando la división es exacta el residuo es igual a cero. Los Elementos de la división son: dividendo, divisor, cociente y residuo.

Ejemplo

En la división, expresada como fracción

$$\frac{3x^2}{3x} = x$$

El dividendo es $3x^2$, el divisor es $3x$ y el cociente es x. La división es exacta por lo tanto no existe residuo.

Ejemplo

En la división numérica

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

El dividendo *(D)* es el número 7, el divisor *(d)* es el número 3, el cociente *(c)* es el número 2 y el residuo *(r)* es el número1.

Se observa que

$$D = d.c + r$$

División de monomios. Se simplifican los coeficientes. Para las variables se aplica la regla de la división de potencias de igual base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Ejemplo

Efectuar

$$\frac{12a^2b^5c^4}{4ab^6c^2}$$

Respuesta

$$\frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{a^2}{a} = a^{2-1} = a^1 = a$$

$$\frac{b^5}{b^6} = b^{5-6} = b^{-1} = \frac{1}{b^1} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{c^4}{c^2} = c^{4-2} = c^2$$

$$\frac{12a^2b^5c^4}{4ab^6c^2} = 3a\frac{1}{b}c^2 = \frac{3ac^2}{b} \longrightarrow \frac{12a^2b^5c^4}{4ab^6c^2} = \frac{3ac^2}{b}$$

Ejemplo

Dividir $\frac{25x^3y^4z^2}{16x^7y^8z}$

Respuesta

$\frac{25}{16} = \frac{25}{16}$ Esta fracción no se puede simplificar, por lo tanto queda igual

$$\frac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$
$$\frac{y^4}{y^8} = y^{4-8} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$
$$\frac{z^2}{z} = z^{2-1} = z^1 = z$$
$$\frac{25x^3y^4z^2}{16x^7y^8z} = \frac{25}{16}\frac{1}{x^4}\frac{1}{y^4}z = \frac{25z}{16x^4y^4}$$
$$\frac{25x^3y^4z^2}{16x^7y^8z} = \frac{25z}{16x^4y^4}$$

División de un polinomio entre un monomio. Se considera una suma algebraica de fracciones cuyos numeradores son los términos del polinomio y denominador es el monomio, luego se aplican las reglas de la potenciación y se consideran lo signos de cada término.

Ejemplo

Divida los polinomios $P(x) \div Q(x)$ si
$$P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 10x + 9$$
$$Q(x) = 3x^2$$

Respuesta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^4 - 7x^3 + 10x + 9}{3x^2}$$
$$= \frac{5x^4}{3x^2} - \frac{7x^3}{3x^2} + \frac{10x}{3x^2} + \frac{9}{3x^2} = \frac{5}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{10}{3x} + \frac{3}{x^2}$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{10}{3x} + \frac{3}{x^2}$$

División de un polinomio entre otro polinomio. Se ordenan los polinomios en función de la variable o variables que contienen en orden decreciente, se coloca coeficiente cero si dicha potencia no está planteada en el polinomio original y luego se hace una división siguiendo el esquema tradicional.

Ejemplo:

Dados los polinomios
$$P(x) = 12x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 4$$
$$Q(x) = 3x^2 - 2x + 2$$
Efectuar $P(x) \div Q(x)$

Respuesta:
Se ordenan los polinomios

$$P(x) = 12x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 4$$
$$Q(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

Se hace la división de la manera tradicional

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 4 & 3x^2 - 2x + 2 \\
\hline
-12x^4 + 8x^3 - 8x^2 & 4x^2 + \frac{13}{3}x + \frac{20}{9} \\
\qquad 13x^3 - 2x^2 + 0x + 4 & \\
\qquad -13x^3 + \frac{26}{3}x^2 - \frac{26}{3}x & \\
\qquad\qquad \frac{20}{3}x^2 - \frac{26}{3}x + 4 & \\
\qquad\qquad -\frac{20}{3}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{40}{9} & \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{38}{9}x - \frac{4}{9} &
\end{array}
$$

Se busca un monomio que multiplicado por $3x^2$ resulte $\frac{20}{3}x^2$. Se multiplica el resto de los términos por este valor

Se suman los polinomios, El primer término se anula.

Cuando el grado del polinomio es menor que el grado del divisor, se detiene el proceso.

Se busca un monomio que multiplicado por $3x^2$ genere como resultado $13x^3$. Se multiplica el resto de los términos por este valor.

Tercer Paso

El resultado del producto se coloca debajo del término que tiene la misma potencia, con el sigo cambiado.

Se busca un monomio que multiplicado por $3x^2$ genere como resultado $12x^4$. Se multiplica este término por cada uno de los otros términos del divisor.

Primer Paso

Segundo paso

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 4x^2 + \frac{13}{3}x + \frac{20}{9} - \frac{38x}{27x^2 - 18x + 18} - \frac{4}{27x^2 - 18x + 18}$$

Solución con Geogebra. En la vista CAS de Geogebra se escribe en la fila 1 la estructura del polinomio P(x) y en la fila 2 la estructura del polinomio Q(x). Se escribe el comando División y se introducen los nombres de los polinomios. El software genera el conjunto solución, el cual está conformado por el polinomio cociente y el polinomio residuo, como se muestra en la Figura 15.

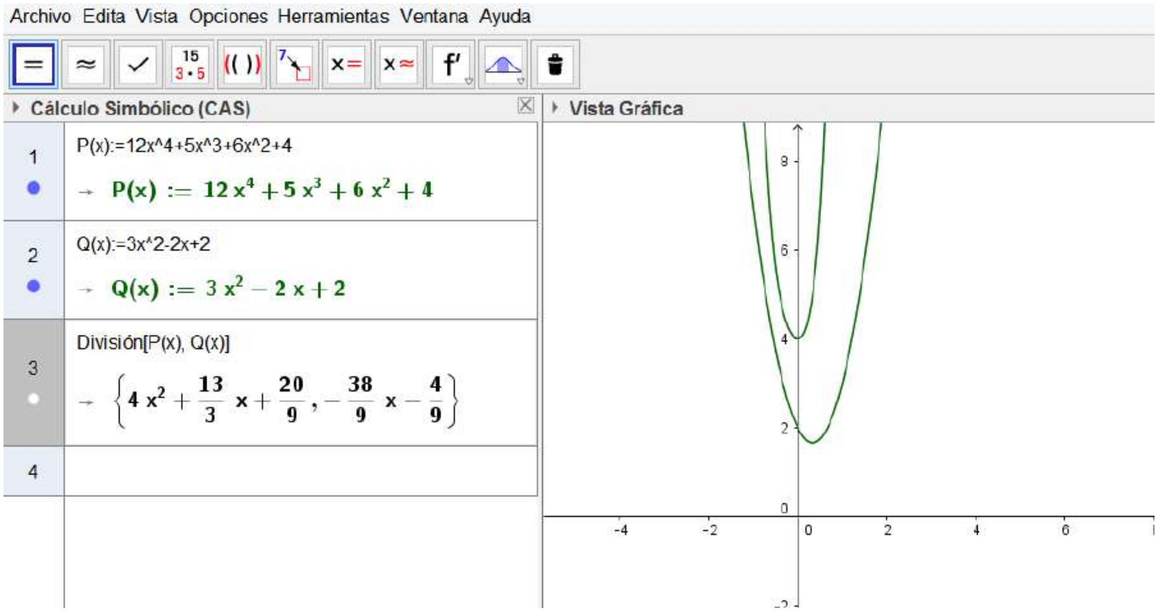


Figura 15: División de polinomios con Geogebra. Observe que el conjunto solución consta de dos elementos, el primero de ellos es el cociente de la división y el segundo es el residuo.

Geogebra expresa el resultado de la división de polinomios como un conjunto de dos elementos, el primero de ellos es el cociente y el segundo es el residuo. A la derecha se observa parte de la vista gráfica, donde están representados los dos polinomios.

Respuesta con Maxima. Maxima también expresa el resultado final de la división de dos polinomios como un conjunto solución, con el primer elemento igual al polinomio cociente y Segundo elemento igual al polinomio o término residuo.

Recuerde presionar la tecla *Enter* para comenzar a escribir la estructura de cada polinomio, Escribir P(x):=… presionar *Enter*, escribir Q(x):=…, presionar *Shift+Enter*; el software genera las salidas 1 y 2 identificadas con *(%o1)* y *(%o2)*.

Si requiere utilizar el símbolo de potencia y no lo tiene en el teclado físico de su computadora utilice el asterisco doble. Por ejemplo para generar x^5 escriba x**5. Observe que la entrada 3 *(%i3)* se utiliza el comando divide, el cual puede escribirse con el teclado o generarse haciendo clic en el menú Análisis – Dividir polinomios. El conjunto solución es expresado en forma canónica.

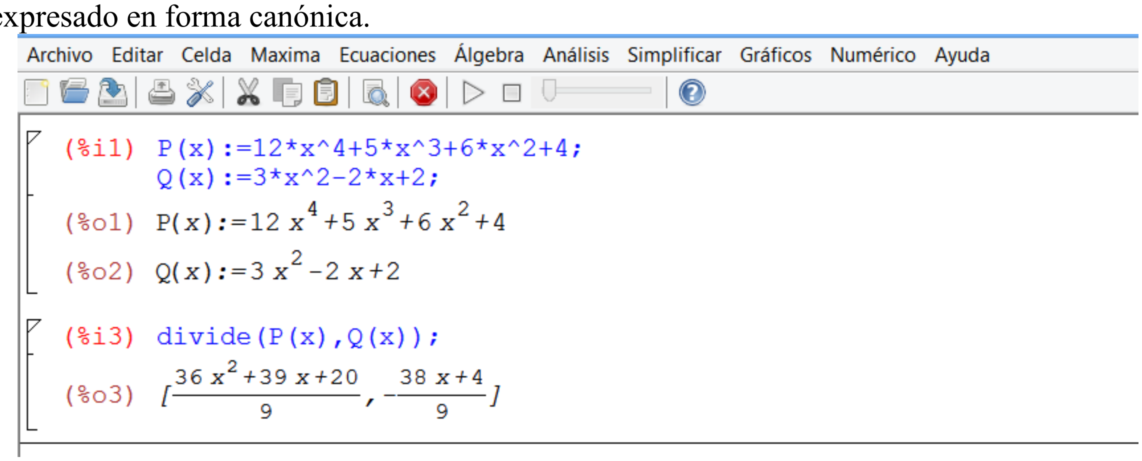


Figura 16: División de polinomios con wxMaxima, el resultado se expresa en forma canónica.

Ejemplo

Dados los polinomios

$$P(x,y) = 2x^2y + xy^2 + 3$$
$$Q(x,y) = x^2 - 3xy + 1$$

Respuesta

Se trata de un polinomio en dos variables. Se ordenan los polinomios en orden decreciente de una de las variables, en este caso ya se están ordenados con respecto a la variable x. Se divide de acuerdo a lo explicado en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2y \quad + \quad xy^2 \quad + \quad 3 & x^2 - 3xy + 1 \\ \cline{2-2} -2x^2y + 6xy^2 - 2y \qquad & 2y \\ 7xy^2 - 2y + 3 & \end{array}$$

$$CS = \{2y, 7xy^2 - 2y + 3\}$$

El primer elemento del conjunto solución es el cociente y el segundo elemento es el residuo.

Ejercicios

1. Realice manualmente las siguientes divisiones
   a. $\frac{bx^5y}{ab^3x^3y^4}$
   b. $\frac{5x^2y}{4y^2}$
   c. $\frac{3x^3y^4z^2}{9x^4y^2z}$
   d. $\frac{10a^7b^5}{50a^{10}b^2}$
   e. $\frac{bx^5y}{ab^3x^3y^4}$
2. Efectúe las siguientes divisiones de forma manual en primer lugar y luego verifique sus respuestas con ayuda de Geogebra. En el caso b proceda solo de forma manual.
   a. $(3x^4 + 7x + 2) \div (x^2 + 5)$
   b. $(15x^3y^2 + 4xy) \div (5x^2y - 3x)$
   c. $(10x^2 + 7x^3 - 3x + 2) \div (4x + 1)$
   d. $(4 + 3x^3 - 6x^4) \div (2x^2 - 4)$
   e. $(-5x^2 + 3 - x^5) \div (x^3 + 7)$

3. Efectúe las divisiones siguientes de forma manual, verifique sus respuestas b, c, d, e con Maxima.
   a. $(5x^3y^2 - 10xy - 12\ ) \div (4x^2y^2 - 3xy^2)$
   b. $\frac{12x^5+9x^2+3x}{4x^3+2}$
   c. $(1 - x + 7x^3) \div (x - 4)$
   d. $(-14y^4 + 9y^2 - 4y) \div (y^2 + 3y)$
   e. $(21z^7 + 42z^3 + 11z + 2) \div (7z^3 - 4z + 1)$

Productos notables

Existen estructuras polinómicas que aparecen formando parte de productos con tanta frecuencia que se han ganado el adjetivo de notables y consecuencia son el resultado de fórmulas que hacen que la verificación del producto no sea necesaria. Los productos notables más comunes son.

Cuadrado de la suma de dos términos

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo

Efectuar

$$(x + 3)^2$$

Respuesta

$$(x + 3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$$
$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Ejemplo

Efectuar

$$(4 + 3y)^2$$

Respuesta

$$(4 + 3y)^2 = (4)^2 + 2(4)(3y) + (3y)^2$$
$$= 16 + 24y + 9y^2$$

Cuadrado de la diferencia de dos términos

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo

Efectuar

$$(y-7)^2$$

Respuesta

$$(y-7)^2=(y)^2+2(y)(-7)+(-7)^2=y^2-14y+49$$
$$(y-7)^2=y^2-14y+49$$

Ejemplo

Efectuar

$$(5x^3-2y)^2$$

Respuesta

$$(5x^3-2y)^2=(5x^3)^2-2(5x^3)(2y)+(2y)^2$$
$$=5x^6-20x^3y+4y^2$$

Suma por diferencia de dos términos

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo

Efectuar

$$(x+5)(x-5)$$

Respuesta

$$(x+5)(x-5)=x^2-5^2=x^2-25$$

Ejemplo

Efectuar

$$(10xy-z^2)(10xy+z^2)$$

Respuesta

$$(10xy-z^2)(10xy+z^2)=(10xy)^2-(z^2)^2$$
$$=100x^2y^2-z^4$$

Cubo de una suma o diferencia de dos términos

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo

Efectuar

$$(y + 4)^3$$

Respuesta

$$\begin{aligned}(y + 4)^3 &= y^3 + 3(y)^2(4) + 3(y)(4)^2 + (4)^3 \\ &= y^3 + 12y^2 + 48y + 64\end{aligned}$$

Ejemplo

Efectuar

$$(3x^2 + 5y)^3$$

Respuesta

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5y)^3 &= (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(5y) + 3(3x^2)(5y)^2 + (5y)^3 \\ &= 27x^6 + 135x^4y + 225x^2y^2 + 125y^3\end{aligned}$$

Producto de dos binomios con un término semejante

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Ejemplo

Efectuar

$$(3x + 4)(5x + 2)$$

Respuesta

$$(3x + 4)(5x + 2) = (3)(5)x^2 + [(3)(2) + (4)(5)]x + (4)(2)$$
$$(3x + 4)(5x + 2) = 15x^2 + 26x + 8$$

Ejemplo

Efectuar

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{7}\right)$$

Respuesta

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)x^2+\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\right]x+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{5}x^2+\frac{131}{210}x+\frac{10}{21}$$
$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{7}\right)=\frac{1}{5}x^2+\frac{131}{210}x+\frac{10}{21}$$

Es de destacar el hecho de que estos productos notables facilitan el cálculo mediante lápiz y papel, de tal manera que en esta parte no se recomienda el uso de software a menos que se haga solamente para comprobar resultados.

Ejercicios

1. Efectuar los productos
   a. $(3x+2)(3x+2)$
   b. $(z+10)(z+10)$
   c. $(x+5)(x-5)$
   d. $\left(\frac{y+7}{3}\right)\left(\frac{y+7}{9}\right)$
   e. $(10x+4)(3x+5)$
   f. $(y+6)(y+6)(y+6)$
   g. $(12-y)(12-y)$
   h. $(x-11)(x-11)$
   i. $\left(\frac{3-z}{4}\right)\left(\frac{-z+3}{7}\right)\left(\frac{3-z}{10}\right)$
   j. $(5x^2+3)(5x^2+3)$
   k. $(1-4x^2)(1-4x^2)(1-4x^2)$
2. Complete el término (incluido el signo) que hace falta en el desarrollo del producto notable
   a. $(x+1)(x+1)=\quad ?\quad +2x+1$
   b. $(y+4)^3=\ y^3\quad ?\quad +48y+64$
   c. $(3x+5)^2=9x^2\quad ?\ +25$
   d. $(2-x)(2-x)=4\quad ?\ +x^2$
   e. $(4x^2-2)^2=\ ?\ -16x^2+4$
   f. $(3x+5)(3x-5)=\ ?\ -25$

g. $(4x+7)(3x+2) = \ 12x^2 \quad ? \ +14$
h. $(5y-6)(6y-1) = \ \ ? \ -41y+6$
i. $\left(\frac{x+4}{3}\right)\left(\frac{x+4}{7}\right) = \frac{x^2 \ \ ? \ +16}{21}$
j. $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2 = x^2 \ \ ? \ \ + \frac{4}{25}$
k. $\left(z-\frac{1}{3}\right)^3 = z^3 \quad ? + \frac{1}{3}z - \frac{1}{27}$

Casos de Factorización

En las operaciones con expresiones polinomios se requiere en algunos casos expresar los términos como un producto de al menos dos factores. Dichos factores generalmente contienen términos que están agrupados de acuerdo a fórmulas previamente establecidas y aplicables según sea el polinomio que se desea factorizar.

Recordemos que los elementos de un producto se denominan factores. En la figura los factores son *a* y *b*.

$$a.b = c$$

A continuación se indican algunos de esos tipos de factorización los cuales se explican con la ayuda de ejemplos.

Factorización por factor común

Se trata de uno de los casos de factorización más frecuente. La mayoría de las veces el factor común es un término que contiene al menos una variable de las presentes en la estructura de la expresión.

Ejemplo

Factorice el polinomio $4x^3 + 2x^2$

Respuesta

El polinomio $4x^3 + 2x^2$ está conformado por dos términos $4x^3$, $2x^2$ los cuales contienen a la variable x. El menor exponente de x es 2, en consecuencia x^2 es común. También cada término contiene a un coeficiente numérico, en el primer caso un 4 y en el segundo caso un 2. Observe que la descomposición en factores primos del número 4 es 2x2, por lo tanto el número 2 es común en ambos términos. En consecuencia el factor común es $2x^2$. Se habla de factor común, pero observe que en realidad es un término que surge de la combinación de los factores comunes presentes en el polinomio.

Una vez identificado el factor común se escribe ese factor y luego un paréntesis donde se divide cada término del polinomio entre dicho factor. Se aplica en las divisiones las reglas de la potenciación.

La x está en los dos términos, x^2 es común.

$$4x^3 + 2x^2 = 2x^2\left(\frac{4x^3}{2x^2} + \frac{2x^2}{2x^2}\right) = 2x^2(2x+1)$$

Se multiplica y divide el polinomio por $2x^2$

4 es un múltiplo de 2, Por lo tanto 2 es común

$$4x^3 + 2x^2 = 2x^2(2x+1)$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $5x^4y^3 - 20x^3y^2 + 100x^2y$

Respuesta

Tanto la variable x como la variable y están presentes en los tres términos. El menor exponente de *x* es 2 y el menor exponente de *y* es 1.

Máximo común divisor de los coeficientes $MCD(5,20,100)$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

El único factor primo común es 5, por lo tanto $MCD(5,20,100) = 5$

Los factores comunes en los tres términos que conforman el polinomio son $5x^2y$.

Se multiplica el factor común por el polinomio el cual se escribe entre paréntesis, cada término del polinomio se divide entre $5x^2y$.

$$5x^4y^3 - 20x^3y^2 + 100x^2y = 5x^2y\left(\frac{5x^4y^3}{5x^2y} - \frac{20x^3y^2}{5x^2y} + \frac{100x^2y}{5x^2y}\right)$$

Se simplifican las fracciones.

$$= 5x^2y(x^2y^2 - 4xy + 20)$$

$$5x^4y^3 - 20x^3y^2 + 100x^2y = 5x^2y(x^2y^2 - 4xy + 20)$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $3x^4y^5 + 11x^3y^3 + 13x^2y - 7xy$

Respuesta

La x e y son comunes y su menor exponente es 1 en los dos casos. Todos los coeficientes son números primos y ninguno aparece repetido, en consecuencia los factores comunes son xy.

$$3x^4y^5 + 11x^3y^3 + 13x^2y - 7xy = xy\left(\frac{3x^4y^5}{xy} + \frac{11x^3y^3}{xy} + \frac{13x^2y}{xy} - \frac{7xy}{xy}\right)$$
$$= xy(3x^3y^4 + 11x^2y^2 + 13x - 7)$$

$$3x^4y^5 + 11x^3y^3 + 13x^2y - 7xy = xy(3x^3y^4 + 11x^2y^2 + 13x - 7)$$

Ejemplo

Factorice la expresión algebraica $\frac{5x^4y^3}{6z^3} - \frac{7x^2y^2}{18z^2} + \frac{11x^2y}{36z}$

Respuesta

La observación de los términos que conforman la estructura indica que las tres variables (x, y, z) son comunes, el menor exponente de x es 2, el menor exponente de y es 1 y el menor exponente de z es 1. Se calcula el MCD(6,18,36)

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

En las tres descomposiciones se observa que los factores primos 2 y 3 están presentes en los tres números, por lo tanto el MCD(6,18,36)=6 y los factores comunes son $\frac{x^2y}{6z}$.

$$\frac{5x^4y^3}{6z^3} - \frac{7x^2y^2}{18z^2} + \frac{11x^2y}{36z} = \frac{x^2y}{6z}\left(\frac{\frac{5x^4y^3}{6z^3}}{\frac{x^2y}{6z}} - \frac{\frac{7x^2y^2}{18z^2}}{\frac{x^2y}{6z}} + \frac{\frac{11x^2y}{36z}}{\frac{x^2y}{6z}}\right)$$
$$= \frac{x^2y}{6z}\left(\frac{5x^2y^2}{z^2} - \frac{7y}{3z} + \frac{11}{6}\right)$$

$$\frac{5x^4y^3}{6z^3} - \frac{7x^2y^2}{18z^2} + \frac{11x^2y}{36z} = \frac{x^2y}{6z}\left(\frac{5x^2y^2}{z^2} - \frac{7y}{3z} + \frac{11}{6}\right)$$

Ejemplo

Factorice $5x(a+b)+6y(a+b)$

Respuesta

El factor común es el binomio dentro del paréntesis. Se procede como como en los ejemplos previos.

$$5x(a+b)+6y(a+b)=(a+b)\left(\frac{5x(a+b)}{(a+b)}+\frac{6y(a+b)}{(a+b)}\right)=(a+b)(5x+6y)$$

$$5x(a+b)+6y(a+b)=(a+b)(5x+6y)$$

Factorización trinomio cuadrado perfecto

Un cuadrado perfecto es un número que tiene una raíz cuadrada entera, por ejemplo 36 es un cuadrado perfecto ya que $\sqrt{36}$ es 6. Por el contrario 45 no es un cuadrado perfecto ya que $\sqrt{45}$ no es un número entero. Un trinomio cuadrado perfecto es un polinomio de tres términos que surgen al elevar al cuadrado un binomio.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\sqrt{a^2}=a \qquad \sqrt{b^2}=b$$

Dos veces el primer término por el segundo término (2ab)

Ejemplo

Factorice el polinomio $x^2+8x+16$

Respuesta

Para este polinomio no se puede aplicar la factorización por factor común ya que no existe tal factor, por ejemplo la *x* está presente en los dos primeros términos pero no está en el tercer término. El número 8 está presente en los dos últimos términos, pero no está en el primer término. Se prueba con la segunda opción para la cual se explica a continuación los pasos necesarios.

1. Se ordena el polinomio de manera decreciente
2. Se calcula la raíz cuadrada del primer término, el resultado es el primer término (*a*).
3. Se calcula la raíz cuadrada del tercer término, el resultado es el segundo término (*b*).
4. Se multiplica *2ab*, si este producto coincide con el segundo término del polinomio, entonces la factorización adquiere la forma $(a+b)^2$.

Veamos para el caso del polinomio planteado:

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente.
2. $\sqrt{x^2} = x$
3. $\sqrt{16}$=4
4. $2(4x) = 8x$ este producto coincide con el segundo término del polinomio, por lo tanto la factorización es $(x+4)^2$

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $49y^2 + 42y + 9$

Respuesta

Se realizan los pasos para verificar si se trata de un trinomio cuadrado perfecto.

1. Ordenar el polinomio de manera decreciente. En este caso el polinomio está ordenado.
2. Se calcula la raíz cuadrada del primer término. $\sqrt{49y^2} = 7y$.
3. Se calcula la raíz cuadrada del tercer término. $\sqrt{9} = 3$.
4. Se multiplica por dos el resultado de las operaciones realizadas en los puntos 2 y 3. $2(7y)(3) = 42y$. Este resultado coincide con el segundo término del polinomio, por lo tanto la factorización es $(7y+3)^2$

$$49y^2 + 42y + 9 = (7y+3)^2$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $100 - 220x + 121x^2$

Respuesta

1. Se ordena el polinomio de forma decreciente: $121x^2 - 110x + 100$
2. Se calcula la raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{121x^2} = 11x$
3. Se calcula la raíz cuadrada del tercer término: $\sqrt{100} = 10$
4. Se multiplica por 2 los resultados obtenidos en los pasos 2 y 3:

$$2(11x)(10) = 220x$$

Se observa que el producto coincide en valor absoluto con el segundo término.

$$121x^2 - 220x + 100 = (11x - 10)^2$$

Diferencia de Cuadrados

Como lo indica el nombre, se trata de un tipo de factorización que se aplica cuando existe una estructura algebraica que consta de dos términos elevados ambos al cuadrado y separados por el signo menos. La factorización es el producto de la suma de los términos por la diferencia de los mismos. Este tipo de factorización también se conoce como diferencia de cuadrados perfectos. Su forma general es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

El procedimiento para aplicar este tipo de factorización es:

1. Calcular la raíz cuadrada del primer término
2. Calcular la raíz cuadrada del segundo término
3. Expresar como una suma lo obtenido en el paso 1 y 2.
4. Expresar como una resta lo obtenido en el paso 1 y 2.
5. Multiplicar el factor conformado en el paso 3 con el factor obtenido en el paso 4.

Ejemplo

Factorice $x^2 - 64$

Respuesta

1. Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2} = x$
2. Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{64} = 8$
3. Suma: $(x+8)$
4. Resta: $(x-8)$
5. $(x+8)(x-8)$

$$x^2 - 64 = (x+8)(x-8)$$

Ejemplo

Factorice $100y^2 - 9$

Respuesta

1. Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{100y^2} = 10y$
2. Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{9} = 3$
3. Suma: $(10y+3)$
4. Resta: $(10y-3)$
5. $(10y+3)(10y-3)$

$$100y^2 - 9 = (10y+3)(10y-3)$$

Ejemplo

Factorice $(x+y)^2 - (x-y)^2$

Respuesta

1. Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{(x+y)^2} = (x+y)$
2. Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{(x-y)^2} = (x-y)$
3. Suma: $(x+y)+(x-y) = x+y+x-y = 2x$
4. Resta: $(x+y)-(x-y) = x+y-x+y = 2y$
5. $(2x)(2y)$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (2x)(2y) = 4xy$$
$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

Ejemplo

Factorice $25m^4n^6 - 4z^{10}$

Respuesta

1. Raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{25m^4n^6} = 5m^2n^3$
2. Raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{4z^{10}} = 2z^5$
3. Suma: $(5m^2n^3 + 2z^5)$
4. Resta: $(5m^2n^3 - 2z^5)$
5. $(5m^2n^3 + 2z^5)(5m^2n^3 - 2z^5)$

$$25m^4n^6 - 4z^{10} = (5m^2n^3 + 2z^5)(5m^2n^3 - 2z^5)$$

Factorización de la forma $x^2 + bx + c$

Es un trinomio donde solamente el primer término es un cuadrado perfecto con coeficiente 1. El tercer término se debe descomponer en dos factores, los cuales al sumarse deben ser igual al coeficiente del segundo término.

$$x^2 + bx + c$$

El coeficiente del primer término debe ser igual a 1.

Dos números cuyo producto es igual a este término.

Esos dos números al sumarse deben ser igual al coeficiente del segundo término.

Los pasos necesarios son:

1. Ordenar el polinomio en orden decreciente
2. Descomponer el tercer término en dos factores
3. Los dos factores del punto 2 al sumarse debe ser igual al coeficiente del segundo término.
4. Los factores determinados en el paso 2 y confirmados en el paso 3 conforman el producto de dos binomios con la variable del primer término como primer término en ambos casos.

Ejemplo

Factorice $x^2 + 7x + 10$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente.
2. El número 10 se puede descomponer en los siguientes pares de factores $(1, 10), (2,5)$.
3. $1 + 10 = 11$
   $2 + 5 = 7$
   La segunda suma da como resultado el coeficiente del segundo término.
4. $(x + 2)(x + 5)$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

Ejemplo

Factorice $x^2 - 12x + 32$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente
2. El número 32 se puede descomponer en varios pares de factores, hay que tener en cuenta que el signo de ambos factores es negativo ya que el signo del 32 es positivo y el signo del 12 es negativo. Veamos algunos pares de factores
$$(-1, -32), (-2, -16), (-4, -8)$$
3. $-1 - 32 = -33$
   $-2 - 16 = -18$
   $-4 - 8 = -12$
   El par $(-4, -8)$ cumple con la condición de que los factores deben sumar el coeficiente del segundo término.
4. $(x - 4)(x - 8)$

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8)$$

Ejemplo

Factorice $x^2 - 7x - 8$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente.
2. El signo del número 8 es negativo, por lo tanto los factores tienen signos diferentes. Los pares de factores en que se puede descomponer el número 8 son:
$$(-1,8), (1, -8), (-2,4), (2, -4).$$
3. $-1 + 8 = 7$

$1 - 8 = -7$
$-2 + 4 = 2$
$2 - 4 = -2$
Observe que el par que cumple con la condición de que la suma resulte -7 es el par $(1, -8)$.

4. $(x + 1)(x - 8)$

$$x^2 - 7x - 8 = (x + 1)(x - 8)$$

Ejemplo

Factorizar $x^4 - 20x^2 + 64$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de forma decreciente, sin embargo el grado es 4. Para expresarlo como un polinomio de grado 2 se recurre a un cambio de variable de la manera siguiente:
$$y = x^2$$
El polinomio queda expresado como $y^2 - 20y + 64$
2. El signo del término independiente o tercer término es positivo, señal de que los dos factores de 64 tienen el mismo signo (o son ambos positivos o negativos). Al observar el signo del segundo término se decide que el signo de los factores es negativo.
Los pares de factores en que se puede descomponer el número 64 son: $(-1, -64), (-2, -32), (-4, -16), (-8, -8)$
3. Verificamos cuáles de esos pares de factores sumados generan un resultado igual al coeficiente del segundo término del polinomio, es decir -20.
$-1 - 64 = -65$
$-2 - 32 = -34$
$-4 - 16 = -20$
$-8 - 8 = -16$
El par de factores es $(-4, -16)$ ya que al sumarlos generan como resultado -20 que es el coeficiente del segundo término.
4. La factorización es $(y - 4)(y - 16)$
$y^2 - 20y + 64 = (y - 4)(y - 16)$
Como $y = x^2$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = (y^2 - 4)(y^2 - 16)$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $25x^4 - 20x^2 - 21$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente, sin embargo existen dos inconvenientes: El grado del polinomio es 4 y el coeficiente del primer término no es igual a 1.
   En estos casos se intenta hacer un cambio de variable. La referencia es el primer término, el cual debe contener solamente a la variable al cuadrado; en consecuencia se calcula la raíz cuadrada de ese primer término.
   $$\sqrt{25x^4} = 5x^2$$
   Si el segundo término del polinomio se puede expresar como un producto donde uno de los factores es $5x^2$ se puede hacer el cambio de variable y factorizar el polinomio, si esto no es posible decidimos que el polinomio no se puede factorizar por este método. Veamos:
   $$-20x^2 = -4(5x^2)$$
   En efecto, el cambio de variable es posible.
   $$u = 5x^2$$
   $$25x^4 - 20x - 21 = u^2 - 4u - 21$$
2. El signo del tercer término es negativo, en consecuencia los dos factores en que se debe descomponer el número 21 tienen signos contrarios. Como el signo del segundo término es también negativo, el mayor de los factores tiene signo negativo.
   $$(1, -21), (3, -7\ )$$
3. Se verifica cuál de los pares de factores al sumarlos producen un resultado igual a -4.
   $1 - 21 = -20$
   $3 - 7 = -4$
   Por lo tanto la respuesta involucra al par $(3, -7)$
4. La factorización es $(u + 3)(u - 7)$
   Cambiamos a u por su valor: $(5x^2 + 3)(5x^2 - 7)$
   $$25x^4 - 20x^2 - 21 = (5x^2 + 3)(5x^2 - 7)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La factorización de un trinomio de esta forma implica la realización de manipulaciones algebraicas que involucran en primera instancia al primer y el tercer término. Los pasos necesarios son:

1. Ordenar el polinomio de forma decreciente.
2. Multiplicar el coeficiente del primer término con el término independiente.
3. Buscar pares de factores del resultado obtenido en el paso 2 que sumados generen como resultado el segundo coeficiente.
4. Reescribir el polinomio original, cambiando el segundo término por la suma de cada uno de los factores obtenidos en el paso 3, multiplicados por la variable. De esa forma queda un polinomio conformado por cuatro términos.
5. Agrupar términos semejantes.

Ejemplo

Factorizar el polinomio $5 + 7x - 6x^2$

Respuesta

1. Se ordena el polinomio: $-6x^2 + 7x + 5$
2. Se multiplica: $(-6)(5) = -30$
3. Los dos factores del número -30 que sumados generan como respuesta 7, son 10 y -3.
4. El polinomio reescrito queda de la forma siguiente.
$$-6x^2 + 10x - 3x + 5$$
5. Ahora se agrupan términos semejantes.
$$2x(-3x + 5) + (-3x + 5)$$
$$(5 - 3x)(2x + 1)$$
$$5 + 7x - 6x^2 = -(3x - 5)(2x + 1)$$

Ejemplo

Factorizar el polinomio $9x^2 - 17x + 8$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de manera decreciente.
2. $(9)(8) = 72$
3. Dos números cuyo producto sea 72 y cuya suma sea -17: $(-9, -8)$
4. Se reescribe el polinomio.
$$9x^2 - 9x - 8x + 8$$
5. Se agrupan los términos semejantes (los dos primeros términos y los dos últimos términos).
$$9x(x - 1) - 8(x - 1)$$
$$= (x - 1)(9x - 8)$$
$$9x^2 - 17x + 8 = (x - 1)(9x - 8)$$

Ejemplo

Factorizar el polinomio $21x^2 - 40x - 4$

Respuesta

1. El polinomio está ordenado de forma decreciente.
2. $(21)(-4) = -84$
3. Dos números cuyo producto sea -84 y su suma sea igual a -40: $(-42,2)$
4. Se reescribe el polinomio.
$$21x^2 - 40x - 4 = 21x^2 - 42x + 2x - 4$$

5. Se agrupan los dos primeros términos por factor común y los últimos por este mismo método.

$$21x(x-2)+2(x-2)$$

Se factoriza por factor común.

$$(x-2)(21x+2)$$

$$21x^2-40x-4=(x-2)(21x+2)$$

Uso de Geogebra y Maxima para factorizar expresiones algebraicas

En esta sección se resuelve uno de los ejercicios de factorización ya ejemplificados, pero con la ayuda de Geogebra y de Maxima. Es importante que el lector practique con el resto de los ejercicios ejemplificados.

Ejemplo

Factorizar $4x^3+2x^2$

Respuesta

Factorización con Geogebra.

- Cargar Geogebra y activar la vista CAS.
- Escribir la estructura del polinomio en la ventana Cálculo Simbólico. El exponente lo genera con el símbolo ^ o con el símbolo el asterisco doble **.
- Pulsar la tecla *Enter* y esperar que el software presente el polinomio correctamente escrito. Automáticamente el sistema pasa a la línea 2.

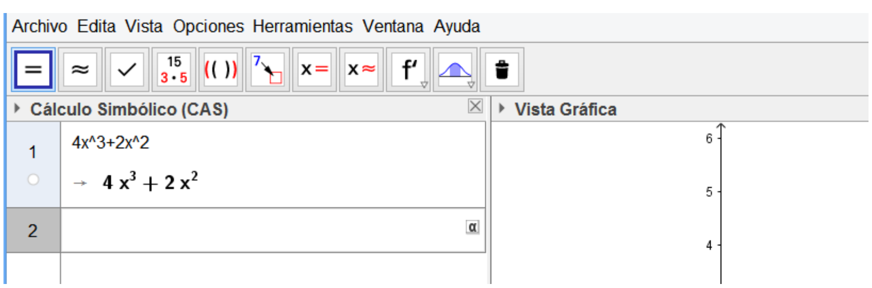


Figura 17: Ventana Cálculo Simbólico de Geogebra y una estructura a factorizar escrita en la primera fila.

- Presionar el botón Factoriza

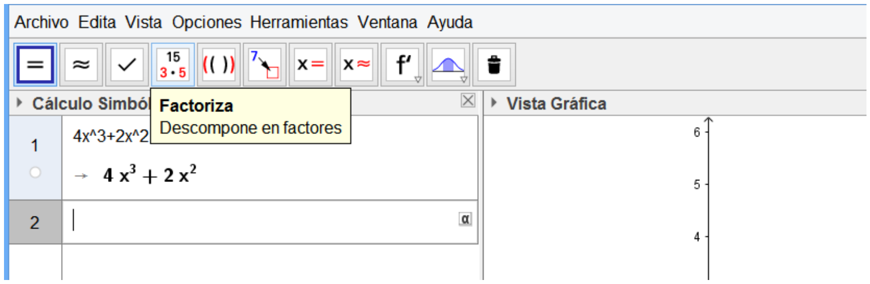


Figura 18: Botón Factoriza de Geogebra con el cual el programa realiza esa acción sobre la estructura recién cargada en memoria.

Geogebra factoriza el polinomio, tal como se ha hecho manualmente, aspecto que se muestra en la Figura 19.

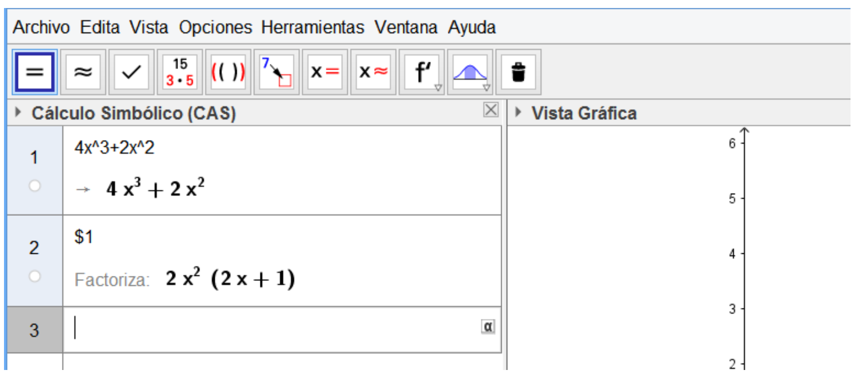


Figura 19: Resultado de la factorización del polinomio 4x^3+2x^2 con Geogebra.

Factorización con Maxima

- Cargar el software, presionar la tecla *Enter* para comenzar a escribir el polinomio. Usar * para multiplicar y el símbolo ^ o el asterisco doble para las potencias. Termine en punto y coma, aunque esto no es una limitación seria en wxMaxima ya que el software coloca ese símbolo si el usuario lo omite.
- Presionar las teclas *Shift+Enter*. wxMaxima genera el polinomio en la salida 1 *(%o1)*.

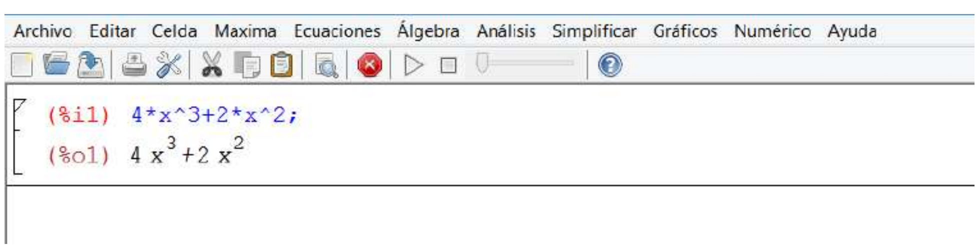


Figura 20: Entrada de la estructura algebraica en wxMaxxima y su respectiva salida.

- Ir al menú Simplificar y hacer lic en Factorizar Expresión.

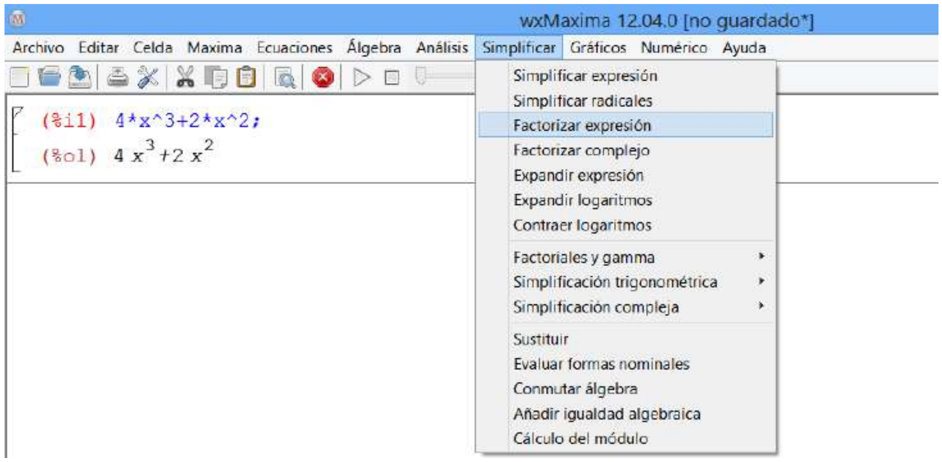


Figura 21: Una de las alternativas para factorizar, a través del menú que ofrece wxMaxima.

El software wxMaxima muestra el polinomio factorizado (%o2), tal como se indica en la Figura 22.

Figura 22: Espresión factorizada de la estructura 4x^3+2x^2, según wxMaxima.

Si el usuario lo desea puede usar el comando "factor" para lograr el mismo fin. En este caso se usó *factor(%),* donde el símbolo *%* se incluyó ya que se está factorizando la expresión inmediata anterior. Para usar un comando, simplemente hay que escribirlo en la ventana. Revise la ayuda de Maxima para ver los comandos disponibles y la sintaxis correcta.

Ejercicios

1. Factorizar las estructuras algebraicas siguientes
   a. $15x^3 + 25x^2 + 30x$
   b. $4x^2 - 121$
   c. $x^2 - 15x + 50$
   d. $7x^2 + 2x - 5$
   e. $16x^2y^4 - 25y^2$
   f. $y^2 + 16y + 64$
   g. $36x^2 - 6x + 7x - x - 1$
   h. $4z^2 + 5z + 1$
   i. $20x^4 + 10x^2 - 100$

2. Indique el factor que hace falta al factorizar cada estructura algebraica
   a. $x^2y^2 - 1 = ?\,(xy + 1)$
   b. $y^2 - 3y - 10 = (y + 2)\,?$
   c. $50x^2 + 25x = 25x\,?$
   d. $(a + b)^2x^2 - b^2 = [(a + b)x + b]\ \ ?$
   e. $3y^2 + \ 8y + 4 = ?\ (3y + 2)$
   f. $9z^2 + \ 42z + 49 = (3z + 7)\,?$
   g. $y^2 - 21y + 80 = (y - 15)\ \ ?$
   h. $144 - 16y^2 = (12 + 4y)\,?$
   i. $m^2n^2x^2 - n^4 = ?\,(mx - n)\ (mx + n)$

Ecuaciones de primer y segundo grado

En esta sección se estudia la manera de resolver las ecuaciones de primer y segundo grado con una variable real tanto de la forma tradicional con la ayuda de lápiz y papel como con el Geogebra y Maxima, programas matemáticos enmarcados dentro de la categoría de software libre de gran utilidad para el aprendizaje de este tema y otros desarrollados en este libro.

Si dos estructuras algebraicas se separan con un signo "=" se está en presencia de una proposición, la cual puede ser verdadera o falsa. A este tipo de proposiciones se le conoce con el nombre de igualdad. Pueden haber dos tipos de igualdades: Identidades y Ecuaciones

Se conoce con el nombre de identidad a la igualdad que es verdadera para cualquier valor de las variables. Son ejemplos de identidades las fórmulas de factorización o productos notables estudiadas en secciones previas de este capítulo.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x + y)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

También son ejemplos las identidades trigonométricas, entre las que puede indicar la siguiente:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Se trata de estructuras que se escriben diferentes pero que en realidad es el mismo objeto matemático.

Se conoce con el nombre ecuación a una igualdad que es verdadera solamente para uno o algunos valores de la variable o incógnita. En el ejemplo de la Figura 23, la proposición es verdadera solamente cuando la incógnita es igual a 5.

El signo igual (=) de una ecuación separa a dos estructuras algebraicas, una del lado izquierdo que se denomina primer miembro de la ecuación y otra del lado derecho que se denomina segundo miembro de la ecuación.

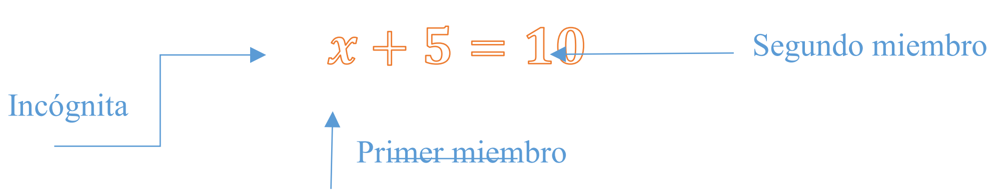


Figura 15: Elementos presentes en una ecuación.

Resolver una ecuación consiste en calcular el valor de la variable o variables que hacen que la proposición planteada por la igualdad sea verdadera. Dicho valor o valores se conoce con el nombre de raíz de la ecuación.

Ejercicios

En las igualdades siguientes indique cuáles se tratan de identidad y cuáles son ecuaciones.

1. $4x + 5x + 7x = 5 + x$
2. $a + b = 10 + a$
3. $x^4 = (x^2)^2$
4. $3(x + 1) = 3x + 3$
5. $y^2 - 4 = 0$
6. $10 = 7x$
7. $f = ma$
8. $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado es una igualdad en la cual la incógnita o incógnitas tienen exponente 1.

La estructura general de una ecuación de primer grado es:

$$ax + b = 0$$

Donde a y b son números reales y a es diferente de cero.

En este libro se estudian solamente aquellas ecuaciones cuya incógnita tiene valores pertenecientes al conjunto de los números reales.

Ejemplo

$$x + 1 = 10$$

Respuesta

La variable x tiene exponente 1, en estos casos se le denomina incógnita ya que la libertad para asignar cualquier valor está restringida al cumplimiento de la igualdad y por lo tanto en hacer verdadera la proposición.

Ejemplo

$$x + y - 4 = 25$$

Respuesta

En esta proposición hay dos incógnitas, ambas están elevadas al exponente 1. Este tipo de igualdad es una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Tanto x como y pueden asumir infinitos valores, su representación gráfica es una línea recta.

Raíz de una ecuación de primer grado. Para calcular la raíz de una ecuación de primer grado se debe considerar las propiedades de los números reales, especialmente el inverso aditivo y el inverso multiplicativo con el fin de aislar a la incógnita hacia uno de los miembros de la igualdad y hacia el otro miembro tener un valor numérico.

Ejemplo

Resuelva la ecuación: $7x + 3 = 20$

Respuesta

El primer paso es añadir en ambos miembros de la igualdad el inverso aditivo de $+3$ el cual es -3.

$$7x + 3 - 3 = 20 - 3$$

Se realiza la operación entre números

$$7x = 17$$

Luego se multiplica ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{7}$ que es el inverso multiplicativo de 7.

$$7x\left(\frac{1}{7}\right) = 17\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$x = \frac{17}{7}$$

Ejemplo

Resolver $3x - 10 = 2$

Respuesta

El inverso aditivo de -10 es $+10$, por lo tanto se añade este último número en ambos miembros de la igualdad.

$$3\mathrm{x} - 10 + 10 = 2 + 10$$
$$3\mathrm{x} = 12$$

El inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$. Se multiplican ambos miembros por este último número.

$$3\mathrm{x}\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$
$$x = 4$$

Ejemplo

Resolver $4 - 9x = 11$

Respuesta

El inverso aditivo de 4 es -4. Se la suma -4 a ambos miembros de la ecuación. En otras palabras, se resta cuatro en cada miembro de la ecuación.

$$4 - 9x - 4 = 11 - 4$$
$$-9x = 7$$

Ahora se multiplica ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de -9 que es $-\frac{1}{9}$

$$-9x\left(-\frac{1}{9}\right) = 4\left(-\frac{1}{9}\right)$$
$$x = -\frac{4}{9}$$

Ejemplo

Resolver $\frac{3-x}{7} = 12$

Respuesta

El planteamiento original puede reescribirse así: $\left(\frac{1}{7}\right)(3 - x) = 12$. El inverson multiplicativo de $\frac{1}{7}$ es 7, por lo tanto se multiplican ambos miembros de la igualdad por este número.

$$(7)\left(\frac{1}{7}\right)(3 - x) = (7)(12)$$
$$3 - x = 84$$

El inverso aditivo de 3 es -3. Se añade ese número en los dos miembros de la igualdad.

$$3 - x - 3 = 84 - 3$$
$$-x = 81$$

En estos casos se multiplican ambos miembros por -1 con el fin de expresar la incógnita como un número positivo.

$$x = -81$$

Ejemplo

Resolver $\frac{5x}{11} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$

Respuesta

Para encontrar el valor de x que satisface la ecuación, en primer lugar se suma en ambos miembros el inverso aditivo de $-\frac{3}{5}$ que es $\frac{3}{5}$.

$$\frac{5x}{11} - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$$
$$\frac{5x}{11} = \frac{10+9}{15}$$
$$\frac{5x}{11} = \frac{19}{15}$$

El coeficiente de x se convierte en 1(elemento neutro del producto) multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo de $\frac{5}{11}$ que es el número $\frac{11}{5}$.

$$\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{5x}{11}\right) = \left(\frac{19}{15}\right)\left(\frac{11}{5}\right)$$

$$x = \frac{209}{75}$$

Ejemplo

Resolver $\frac{7}{8}x + 9x = \frac{3}{5}x - 2$

Respuesta

Para resolver esta igualdad, en primer lugar se deben agrupar los términos semejantes. Bajo el mismo principio del inverso aditivo, el término $\frac{3}{5}$x se convierte en el elemento neutro al sumarle el mismo término con signo invertido, es decir $-\frac{3}{5}$x. Para no alterar la igualdad, esa operación debe hacerse tanto en el primer miembro (parte izquierda de la ecuación) como en el segundo miembro (parte derecha de la ecuación). El resultado es:

$$\frac{7}{8}x + 9x - \frac{3}{5}x = -2$$

Se factoriza por factor común el primer miembro:

$$x\left(\frac{7}{8} + 9 - \frac{3}{5}\right) = -2$$

Se efectúa la operación numérica entre el paréntesis

$$x\left(\frac{35+360-24}{40}\right)=-2$$
$$x\left(\frac{371}{40}\right)=-2$$
Se multiplica ambos miembros por el inverso multiplicativo de la fracción $\frac{371}{40}$
$$x\left(\frac{371}{40}\right)\left(\frac{40}{371}\right)=-2\left(\frac{40}{371}\right)$$
$$x=-\frac{80}{371}$$

Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado.

En esta parte se resuelven ecuaciones de primer grado, tomando en consideración que provienen del lenguaje ordinario y por lo tanto requieren una transformación previa al uso de las propiedades inverso aditivo e inverso multiplicativo, con las cuales se han resuelto los ejercicios de la sección precedente.

Ejemplo

Hace 4 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 10 años ¿cuántos años tengo ahora?

Respuesta

Sea x la edad actual.
Hace 4 años tenía: $x-4$
Dentro de 10 años tendré: $x+10$
La mitad de la edad que tendré dentro de 10 años es: $\frac{x+10}{2}$
Esa cantidad es igual a la edad que tenía hace cuatro años, por lo tanto:
$$x-4=\frac{x+10}{2}$$
Manipulando la expresión algebraica:
$$2x-8=x+10$$
$$x=18$$
La edad actual es 18 años.

Ejemplo

El cuádruple de un número menos 12 es igual dos tercios de ese número más veinte ¿cuál es ese número?

Respuesta

Sea x el número buscado.
El cuádruple de ese número menos 12 es: $4x-12$

Dos tercios del número más 20 es: $\frac{2}{3}x + 20$
Igualando las expresiones:

$$4x - 12 = \frac{2}{3}x + 20$$

Se resuelve la ecuación:

$$4x - \frac{2}{3}x = 32$$

$$\frac{12x - 2x}{3} = 32$$

$$10x = 96$$

$$x = \frac{96}{10} = \frac{48}{5}$$

El número es $\frac{48}{5}$

Ejemplo

Tres números enteros consecutivos suman 153. Indique cuáles son los números.

Respuesta

Sea *x* el primer número entero
Como son consecutivos, el segundo entero es: $x + 1$.
El tercer entero es $x + 2$.
Como los tres números suman 99:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 153$$

Se resuelve esa ecuación:

$$x + x + 1 + x + 2 = 153$$
$$3x + 3 = 153$$
$$3x = 150$$
$$x = 50$$

Por lo tanto los números son: 50, 51, 52.

Ejemplo

Si Javier tiene 15 años y Juana tiene el quíntuple de la edad de Javier menos 8 años ¿cuál es la edad de Juana?

Respuesta

Sea *x* la edad de Juana
El quíntuple de la edad de Javier menos 8 años es: $5(15) - 8 = 75 - 8 = 73$
La edad de Juana es 73 años.

Ejemplo

La semana pasada Carolyne se ganó el séptuple de lo que había ganado hace un mes, esta semana se ganó solamente el triple de esa cantidad. Si invirtió 40000 bolívares y le quedó un quinto de lo ganado en total ¿cuánto dinero se ganó hace un mes?

Respuesta

Sea x el dinero ganado hace un mes
Lo que se ganó la semana pasada fue: $7x$.
Los que se ganó esta semana: $3x$.

$$7x + 3x - 40000 = \frac{7x + 3x}{5}$$
$$10x - 40000 = \frac{10x}{5}$$
$$8x = 40000$$
$$x = \frac{40000}{8} = 5000$$

Hace un mes Carolyne se ganó Bs 5000.

Ejemplo

Hace 10 años Antonio tenía la tercera parte de la edad de Juan, actualmente Antonio tiene la mitad de la edad de Juan ¿Cuál es la edad actual de Antonio y Juan?

Respuesta

Sea x la edad actual de juan
Sea y la edad actual de Antonio
Actualmente

$$y = \frac{x}{2}$$

Hace 10 años

$$y - 10 = \frac{x - 10}{3}$$

Se sustituye a y:

$$\frac{x}{2} - 10 = \frac{x - 10}{3}$$
$$\frac{x - 20}{2} = \frac{x - 10}{3}$$
$$3x - 60 = 2x - 20$$
$$x = 40$$
$$y = \frac{x}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Juan tiene actualmente 40 años y Antonio 20 años.

Ejemplo

Si de su sueldo mensual Eleazar gasta la tercera parte en alimentos, la quinta parte de lo que le queda lo consume en transporte y la mitad del resto disponible lo destina al gasto en medicinas, al final le quedan 40000 bolívares ¿Cuánto gana Eleazar mensualmente?

Respuesta

Sea x el sueldo mensual

Gasto en alimentos: $\frac{x}{3}$

Gasto en transporte: $\frac{1}{5}\left(x-\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{2x}{15}$

Gasto en medicinas: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{3}-\frac{2x}{15}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{15x-5x-2x}{15}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8x}{15}\right)=\frac{4x}{15}$

Por lo tanto:

$$x=\frac{x}{3}+\frac{2x}{15}+\frac{4x}{15}+40000$$
$$\frac{15x-5x-2x-4x}{15}=40000$$
$$4x=600000$$
$$x=\frac{600000}{4}=150000$$

Eleazar gana Bs 150000 mensual.

Ecuaciones de primer grado con Geogebra. Es fácil trabajar con Geogebra para calcular las raíces de ecuaciones tanto de primer como de segundo grado. Se debe activar la ventana de cálculo simbólico (CAS) e ingresar en la fila de entrada la estructura de la ecuación, presionar la tecla Enter para que el software genere la estructura de la ecuación. Este paso es importante ya que permite que el usuario detecte posibles errores en la escritura.

La Figura 23 corresponde a la ecuación $10x+8=20$

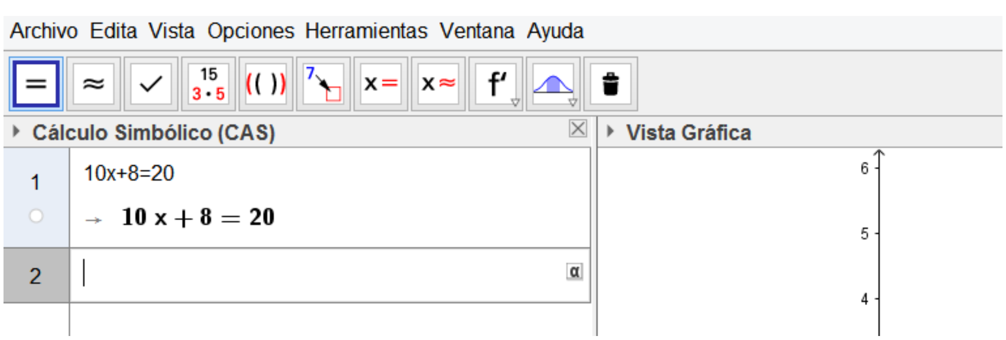


Figura 23: Uso de la vista CAS de Geogebra para resolver ecuaciones de primer grado.

Con el cursor en la segunda fila, hacer clic con el ratón en el botón Resuelve, el cual tiene la forma ***X*=.** El software genera la respuesta usando la notación de conjuntos, es decir muestra el conjunto solución de la ecuación.

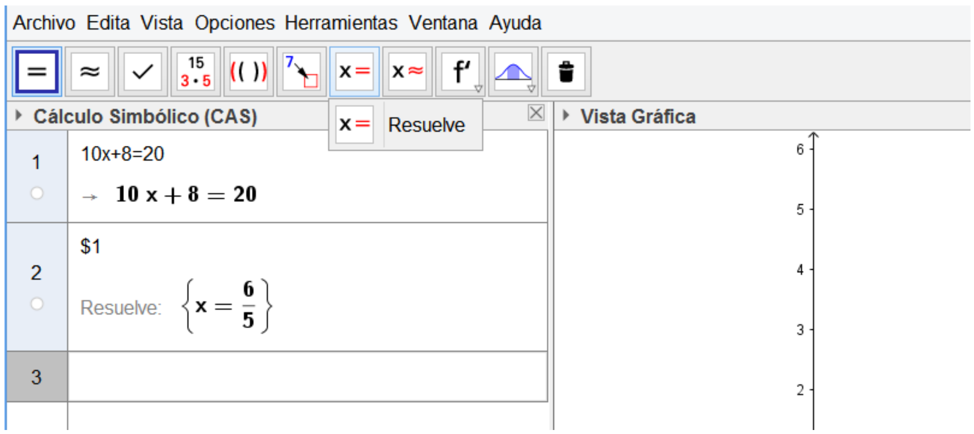


Figura 24: En la fila 2 de la vista CAS se muestra la raíz de la ecuación bajo la presentación de conjunto.

Geogebra brinda muchas posibilidades para trabajar con ecuaciones, por ejemplo haga clic en la fila 3 y luego clic sobre la ecuación escrita en la fila 1 y observará que se repite la estructura de esa ecuación, la cual es editable.

Ecuaciones de primer grado con wxMaxima.

versión para Windows de Maxima es un instrumento muy potente que dispone el estudioso de álgebra. Recordemos que Maxima es un software que está diseñado bajo el esquema de comandos. wxMaxima trabaja fundamentalmente sobre este principio apoyado sobre menús que son accesibles con el ratón, aspecto que pretende ayuar al usuario en la realización de operaciones sin tener que aprenderse las instrucciones para que el programa genere una respuesta. Sin embargo para algunos sigue siendo atractiva la opción del uso de comandos

Escribir la ecuación que desea resolver. Recuerde usar el asterisco para multiplicar; por ejemplo $5x$ debe escribirlo en máxima como $5 * x$. Como está trabajando con wxMaxima no es necesario finalizar la instrucción con punto y coma, ya que el software hace este trabajo. Presionar *Shift+Enter* (*Mayúscula* + *Entrada*). El software devuelve la ecuación escrita bajo la salida 1 (*%o1*).

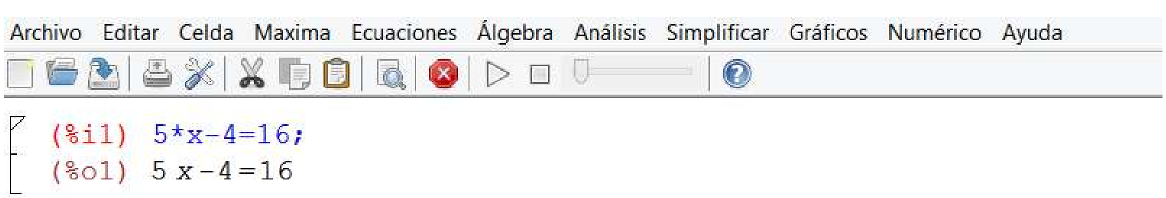


Figura 25: Ingreso de la estructura de la ecuación en wxMaxima.

En este momento dispone de dos opciones: Escribir el comando *solve(%, x)* y presionar *Shift+Enter* o con el ratón hacer clic en el menú Ecuaciones – Resolver. Ambas opciones consumirán aproximadamente el mismo tiempo. La última alternativa es la mostrada en la Figura 26, en la cual la ventana emergente indica las opciones por defecto que asigna el software. En el cuadro de texto Ecuación está el signo % el cual se utiliza para referirse a la última entrada y en Incógnita(s) aparece la letra *x*.

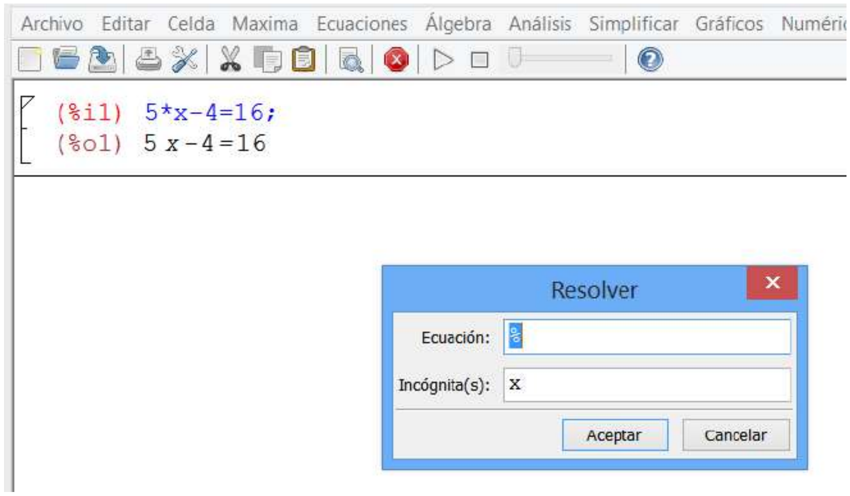


Figura 26: Al hacer clic en el menú Ecuaciones de wxMaxima, surge la ventana emergente Resolver, la cual ya contiene opciones por defecto correspondient*es a la última ecuación ingresada en la ventana principal.*

Hacer clic en el botón Aceptar. El software escribe la entrada 2 (%i2) y responde en la salida 2 (%o2). Si usted hubiera optado por escribir el comando, en este punto tendría la misma ventana que se muestra a continuación.

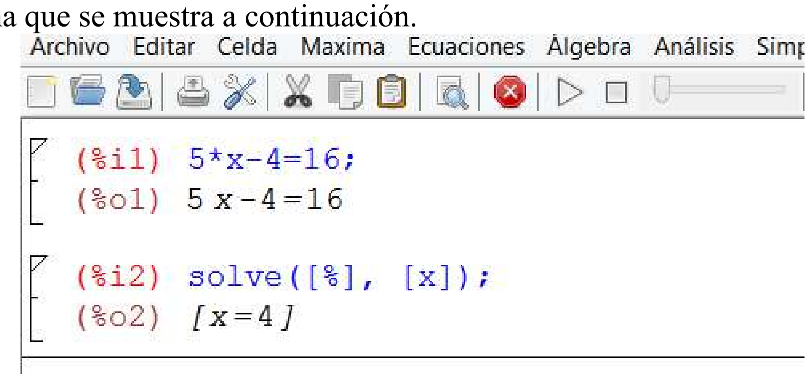


Figura 27: Resultado de la ecuación 5x-4=16.

La solución a la ecuación $5x - 4 = 16$ es $x = 4$.

Otra opción es usar directamente el menú ecuación – Resolver y en la ventana emergente ya mostrada escribir la estructura de la ecuación. Por ejemplo: $13 * x - \frac{1}{4}x = \frac{4}{7}$. Cuando tenga que escribir fracciones, enciérrelas entre paréntesis y utilice la tecla /.

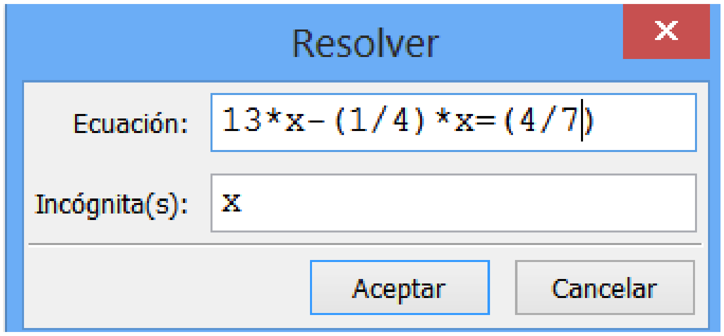


Figura 28: Ventana Resolver de wxMaxima en la cual se puede escribir directamente la estructura de la ecuación a resolver

Verificar que la incógnita sea *x* y presionar el botón Aceptar. El software escribe la instrucción de entrada y genera la salida.

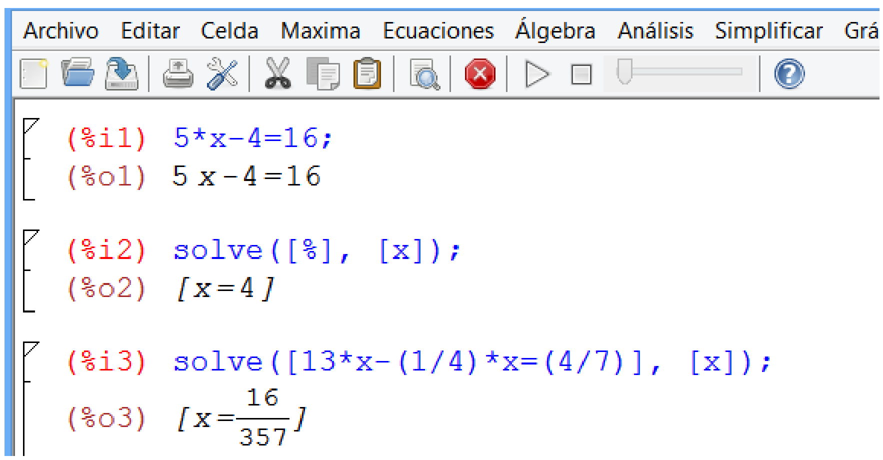


Figura 29: En la entrada y salida 3, wxMaxima refleja los resultados de trabajar directamente con el Menú Resolver.

Ejercicios

1. Resolver
   a. $10x = 6$
   b. 40x+4=15
   c. $12 - 5x = 20$
   d. $4 - x = 2x + 1$
   e. $5y + 11y = 3$
   f. $\frac{3}{11}x - \frac{12}{13} = 50$
   g. $1 + 6x + \frac{3}{4} = 3x - \frac{1}{2}$
   h. $5a - 10x = 3a$
   i. $2abc + abx = 4$
   j. $\frac{ab}{x} = \frac{a^2b^3}{c}$

2. Convierta las expresiones siguientes a ecuaciones y resuélvalas.
   a. Pedro es taxista y durante el día de ayer se ganó el doble de lo que se ganó hoy, con la ganancia de hoy se compró un kilogramo de carne en Bs.10000 y un Kilogramo de arroz en Bs. 5000. ¿Cuánto se ganó Pedro ayer?
   b. En época de alta inflación, el precio de un producto hoy suele ser bastante menor al precio del mismo producto el día de mañana. Juana fue ayer al mercado y observó que el precio de la carne era Bs 6000 el kilo, hoy pudo reunir esa cantidad y fue a comprar un kg de carne, sin embargo el precio se incrementó tres octavos respecto al precio visto el día anterior ¿cuánto cuesta el kg de carne hoy?
   c. Sucesivos aumentos en el precio de un producto de tres quintos, dos séptimos y tres octavos ¿a cuál aumento único equivale?
   d. Una persona camina del punto A al punto B en 30 minutos, si el recorrido lo hace en bicicleta tarda dos tercios de ese tiempo ¿A cuanto equivale en minutos el recorrido en bicicleta?

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad donde el exponente más alto de la incógnita es 2. La estructura general de una ecuación de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con a diferente de cero y a, b, c coeficientes pertenecientes al conjunto de los números reales.

Cuando b y c son diferentes de cero la ecuación es completa, si b o c son iguales a cero la ecuación es incompleta.

La solución a una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta expresión se conoce como fórmula general de una ecuación de segundo grado.

Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene raíces reales
Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene dos raíces reales iguales.

Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$. Si se factoriza esta expresión general para este tipo de ecuaciones se tiene:

$$x(ax + b) = 0$$

Donde

$$x = 0$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Al despejar la x se tiene:

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Dependiendo de los signos de a y c, la ecuación puede no tener solución en el conjunto de los números reales o tener dos soluciones.

A la hora de resolver una ecuación de segundo grado se debe elegir el método que se usará para encontrar la raíz o raíces. Los más usados, en el caso de la ecuación completa son:

a. Factorización del trinomio cuadrado perfecto
b. Factorización de la forma $x^2 + bx + c$
c. Usando la fórmula general
d. Usando una gráfica.

También es recomendable tener en cuenta lo siguiente:

a. Uno de los miembros debe ser igual a cero.
b. La estructura algebraica del otro miembro debe estar ordenada de manera decreciente

Ejemplo

Calcule las raíces de la ecuación $x^2 + 10x + 25 = 0$

Respuesta

Se trata de una ecuación de segundo grado, uno de los miembros de la igualdad es cero y el polinomio del lado izquierdo está ordenado de forma decreciente.
La inspección visual del miembro que contiene al polinomio indica que se trata de un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se usa ese método para resolver la ecuación.

Raíz cuadrada del primer término del polinomio; $\sqrt{x^2} = x$
Raíz cuadrada del tercer término del polinomio: $\sqrt{25} = 5$
El segundo término debe ser el doble producto de la raíz cuadrada del primer término por la raíz cuadrada del segundo término: $2(x)(5) = 10x$.

Se comprueba que el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto puede ser expresado como:

$$(x + 5)^2 = 0$$

Se calcula la raíz cuadrada de ambos miembros, lo que produce la simplificación

$$x + 5 = 0$$

Finalmente se despeja la x, aplicando el inverso aditivo.

$$x = -5$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^2 + 12x + 5 = 0$

Respuesta

Uno de los miembros de la ecuación es cero y el otro miembro es un polinomio que está ordenado de forma decreciente. Resolvamos la ecuación factorizando al polinomio por el método de trinomio cuadrado perfecto.

El primer término es un cuadrado perfecto, sin embargo el tercer término no lo es. Sumemos el inverso aditivo de 5 en ambos lados de la igualdad, con la idea de eliminar el tercer término del polinomio.

$$x^2 + 12x + 5 - 5 = -5$$
$$x^2 + 12x = -5$$

Ahora se divide entre dos el coeficiente de x

$$12 \div 2 = 6$$

Se eleva al cuadrado

$$6^2 = 36$$

Se suma 36 en ambos miembros de la igualdad

$$x^2 + 12x + 36 = -5 + 36$$

El miembro de la izquierda o primer miembro de la ecuación es ahora un cuadrado perfecto: El primer término tiene raíz cuadrada igual a x; la raíz cuadrada del tercer término es 6; el segundo término es el producto de dos veces la raíz cuadrada del primer término por la raíz cuadrada del tercer término.

Por lo tanto el primer miembro de la igualdad es $(x + 6)^2$.

La ecuación se transforma en:

$$(x + 6)^2 = 31$$

Se despeja el paréntesis

$$x + 6 = \pm\sqrt{31}$$

Se despeja la incógnita

$$x = \pm\sqrt{31} - 6$$

La respuesta contiene dos valores de x:

$$x = \sqrt{31} - 6$$

$$x = -\sqrt{31} - 6$$

$$CS = \left\{-\sqrt{31} - 6, \sqrt{31} - 6\right\}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $15x^2 - 12x - 3 = 0$

Respuesta

El primer miembro de la ecuación es un polinomio que está ordenado en forma decreciente, el segundo miembro es cero. El primer término del polinomio no es un cuadrado perfecto, por lo tanto no se puede expresar el polinomio como tal. Factoricemos bajo la forma $ax^2 + bx + c$.

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 15

$$15(15x^2) - 12x(15) - 45 = 0$$

$$(15x)^2 - 12(15x) - 45 = 0$$

Se hace un cambio de variable

$$u = 15x$$

Se reescribe el polinomio

$$u^2 - 12u - 45 = 0$$

Se buscan dos números cuyo producto es -45 y sumados resulten en -12. El signo negativo del 45 indica que los números tienen diferentes signos, el signo menos del 12 indica que el de mayor valor absoluto es negativo. Los números son -15 y $+3$.

El polinomio factorizado es

$$(u - 15)(u + 3) = 0$$

Si el producto de dos factores es cero, al menos uno de sus factores es cero

$$u - 15 = 0$$

$$u = 15$$

$$u + 3 = 0$$

$$u = -3$$

Se regresa a la variable original

$$15x = 15$$

$$x = 1$$

$$15x = -3$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

$$CS = \left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$$

Ejemplo

Resolver $3x^2 - 7x - 8 = 0$

Respuesta

El primer miembro es un polinomio que está ordenado de forma decreciente y el segundo miembro es igual a cero. Se puede proceder con los métodos de factorización o con la fórmula general de segundo grado.

El trinomio no es un cuadrado perfecto, tampoco es posible hacer un cambio de variable para transformarlo en una expresión factorizable. Por lo tanto se recurre a la fórmula general.

$$a = 3; \;\; b = \;-7; \quad c = 8$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 96}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{145}}{6}$$

$$CS = \left\{\frac{7 + \sqrt{145}}{6}, \frac{7 - \sqrt{145}}{6}\right\}$$

Ejemplo

Resolver $-2x^2 + 7x + 5 = 0$

Respuesta

El polinomio presente en la ecuación no es un cuadrado perfecto, ya que ni el primer término ni el tercer término tienen raíz cuadrada exacta. Tampoco es transformable en un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$. Se recurre a la fórmula general de segundo grado o a la representación gráfica. Optemos por esta última alternativa, pero usando el software matemático Geogebra que nos ayudará mucho en la construcción de la gráfica.

Cargar Geogebra, activar la vista CAS (Cálculo simbólico) y en la primera fila escribir el polinomio, en la notación de función, bajo la forma $f(x) := -2x^2 + 7x + 5$. Presionar la tecla *Enter*.

El sistema genera la gráfica en la vista gráfica. Usar el ratón para acercar o alejar la gráfica.

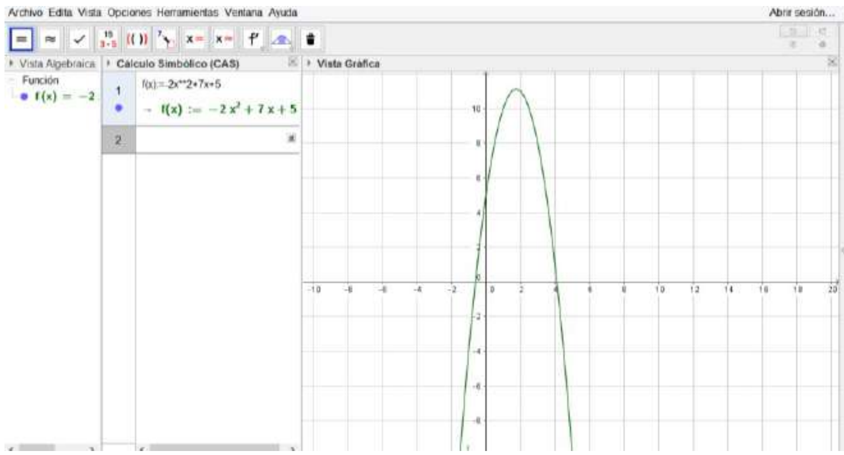


Figura 30: Una forma de resolver una ecuación en Geogebra es considerarla una función. En este caso se presenta la gráfica de la función f(x):=-2x^2+7x+5.

Ahora, con la línea 2 de la vista CAS activa, hacer clic en la función f(x) para que Geogebra escriba la estructura de ésta en la línea 2, luego pulsar el botón Resolución numérica (x ≈).

El programa genera los valores aproximados donde la función polinómica corta al eje *x*, los cuales son las raíces de la ecuación.

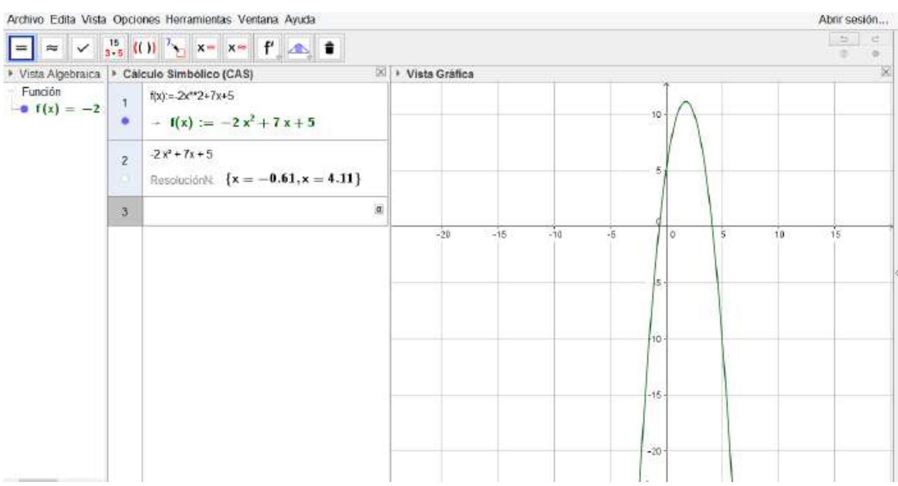


Figura 31: En la vista CAS se calculan los valores aproximados donde la función corta al eje x.

Si desea el valor exacto de la ecuación. Con la fila 3 activa, haga clic en la función f(x), cuando el programa escriba la estructura de la función iguale a cero, haga clic en el botón Resuelve(x=).

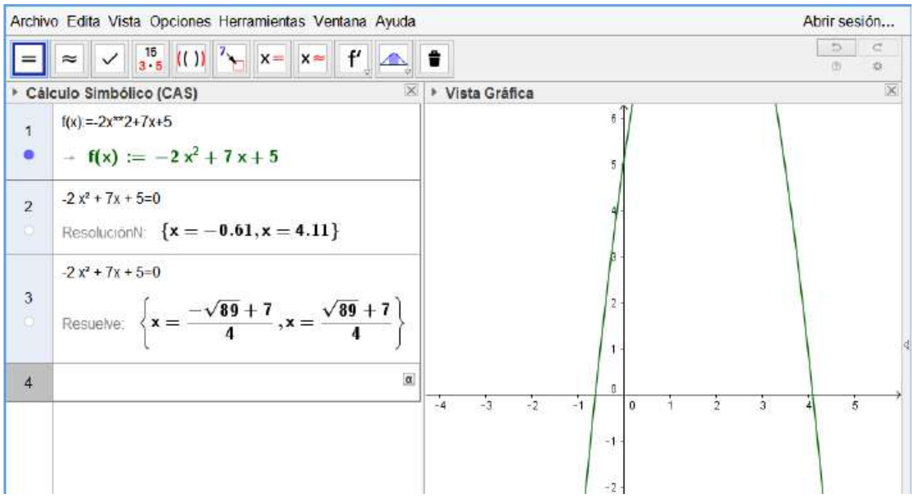


Figura 32: Cálculo del valor exacto de la ecuación 2x^2+7x+5=0. Esta acción puede hacerse directamente sin necesidad de los pasos previos explicados cuando solamente se requiera la solución de la ecuación.

Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado.

Diversas situaciones derivadas de la realidad se pueden modelar hasta convertirlas en expresiones manejables como ecuaciones de segundo grado y a partir de allí encontrar el valor o valores numéricos que satisface la igualdad. En física se aplica al lanzamiento de proyectiles, en economía muchas funciones de utilidad, ingreso o costo son expresables bajo esta modalidad, en los deportes abundan casos donde se requiere determinar la variable presente en la velocidad de un auto, de un lanzamiento o de un corredor.

Se procura en esta sección resolver situaciones prácticas relacionadas con el tema tanto de forma manual como con la ayuda de Geogebra o wxMaxima, software libre de mucha utilidad en estos casos particular.

Ejemplo

Se desea construir una caja de base cuadrada sin tapa de una lámina cuadrada de cartón para lo cual se corta en cada esquina cuadrados de 5 cm para doblar los bordes resultantes hacia arriba. Calcular las dimensiones de la lámina de cartón para que la caja construida tenga un volumen de 200 cm^3.

Respuesta

Sea x la longitud de los lados de la lámina de cartón, como se cortan 5 cm en cada esquina, la longitud de los lados de la caja de base cuadrada es: $x - 10$.

El volumen de la caja es:

$$V = l.a.h$$

Con $l = largo; a = ancho; h = alto$

$$l = x - 10$$
$$a = x - 10$$
$$h = 5$$

$$V = (x - 10)(x - 10)5$$
$$5(x - 10)(x - 10) = 200$$
$$(x - 10)(x - 10) = 40$$
$$x^2 - 20x + 100 - 40 = 0$$
$$x^2 - 20x + 60 = 0$$
$$CS = \{3{,}68; 16{,}32\}$$

El cartón debe medir 16,32 cm por cada lado, para que la caja resultante tenga un volumen de 200 cm^3.

Ejemplo

Una empresa vende artículos a Bs 20000 la unidad, para pedidos menores de 50, si el pedido es de más de 50 unidades hasta un máximo de 200 unidades, el precio se reduce en Bs 60 por el número de artículos pedido. ¿Cuántos artículos se pueden comprar con Bs 1440000?

Respuesta

Sea x el número de artículos pedidos
El precio de venta por unidad es: $p = 20000 - 60x$
El monto de cada pedido es: $M = px = (20000 - 60x)x$
El número de unidades que se pueden comprar es:

$$20000x - 60x^2 = 1440000$$

Se ordena el polinomio

$$-60x^2 + 20000x - 1440000 = 0$$

$$-6x^2 + 2000x - 144000 = 0$$

$$a = -6; b = 2000; c = 144000$$

$$x = \frac{-(2000) \pm \sqrt{(2000)^2 - 4(-6)(144000)}}{2(-6)}$$

$$x = \frac{-2000 \pm \sqrt{4000000 - 3456000}}{-12} = \frac{-2000 \pm \sqrt{544000}}{-12}$$

$$x = \frac{-2000 \pm 737{,}56}{-12}$$

$$x = 105{,}20$$

$$x = 228{,}13$$

Se selecciona como respuesta 106 artículos, que el entero inmediato superior a 105,20. Se descarta el valor 228,13 puesto que se sale del intervalo establecido para el dominio.

Ejemplo

El precio de venta de un producto es $p = 10000 - 15x$ donde x es el número de unidades por pedido hasta un máximo de 100 unidades. ¿cuántas unidades debe contener un pedido si se desea invertir Bs 127500.

Respuesta

Sea x el número de unidades por pedido.

El precio de cada pedido es: $P = px = (10000 - 15x)x$

$$-15x^2 + 10000x = 127500$$

$$-15x^2 + 10000x - 127500 = 0$$

$$a = -15; b = 10000; c = -127500$$

$$x = \frac{-10000 \pm \sqrt{(10000)^2 - 4(-15)(127500)}}{2(-15)}$$

$$x = \frac{-10000 \pm 9610}{-30}$$

$$x = 654$$

$$x = 13$$

Se generan dos valores, de acuerdo a las condiciones del problema el pedido debe contener 13 unidades.

Ejercicios

Resuelva

1. $x^2 - 169 = 0$
2. $y^2 + 24y + 144 = 0$
3. $7x^2 - 9x + 2 = 0$
4. $x^2 - 10x = 24$
5. $x^2 - 14x = 120$
6. $x(x - 6) = 0$
7. $25x^2 = 5x$
8. $4x^2 - 5x - 7 = 0$
9. $x^2 + 8x + 10 = 0$

10. $y^2 - y = 12$
11. $5x^2 + 5x = \frac{1}{2}$
12. $\frac{x^2 - 4x}{5} = 1$
13. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{5}x = 3$
14. $\frac{7}{6}x - \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4}x^2 - 2$

Resumen

- Una expresión algebraica es una estructura conformada por letras, números, signos más o menos, combinados con por lo menos una de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación o potenciación de exponente racional.
- En las expresiones algebraicas enteras la variable está elevada a un número entero positivo solamente y aparece en el numerador.
- En las expresiones algebraicas racionales la variable está elevada a un número entero negativo y aparece en el numerador o a un número entero positivo pero aparece en el denominador.
- Las expresiones algebraicas irracionales son aquellas expresiones donde al menos una de las variables está elevada a un exponente fraccionario o se encuentra dentro de una raíz.
- Se define un término como aquella expresión cuyas partes no se encuentran separadas por los signos más o menos.
- Un término consta de: signo, coeficiente, la parte literal o variables y los exponentes.
- Dos o más términos son semejantes si contiene a las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.
- El grado de un término está definido por la suma de los exponentes de las variables que lo conforman.
- El grado de una expresión algebraica es el grado más alto de los términos que conforman la expresión.
- El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado de sustituir las variables que la conforman por números y realizar las operaciones que la definen.
- En el lenguaje ordinario es común el uso de frases que involucran operaciones algebraicas, tales como el doble de la edad, la tercera parte del salario, entre otras.
- Un polinomio es una estructura algebraica entera, es decir, todos los exponentes de las variables son números enteros positivos y éstas se encuentran ubicadas exclusivamente en el numerador del término.
- El grado de un polinomio de una variable es el exponente más alto de la variable en ese polinomio.
- Con los polinomios se pueden realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación, división.
- La factorización consiste en expresar los términos de un polinomio como el producto de al menos dos factores.
- Si dos estructuras algebraicas se separan con un signo de igualdad se está en presencia de una igualdad.
- Existen dos tipos de desigualdades: identidades y ecuaciones.
- Una identidad es una igualdad que es verdadera para cualquier valor de las variables.
- Una ecuación es una igualdad que es verdadera solamente para uno o algunos valores de la variable o incógnita.
- Resolver una ecuación consiste en calcular el valor de la variable o variables que hacen que la proposición planteada por la igualdad sea verdadera. Dicho valor o valores se conoce con el nombre de raíz de la ecuación.

- Una ecuación de primer grado es una igualdad en la cual la incógnita o incógnitas tienen exponente 1.
- Una ecuación de segundo grado es una igualdad donde el exponente más alto de la incógnita es 2.

Términos Clave

- Expresión algebraicas
- Término
- Igualdad
- Polinomio
- Factorización
- Ecuación de primer grado
- Ecuación de segundo grado.

Ejercicios de Autoevaluación

1. Para cada expresión algebraica indique el grado y clasifíquela como monomio, binomio o trinomio.
   a. $4x^2y + 3$
   b. $\frac{3}{x} + x^3 + 4$
   c. $\frac{5}{6}x$
   d. $x^2 + 5x + 6$
   e. $\frac{3}{5}xy + x^3y^2$
2. Calcule el valor numérico de cada expresión algebraica para $x = -2; y = 3; z = -1$ según aparezcan estas variables en la estructura.
   a. $\sqrt{-4x - 1}$
   b. $\frac{x^3y}{3z} - 5xz$
   c. $3x^2 - 4xy + 2yz$
   d. $\frac{4}{7} - \frac{x}{y}$
   e. $\sqrt[3]{\frac{5x+1}{4xy}}$
3. Convierta al lenguaje simbólico matemático las expresiones siguientes
   a. La edad de Leonor es el décuplo de la edad de Valentina.
   b. Las ganancias esta semana fueron cuatro quintas partes de las de la semana pasada.
   c. Mi nota en el examen fue el cuádruple de la nota del último examen.
   d. El precio del producto se triplicó esta semana.
   e. La onceava parte de quince.
4. Identifique los términos que conforman cada expresión algebraica
   a. $12x^3 - 5x + 7$
   b. $\sqrt[5]{x^3 + 4x}$
   c. $-\frac{x^4y}{z^3}$
   d. $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}xy$
   e. $\frac{4}{x+y}$
5. Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \quad q(x) = -4x^2 + 5 \quad r(x) = 2 - x$
   Calcule:
   a. $p(2)$
   b. $q(-3)$
   c. $r(-4)$
   d. $p(-1) + q(-5)$
   e. $q(2) + r(3)$
6. Dados los polinomios $p(x) = -10x^2 + 2x + 4 \quad q(x) = x^2 - 3x \quad r(x) = x^2 - 7$
   Efectuar:
   a. $p(x) + q(x) + r(x)$
   b. $4p(x) + 3q(x)$
   c. $p(x) - q(x)$

d. $p(x).q(x)$
e. $p(x).r(x)$

7. Efectúe los siguientes productos
   a. $(4x^3+3)(4x^3+3)$
   b. $(y^2-z)(y^2+z)$
   c. $(xy+3)(xy-3)$
   d. $(3x+2)(3x+2)(3x+2)$
   e. $(12x+5)(3x+1)$
8. Factorice los polinomios
   a. $5x^3+10x^2$
   b. $32x^2y^3-16x^3y^3+64x^2y^4$
   c. $x^2-8x-33$
   d. x^2-81
   e. $125x^3y+45x^2y^2-625x^4y^5$

9. Resuelva las ecuaciones
   a. $\frac{10x-7}{3}=12$
   b. $x^2-9x=-20$
   c. $32-4x=12+2x$
   d. $x^2+10x+24=0$
   e. $-\frac{3}{x}+x=0$
10. Hace 15 años la edad de Mario era el triple de la edad de Leandro, dentro de 10 años la edad de Mario será solamente el doble de la edad de Leandro ¿Cuál es la edad actual de Mario y de Leandro?
11. Un salto largo se ejecuta según la ecuación $y=\frac{5}{4}-\frac{x^2}{11}$ donde y (metros) es la altura del salto y *x* (metros) es la distancia horizontal recorrida. Si el atleta alcanza una altura de 0,25 metros ¿qué distancia horizontal recorrió?
12. La longitud *l* de una circunferencia de radio *r* es $l=2\pi r$, si la rueda de una bicicleta tiene un radio de 0,30 metros ¿cuántos giros de la rueda son necesarios para recorrer 5014 metros?

Bibliografía Recomendada

Del Pozo, E., Diaz, Z., Fernández, J., Segovia, J. (2007). *Matemáticas fundamentales para estudios universitarios*. Delta: Madrid.

Larson, Hostetler. (2008). Precálculo. Reverté: Caracas.

Murillo, M., Soto, A., Araya, J. (2000). *Matemática básica con aplicaciones*. Euned: Costa Rica.

Peters, M., Schaaf, W. (2007). Algebra y trigonometría. Reverté: Caracas.

Sitios web

https://goo.gl/4GrqbM: Parte del proyecto Descartes dedicada a la enseñanza de las expresiones algebraicas.

https://goo.gl/W2TXzt: Parte del proyecto Descartes dedicado a la enseñanza de las ecuaciones de primer y de segundo grado.

CAPÍTULO 5

Inecuaciones

Objetivos:
General
Comprender las desigualdades aplicadas a modelos matemáticos en una y dos variables tanto desde un punto de vista algebraico como geométrico.
Específicos

- Aplicar las reglas de las desigualdades numéricas en la resolución de inecuaciones
- Interpretar las desigualdades tanto en notación de intervalos como desde el punto de vista geométrico.
- Resolver inecuaciones lineales tanto de forma manual como con ayuda de software.
- Resolver e interpretar inecuaciones con valor absoluto en una variable de forma manual y con software.
- Resolver inecuaciones de primer grado en una variable de forma manual y con software.
- Resolver inecuaciones de primer grado con dos incógnitas de forma manual y con software.
- Resolver e interpretar sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, apoyados en software de cálculo simbólico.

Introducción

Cuando se emiten respuestas que involucran números, es más probable que éstas se encuentren estructuradas como un conjunto de valores generalmente amplios, que como valores puntuales. Esto se debe a que siempre procuramos acertar, para lo cual se hace necesario incluir la mayor cantidad de alternativas dentro del conjunto solución. Por ejemplo cuando se dice que en un grupo hay personas mayores de 25 años, la proposición incluye a cualquier individuo que forma parte del grupo cuya edad se encuentre por encima de ese valor de referencia; si por el contrario se emite una proposición de carácter puntual, por ejemplo que en el grupo existen personas que tienen 25 años exactos, la probabilidad de nuestra aseveración se ve fuertemente disminuida en comparación con la primera opción.

En este capítulo se estudian en primer lugar las desigualdades a través de las cuales se conforma el piso teórico que da soporte a las inecuaciones, uno de los temas centrales y mediante las cuales se generan respuestas que abarcan extremos a veces tan amplios que se consideran infinitos. Dichas respuestas se conocen con el nombre de conjunto solución y conforman lo que se denomina intervalos, otro tema de importancia.

Tal como se mencionó, la realidad que afrontamos nos pone en contacto frecuente con esta manera de resolver situaciones que incluyen respuestas de carácter numérico, por lo tanto es importante la revisión detallada de cada uno de los temas que comprende este capítulo, bien sea para repasar aspectos que ya ha conoce o comenzar a estudiar esta parte interesante de las matemáticas que conjuntamente con las ecuaciones amplía el espectro de las soluciones de las estructuras algebraicas.

De acuerdo con el esquema planteado en cada uno de los capítulos, en el presente se formula una breve descripción teórica del tema en cuestión, se plantean ejemplos y ejercicios de autoevaluación y se complementa la explicación con la ayuda de software de cálculo simbólico, elemento de gran importancia en nuestro tiempo, en el cual los dispositivos electrónicos son tanto o más importantes para el estudiante como lo fueron el lápiz y el papel para una generación que no tiene tanto de tiempo de haber pasado por las aulas.

Desigualdades

Cuando dos números no son iguales es porque son diferentes en magnitud. A partir de este principio surgen las desigualdades, las cuales como se verá a continuación pueden enfocarse desde distintos puntos de vista. Interesan sin embargo aquellas a través de las cuales se comparan números reales. En tal sentido, en este primera parte se hace énfasis en las relaciones mayor que y menor que, tanto en la forma estricta como amplia. La mayoría de los ejemplos se plantean usando la terminología de la lógica proposicional, puesto que lo que se persigue es determinar la verdad o falsedad de una comparación.

Definición

Una desigualdad es una relación de orden que se produce cuando los valores son distintos.

Asumiremos que estas relaciones suceden en elementos que están ordenados tal como los que conforman los conjuntos numéricos previamente estudiados, representados por los números reales.

Los dos tipos de desigualdades de mucha importancia en las matemáticas son las siguientes:

Desigualdades estrictas. Identificadas por los símbolos mayor que ($>$) o menor que ($<$). Los elementos que se comparan siempre son de diferente magnitud.

Por ejemplo:

$$4 < 7$$
$$2 > -9$$
$$a > b$$
$$c < d$$

Desigualdades no estrictas o amplias. Identificadas por los símbolos mayor o igual que ($\geq$) o menor o igual que($\leq$). Al estar presente el símbolo de igualdad significa que los elementos que se comparan pueden llegar a ser iguales.

Ejemplo

$$4 \geq 4$$
$$a \leq b$$

No se consideran las desigualdades donde está presente el símbolo $\neq$ que significa no es igual o es diferente de ya que los elementos de comparación pueden no estar conformando una relación de orden, por ejemplo en la proposición: Una casa es diferente a una manzana. De igual manera la desigualdad $\gg$ que significa mucho mayor que ni $\ll$ que significa mucho menor que, puesto que aunque ambas implican un orden, ese orden puede estar completamente distanciado uno de otro.

Un aspecto muy importante en el estudio de las desigualdades que influye en la comprensión de las inecuaciones es que se debe tener en cuenta que éstas se pueden enfocar desde dos puntos de vista aparentemente diferentes pero que en realidad constituyen la misma proposición. Por ejemplo cuando Antonio le dice a Eduardo “Yo soy mayor que tú” y Eduardo le responde “Yo soy menor que tú” ambos están afirmando que Antonio nació primero que Eduardo; mediante símbolos propios de las desigualdades y usando solamente las iniciales de los nombres, la primera proposición se representa así:

$$A > E$$

La segunda proposición se representa así:

$$E < A$$

Un ejemplo numérico de esta situación es:

$$2 < 7$$

Desde el punto de vista del número 2 se lee esta proposición como “2 es menor que 7”.

$$7 > 2$$

Desde el punto de vista del número 7 se lee esta proposición como “7 es mayor que 2”

Una regla nemotécnica consiste en considerar el número desde donde parte la flecha (Símbolo $>$) “mayor que” y al número donde llega la punta de la flecha “menor que”.
Por ejemplo:

$$10 > 6$$

Se lee “10 es mayor que 6”, pero también se pude leer como “6 es menor que 10”, en cuyo caso la representación simbólica más usada es:

$$6 < 10$$

Propiedades

1. Adición y sustracción.
   Si se suma o se resta un número en ambos miembros de una desigualdad, ésta no se ve alterada.

Ejemplo

$$2 < 7$$

Si se suma un número positivo, por ejemplo 4

$$2 + 4 < 7 + 4$$

Si se suma un número negativo, por ejemplo -3

$$2 - 3 < 7 - 3$$

2. Multiplicación y división.
   a. Si se multiplica o divide una desigualdad por un mismo número positivo esta no se altera.

Ejemplo

$$4 > 3$$

Si se multiplican ambos miembros por 2, la desigualdad no se altera.

$$= 4(2) > 3(2)$$

Si se dividen ambos lados de la desigualdad por 2, el sentido de esta tampoco se altera.

$$\frac{4}{(2)} > \frac{3}{(2)}$$

b. Si se multiplica o divide ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, ésta cambia de sentido.

Ejemplo

$$10 > 5$$

Si se multiplica ambos números por -3 hay que cambiar el signo de la desigualdad.

$$10(-3) < 5(-3)$$

Si se divide ambos números por -5, también se debe cambiar el signo de la desigualdad.

$$\frac{10}{(-5)} < \frac{5}{(-5)}$$

3. Valor absoluto.

Se define al valor absoluto de la siguiente manera

$$|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

Ejemplo

$$|-6| \leq 7 \leftrightarrow -7 \leq -6 \leq 7$$
$$|10| \leq 12 \leftrightarrow -12 \leq 10 \leq 12$$

Y de la siguiente manera

$$|a| \geq b \leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

Ejemplo

$$|-8| \geq 7 \leftrightarrow -8 \leq -7 \vee -8 \geq 7$$
$$|12| \geq 20 \leftrightarrow 12 \leq -20 \vee 12 \geq 20$$

Recordemos que para que la disyunción sea verdadera basta que una de las proposiciones simples que la conforman sea verdadera.

Ejercicios

---

1. Coloque el signo $<$ o $>$ que corresponde para que la proposición sea verdadera
   a. $2 \quad 7$
   b. $-5 \quad -7$
   c. $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{5}$
   d. $-4 \quad -\frac{1}{4}$
   e. $\sqrt{3} \quad -\sqrt{7}$

2. Coloque un número que haga que la proposición sea verdadera.
    a. $3 >$
    b. $-4 \geq$
    c. $10 \geq$
    d. $\quad \leq 4$
    e. $\quad > 12$
3. Sume un número a la desigualdad de tal forma que ésta no se altere.
    a. $3 > 1$
    b. $4 \leq 4$
    c. $\frac{1}{5} < 2$
    d. $-7 \leq 7$
    e. $-15 > -20$
4. Multiplique o sume un número de tal forma que la desigualdad cambie de sentido.
    a. $-5 \geq -12$
    b. $\frac{5}{3} > \frac{1}{2}$
    c. $-11 \leq 17$
    d. $a > b$
    e. $\frac{3}{4} < 1$
5. Exprese simbólicamente las proposiciones:
    a. 12 es mayor que 7
    b. 6 es menor o igual que 8
    c. 20 es mayor que 10
    d. -18 es menor que 18
    e. -3 es mayor que -5
6. Represente cada proposición desde el punto de vista del otro número
    a. $10 \leq 14$
    b. $-15 < -10$
    c. $4 < 5$
    d. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
    e. $\sqrt{5} < \sqrt{11}$

Intervalos

Nos situamos de nuevo dentro del conjunto de los números reales y en el esquema de la recta real, la razón de ello es que el todo es divisible en partes menores, denominadas conjuntos solución o intervalos. Las ecuaciones generan como respuesta unos pocos valores que son puntuales, en cambio las inecuaciones producen como resultado un tramo de recta, un espacio continuo delimitado por dos extremos la mayoría de las veces. En consecuencia, la cabal comprensión de los intervalos es de mucha importancia puesto que es la expresión final procedimientos de carácter algebraicos donde están presentes desigualdades e incógnitas.

Definición

Un intervalo es un subconjunto de los números reales, conformado por los infinitos números que existen entre dos números reales que actúan como extremo inferior y extremo superior. Desde el punto de vista geométrico un intervalo es un segmento de la recta real.

Si se ubica un número cualquiera sobre la recta real, ésta queda dividida en dos segmentos, los cuales también se conocen como intervalos. Situación representada en la Figura 1.

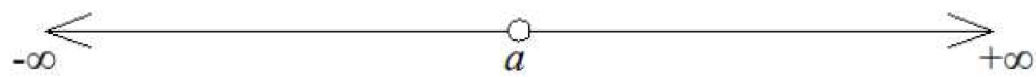


Figura 1: El punto o número a divide a la recta real en dos segmentos: a la izquierda de a y a la derecha de a. Ambos segmentos constituyen intervalos de la recta real. El símbolo ∞ significa "infinito", no se trata de un número, se usa para transmitir la idea

Hacia el lado izquierdo del número cualquiera a, están todos los números reales menores que a. El símbolo menos infinito ($-\infty$) representa a cualquier número menor que a. El círculo en blanco se utiliza para indicar que se trata de un extremo abierto, es decir que no se incluye al número a.

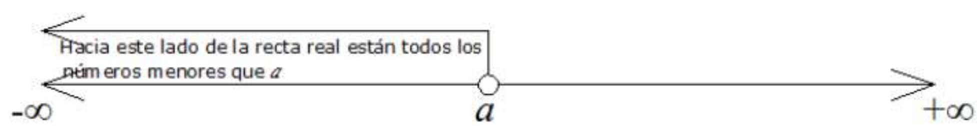


Figura 2: Al dividir la recta real en dos segmentos mediante el número a, el segmento o intervalo de la izquierda representa a todos los números que son menores que a.

En el mismo sentido. Hacia el lado derecho del número cualquiera a, están todos los números mayores que a. El símbolo más infinito ($+\infty$) representa cualquier número mayor que a.

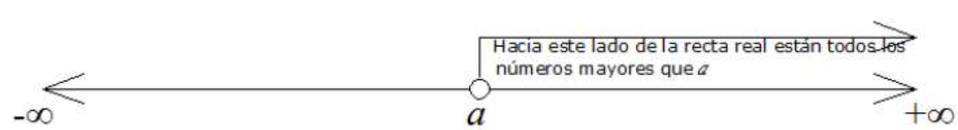


Figura 3: Al dividir la recta real en dos segmentos mediante el número a, el segmento o intervalo ubicado a la derecha representa a todos los números que son mayores que a.

Si el número cualquiera se incluye dentro del intervalo, la forma utilizada para representar a ese extremo es mediante un círculo relleno.

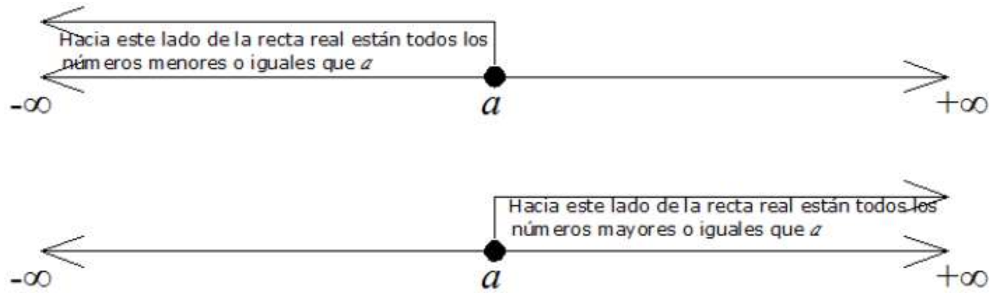


Figura 4: El círculo relleno se utiliza en las representaciones gráficas de intervalos para indicar que el extremo forma pare del intervalo. En el lenguaje ordinario, si se trata de números a la izquierda del extremo se leen como menores o iguales que a, si se t

Si en vez de un número real, se ubican sobre la recta dos números cualesquiera a y b, ésta queda dividida en tres partes, cada una de esas partes son segmentos de recta, los cuales también se conocen como intervalos.

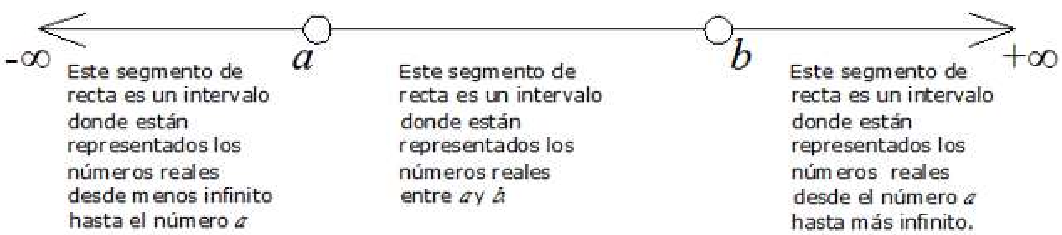


Figura 5 Los puntos o números a y b, al ser ubicados sobre la recta real, la dividen en tres segmentos, los cuales constituyen cada uno un intervalo.

Tipos de intervalos

Tomando en cuenta si se incluyen o no los extremos de un intervalo dentro del conjunto de números que lo conforman, se establecen varios tipos.

Intervalos abiertos. Son aquellos intervalos donde los extremos no forman parte del conjunto, actúan solamente como puntos frontera, como números que establecen una separación con otros intervalos.

Usaremos dos tipos de notaciones para los intervalos: la notación mediante símbolos de agrupación también conocida como notación de intervalos y la notación gráfica. Más adelante se usará una tercera opción para representar a los intervalos como inecuaciones.

En notación mediante símbolos de agrupación. También se conoce a esta notación como notación de intervalo. Los extremos de un intervalo abierto se representan acompañados de un paréntesis, de esta manera.

$$(a, b)$$

Ejemplo

$$(5, \ \ 10)$$

Significa que se trata de un intervalo conformado por todos los números reales entre 5 y 10, pero sin incluir ni al número 5 ni al número 10. Cualquier número real mayor que 5 y menor que 10 se encuentra dentro de este intervalo. Por ejemplo, el número 5,0001 pertenece al intervalo; el número 9,999 también pertenece al intervalo; el número 7,214 pertenece al intervalo; el número 4,993 no pertenece al intervalo; el número 10 no pertenece al intervalo. Existen infinitos números reales que están dentro del intervalo.

En notación gráfica. Los intervalos se representan con puntos sin rellenar en sus extremos y con una zona sombreada entre los extremos para indicar que allí existen infinitos valores reales.

El intervalo $(5, 10)$ se representa gráficamente de tal como se indica en la Figura 6.

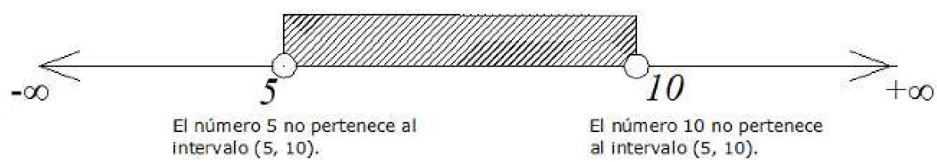


Figura 6: Representación gráfica del intervalo (5,10) el cual es abierto por ambos extremos, significa esto que ni el número 5, ni el número 10 forman parte del intervalo; solamente están actuando como puntos de separación.

Se traza una recta, en cada extremo de la recta se colocan los símbolos correspondientes a menos infinito por el lado izquierdo y a más infinito por lado derecho. Significa que tanto por el lado izquierdo de la recta como por el lado derecho están presentes infinitos números que no están representados. Luego se ubican los dos números que actúan como extremos y puntos de separación del intervalo; como ni el número 5 ni el número 10 están incluidos en el intervalo, la representación se hace mediante círculos en blanco. Finalmente, se conforma un rectángulo que tiene a dos sus vértices sobre los puntos extremos del intervalo, se sombrea para indicar que existen infinitos números reales entre los extremos del intervalo.

El intervalo $(5, 10)$ está conformado por todos los números reales que son mayores que 5 pero menores que 10.

Intervalos cerrados. Son intervalos donde los extremos están incluidos dentro del conjunto de números que forman parte de ellos. Es decir, los extremos aparte de ser puntos de separación o puntos frontera también integran al intervalo.

Notación mediante símbolos de agrupación. Los extremos de estos intervalos se representan mediante un corchete cuadrado, de esta manera.

$$[a, b]$$

Ejemplo

$$[-7,4]$$

Significa que se trata de un intervalo cerrado por ambos extremos; el extremo inferior es -7 y se incluye dentro del intervalo, de igual manera el extremo superior es 4 y también se incluye dentro del intervalo. Cualquier número real entre -4 y 7 es parte del intervalo incluidos los dos números mencionados. Por ejemplo, el número 3 pertenece al intervalo; el número -1 también pertenece al intervalo; también pertenecen a ese intervalo números decimales como -3,00047; 1,0378; 5,23; 6,825 por mencionar algunos de los infinitos números que son mayores o iguales que -4 y menores o iguales que 7.

Notación gráfica. Los intervalos cerrados se representan gráficamente mediante círculos rellenos en sus extremos y con una zona rectangular sombreada de extremo a extremo para indicar que existen infinitos números reales entre los dos valores que actúan como fronteras.

El intervalo $[-4,7]$ se representa tal como se indica en la Figura 7.

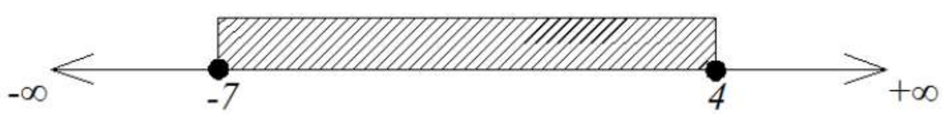


Figura 7: Representación gráfica del intervalo [-7,4]. Observe que se trata de un intervalo cerrado por ambos extremos, por lo tanto se usan círculos rellenos.

Observe que en este caso los extremos del intervalo -7 y 4 se representan con círculos rellenos, en terminología de conjuntos, hablando del intervalo central, se dice que -7 pertenece al intervalo y 4 pertenece al intervalo. La zona sombreada transmite la idea de que entre los dos extremos existen infinitos números reales. Dentro de ese intervalo están todos los números reales mayores o iguales que menos siete y menores o iguales que 4.

Intervalos abiertos por un extremo. Se trata de intervalos donde uno de los extremos es un número que no pertenece al intervalo y actúa solamente como punto de separación. El otro extremo del intervalo es cerrado.

Notación mediante símbolos de agrupación. Se producen dos combinaciones para este tipo de intervalos.

Intervalos abiertos por el lado izquierdo: $(a,b]$

Intervalos abiertos por el lado derecho: $[a,b)$

Ejemplo

$$(2,9]$$

Ese intervalo representa a todos los números que son mayores que 2 y menores o iguales que 9. En dicho intervalo las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$3 \in (2, 9]$$
$$6 \in (2, 9]$$
$$8 \in (2, 9]$$
$$4{,}734 \in (2, 9]$$
$$9 \in (2, 9]$$
$$2{,}0421 \in (2, 9]$$
$$\frac{10}{3} \in (2, 9]$$
$$\sqrt{5} \in (2, 9]$$

En el intervalo $(2, 9]$ las siguientes proposiciones son falsas:

$$\sqrt{3} \in (2, 9]$$
$$\frac{1}{4} \in (2, 9]$$
$$104 \in (2, 9]$$

La representación gráfica de dicho intervalo es:

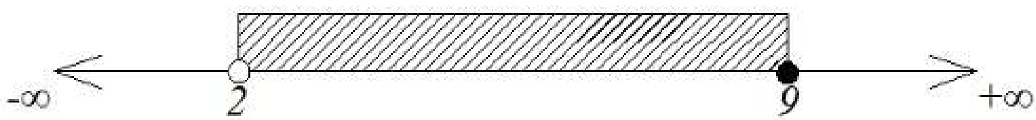


Figura 8: Representación gráfica del intervalo (2, 9], el cual es abierto por el extremo izquierdo y cerrado por el extremo derecho. Todos los números reales mayores que 2 y menores o iguales que 9 forman parte de este intervalo.

Ejemplo

$$[-2, 11)$$

Este intervalo es cerrado por el extremo izquierdo y abierto por el extremo derecho. Todos los números reales que son mayores o iguales que menos dos y menores que 11 pertenecen a este intervalo.

Las siguientes proposiciones son verdaderas para el intervalo $[-2, 11)$.

$$-2 \in [-2, 11)$$
$$11 \notin [-2, 11)$$
$$120 \notin [-2, 11)$$
$$10 \in [-2, 11)$$
$$\sqrt{70} \notin [-2, 11)$$

La representación gráfica de este intervalo es la indicada en la Figura 9.

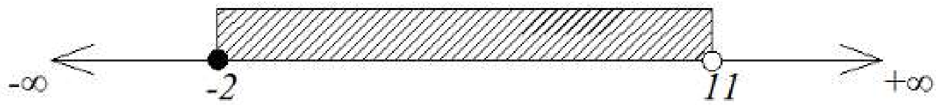


Figura 9: Representación gráfica del intervalo [-2, 11), el cual es cerrado por el extremo izquierdo y abierto por el extremo derecho. Todos los números reales mayores o iguales que -2 y menores que 11 forman parte de este intervalo.

Intervalos infinitos. Se trata de intervalos donde uno de los extremos es infinito. Cuando los dos extremos del intervalo son infinitos se está en presencia de la recta real. Estos intervalos se producen bien sea hacia el lado izquierdo de la recta real o hacia el lado derecho de la misma.

Notación mediante símbolos de agrupación. Existen cuatro posibilidades para este tipo de intervalo. El extremo correspondiente al símbolo infinito siempre se representa mediante paréntesis, es decir es un extremo abierto.

Intervalo infinito abierto por lado derecho: $(-\infty, a)$
Intervalo infinito cerrado por el lado derecho: $(-\infty, a]$
Intervalo infinito abierto por el lado izquierdo: $(b, +\infty)$
Intervalo infinito cerrado por el lado izquierdo: $[b, +\infty)$

Ejemplo

$$(-\infty, 7)$$

En este caso se está representando a un intervalo infinito, con el extremo superior o extremo derecho abierto. Cualquier número real menor que 7 es parte de este intervalo. Por ejemplo, -1463 es un número que pertenece a este intervalo; 4 también pertenece a este intervalo.

La representación gráfica de este intervalo es la mostrada en la Figura 10.

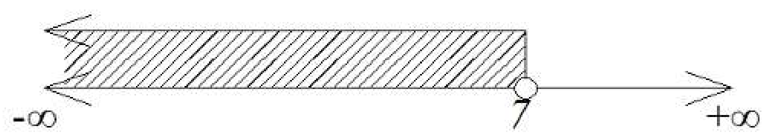


Figura 10: Representación gráfica del intervalo (-∞, 7), el cual es abierto tanto por el extremo izquierdo como por el extremo derecho. Todos los números reales menores que 7 forman parte de este intervalo.

Ejemplo

$$(-\infty, -2]$$

Se trata de un intervalo infinito con el extremo superior o extremo derecho cerrado, significa esto que el número -2 forma parte de dicho intervalo. Cualquier número menor o igual que -2 pertenece al intervalo, por ejemplo: $-4 \in (-\infty, -2]$; $-\sqrt{13} \in (-\infty, -2]$, entre otras infinitas proposiciones .

La representación gráfica de este intervalo corresponde a la Figura 11.

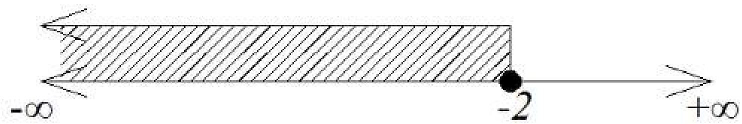


Figura 11: Representación gráfica del intervalo (-∞, -2], el cual es abierto por el extremo izquierdo y cerrado por el extremo derecho. Todos los números reales menores o iguales que -2 forman parte de este intervalo.

Ejemplo

$$(14, +\infty)$$

Se trata de un intervalo infinito con el extremo inferior o extremo izquierdo abierto, el 14 no forma parte del intervalo, actúa en el simplemente como punto de separación. Hacia el lado derecho del intervalo se ubican todos los números reales mayores que 14. Por ejemplo las siguientes proposiciones son verdaderas: $15 \in (14, +\infty)$; $-35 \notin (14, +\infty)$; $4562{,}48 \in (14, +\infty)$.

Este intervalo está representado gráficamente en la Figura 12.

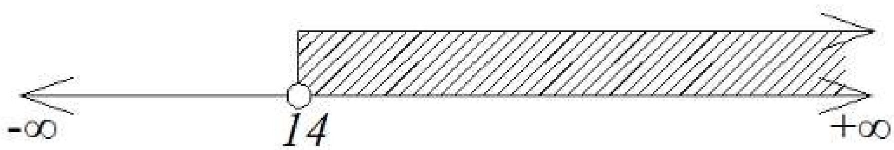


Figura 12: Representación gráfica del intervalo (14, +∞), el cual es abierto tanto por el extremo izquierdo como por el extremo derecho. Todos los números reales mayores que 14 forman parte de este intervalo.

Ejemplo

$$[1, +\infty)$$

En este caso se tiene a un intervalo cerrado por el extremo izquierdo o extremo inferior, lo que significa que ese número es parte del intervalo, por el lado o extremo derecho el intervalo es infinito, motivo por el cual se representa mediante un paréntesis. Todo los números reales mayores o iguales que 1 son parte del intervalo. Las siguientes proposiciones son verdaderas: $0 \in [1, +\infty)$; $1400 \in [1, +\infty)$; $\frac{15}{6} \in [1, +\infty)$; las cuales son solamente algunas dentro de un conjunto infinito de opciones.

La representación gráfica de este intervalo es la siguiente.

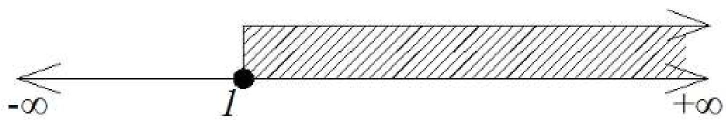


Figura 13: Representación gráfica del intervalo [1,+∞) el cual es cerrado por el extremo inferior o izquierdo y abierto por el extremo derecho. Todos los números reales mayores o iguales que 1 forman parte de este intervalo.

Unión e intersección de intervalos

Como los intervalos no son más que subconjuntos de números reales, son aplicables las operaciones de unión, intersección, complemento y diferencia, tal como se ha visto en el capítulo 2 de este libro. Sin embargo, se explica en esta parte las dos primeras operaciones, por su alto porcentaje de aplicación en la solución de inecuaciones. Se debe tener especial cuidado con los extremos de cada intervalo, los cuales van a configurar bien sea parte de los elementos del nuevo conjunto o intervalo o parte de los extremos de éste. El intervalo obtenido también se conoce con el nombre de conjunto solución.

Ejemplo

Determine el conjunto solución que resulta de la operación: $(-\infty,-6] \cup (-10,3)$

Respuesta

La solución a esta operación se puede hacer mediante el uso de símbolos de agrupación o gráficamente. En cualquiera de los dos casos se deben tener presente los aspectos siguientes:

¿Está un intervalo contenido en otro intervalo?

¿Cuál es el extremo izquierdo más pequeño?

¿Cuál es el extremo superior mayor?

¿Existe solapamiento entre extremos superior e inferior de intervalos diferentes?

Solución mediante símbolos de agrupación. El extremo izquierdo más pequeño es $-\infty$, el extremo superior mayor es 3, el extremo derecho del primer intervalo es mayor que el extremo izquierdo del segundo intervalo por lo tanto existe solapamiento en esa zona. El conjunto solución es:

$$CS = (-\infty, 3)$$

Solución mediante representación gráfica. Se traza la recta real, se ubican los extremos de cada intervalo, respetando el orden en la recta. Luego se sombrean los respectivos intervalos.

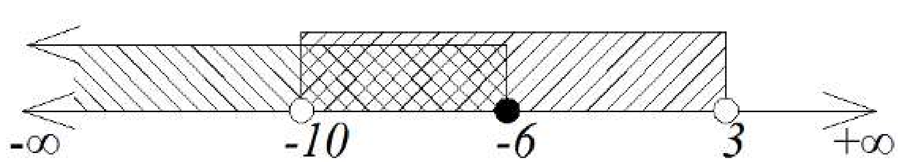


Figura 14: Representación gráfica del intervalo (-∞,3).

Ejemplo

Determine el conjunto solución que resulta de la operación:

$$(-4,5] \cup (8,10]$$

Respuesta

Solución mediante símbolos de agrupación. El extremo izquierdo más pequeño de cada intervalo es -4, el extremo derecho mayor de los intervalos s 10. No existe solapamiento entre el extremo derecho del primer intervalo y el extremo izquierdo del segundo intervalo, por lo tanto hay un espacio entre los dos intervalos.

$$CS = (-4,5] \cup (8,10]$$

Solución mediante representación gráfica. Se representa a cada intervalo sobre la misma recta real, teniendo cuidado del orden y la escala.

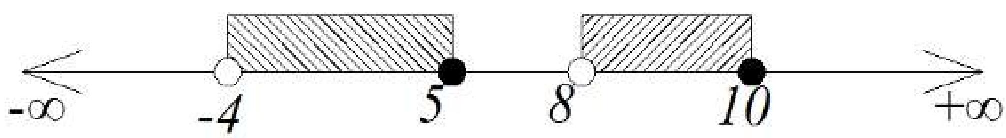


Figura 15: Representación gráfica del intervalo (-4, 5] ∪(8, 10].

Ejemplo

Determine el conjunto solución que resulta de la operación entre los intervalos:

$$(-\infty,10] \cup [3,10)$$

Respuesta

Solución mediante símbolos de agrupación. Un intervalo está contenido en otro. El extremo inferior más pequeño de todos los intervalos es menos infinito $(-\infty)$, el extremo superior mayor es 10, en el conjunto solución este extremo es cerrado.. Existe solapamiento entre el extremo superior del primer intervalo y el extremo inferior o izquierdo del segundo intervalo.

$$CS = (-\infty,10]$$

Solución mediante representación gráfica. Se representa a cada intervalo sobre una misma recta real. Las zonas sombreadas son el intervalo solución y se muestran en la Figura 16.

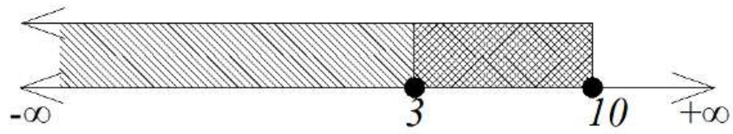


Figura 16: Representación gráfica del intervalo (-∞, 10] ∪ [3, 10)

Ejemplo

Determine el conjunto solución que resulta de la operación entre intervalos:

$$(7, 12) \cap [10, 15)$$

Respuesta

Solución mediante símbolos de agrupación. Ningún intervalo está contenido en otro. El extremo inferior más pequeño de los intervalos es 7 y el extremo superior mayor es 15. Especial cuidado hay que tener con los extremos superior e inferior de los intervalos, ya que ellos son los que definen la intersección; en este caso el extremo inferior del segundo intervalo es 10 y el extremo superior del primer intervalo es 12. El conjunto solución es:

$$CS = [10, 12)$$

Solución mediante representación gráfica. En la misma recta real se ubican los intervalos, se debe cuidar tanto el orden como la escala. La zona donde el sombreado de los intervalos coincide, forma parte del conjunto solución.

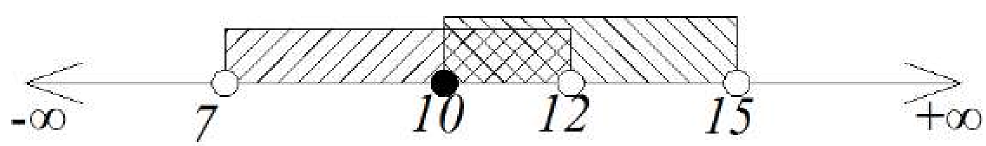


Figura 17: Representación gráfica del intervalo (7,12) ∩ [10, 15).

Ejemplo

Determine el conjunto solución que resulta de la operación:

$$(-6, -2] \cap (0, 5]$$

Respuesta

Solución mediante símbolos de agrupación. El extremo inferior más pequeño es -6, el extremo superior mayor es 5. El extremo superior del primer intervalo y el inferior del segundo intervalo dejan un espacio sobre la recta que no está cubierto por alguno de los intervalos, en tal sentido, la intersección es vacía.

$$CS = \emptyset$$

Solución mediante representación gráfica. Se ubica a cada intervalo sobre la misma recta real, se observan los sombreados correspondientes a los intervalos, lo cual demuestra que no existe intersección.

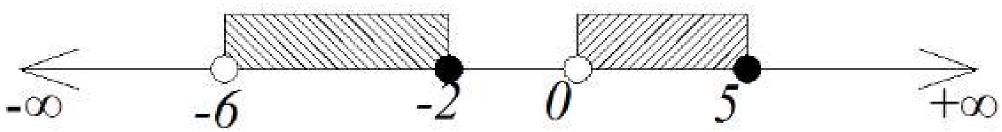
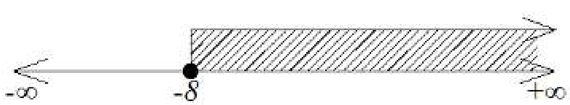
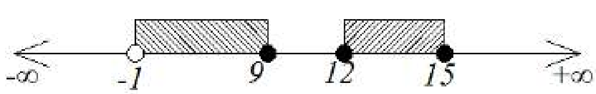
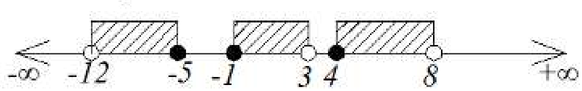


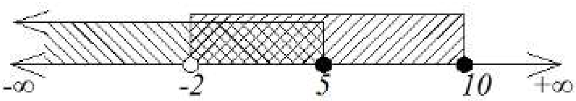
Figura 18: Representación gráfica del intervalo (-6,-2] ∩ (0, 5]

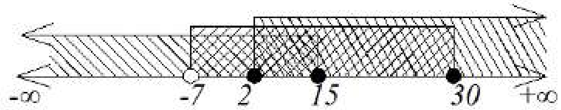
Ejercicios

1. Describa mediante lenguaje normal los elementos que conforman a cada uno de los intervalos
    a. $(-\infty, 0)$
    b. $[3, 4)$
    c. $[-9, -5)$
    d. $(12, +\infty)$
    e. $[105,200]$
2. Dados los intervalos siguientes, indique cinco proposiciones verdaderas y cinco proposiciones falsas relacionadas con los elementos que los conforman.
    a. $[1,3]$
    b. $(-7, 7]$
    c. $(130, 135]$
    d. $[-4, +\infty)$
    e. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$
3. Indique el extremo inferior y el extremo superior de cada intervalo
    a. $(-2, 5)$
    b. $[4, 10]$
    c. $(-\infty, +\infty)$
    d. $(-\infty, -4)$
    e. $[11, 12]$
4. Dados los intervalos representados en forma gráfica, expréselos como símbolos de agrupación o como operaciones entre intervalos según corresponda.
    a. 

    b. 

    c. 

d. 

e. 

5. Represente gráficamente las siguientes operaciones entre intervalos
    a. $(-\infty, 11) \cup [-12, 20]$
    b. $(0, 2] \cup [0, 4)$
    c. $[-5,3] \cap (-2,8)$
    d. $(-\infty, 1) \cap (5,12)$
    e. $(-\infty, 15) \cap (-3,6)$

Inecuaciones

En este aparte se aplica el concepto de desigualdad a estructuras parecidas a las ecuaciones con la diferencia de la sustitución del símbolo de igualdad por alguno de estos: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Inclusive se estudian estructuras que contienen a dos de esos símbolos. Se destaca la importancia de manejar adecuadamente las herramientas que conducen a la solución de las inecuaciones puesto que éstas constituyen una manera de modelar matemáticamente numerosos aspectos de la presentes en la vida real.

Definición

Una inecuación es una desigualdad en la cual está presente al menos una variable o incógnita en su estructura. Resolver una inecuación consiste en determinar el conjunto solución que satisface a esa variable. Dicho conjunto solución está conformado por una o varias partes de la recta real denominados también intervalos. En consecuencia, la solución de una inecuación es un intervalo.

Son ejemplos de inecuaciones los siguientes:

a. $3x + 1 < 5$
b. $1 - x + y \geq 7$
c. $\frac{x-2}{x-3} > 2$
d. $x^2 + 3x + 2 \geq 0$
e. $|4x - 2| \leq 1$

Se procura en las secciones siguientes aprender a resolver cualquiera de los tipos de inecuaciones indicadas, comenzando por las más sencillas, denominadas inecuaciones de primer grado o lineales y finalizando con las inecuaciones fraccionarias y con valor absoluto.

Inecuaciones lineales

Son inecuaciones donde la variable o variables se encuentra elevada al exponente 1 y nunca aparece formando parte del denominador en estructuras fraccionarias.
Son ejemplos de ecuaciones de primer grado:

$$6x + 4 < 2$$
$$5x + 3y \leq 7$$
$$8 - 10x < 3$$
$$\frac{11x + 6}{5} \leq 2x + 1$$

Resolver una inecuación de primer grado consiste en manipular algebraicamente la estructura con el fin aislar hacia un extremo del símbolo que identifica la desigualdad a la variable. Se debe prestar atención a las propiedades de las desigualdades planteadas en una sección previa de este capítulo.

Ejemplo

Resuelva la inecuación $4 + 3x < 6$

Respuesta

El inverso aditivo de 4 es -4, por lo tanto se suma este número en ambos miembros de la inecuación.

$$4 - 4 + 3x < 6 - 4$$
$$3x < 2$$

Ahora se multiplica ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{3}$ que es el inverso multiplicativo de 3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) < (2)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x < \frac{2}{3}$$

Donde la x representa a cualquier número real menor que dos tercios. El conjunto solución de la inecuación se expresa en notación de conjuntos de la forma siguiente:

$$CS = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < \frac{2}{3}\right\}$$

Dicho conjunto solución también puede expresarse en notación de intervalo:

$$CS = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

Recordemos que este tipo de intervalos son infinitos y representan a todos los números reales que son menores que dos tercios.

De igual manera el conjunto solución puede representarse de forma gráfica:

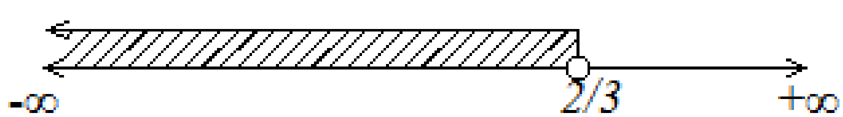


Figura 19: Conjunto solución de la inecuación 4+3x<6

Ejemplo

Resuelva la inecuación $3x + 8x + 4 \geq 5$

Respuesta

Se agrupan las x

$$11x + 4 \geq 5$$

Se suma en ambos lados el inverso aditivo de 4 que es -4

$$11x + 4 - 4 \geq 5 - 4$$
$$11x \geq 1$$

Se multiplican ambos extremos de la desigualdad por $\frac{1}{11}$ que es el inverso multiplicativo de 11

$$(11x)\left(\frac{1}{11}\right) \geq (1)\left(\frac{1}{11}\right)$$
$$x \geq \frac{1}{11}$$

La solución de la inecuación por lo tanto es cualquier número real mayor o igual que $\frac{1}{11}$. Esta solución se puede expresar de tres maneras.

a. Respuesta mediante notación de conjuntos: $CS = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq \frac{1}{11}\right\}$
b. Respuesta mediante notación de intervalos: $CS = \left[\frac{1}{11}, +\infty\right)$
c. Respuesta mediante notación gráfica:

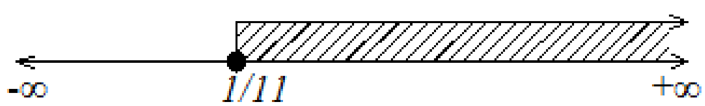


Figura 20: Conjunto solución de la inecuación 3x+8x+4≥5

Ejemplo

Resuelva la inecuación $3 - x \leq 4$

Respuesta

Se suma en ambos miembros de la inecuación -3 que el inverso aditivo de 3.

$$3 - x - 3 \leq 4 - 3$$
$$-x \leq 1$$

Se multiplican ambos miembros de la inecuación por -1 con el fin de expresar la variable de manera positiva. Hay que tener presente que cuando una desigualdad se multiplica por un número negativo, se debe cambiar el signo de ésta.

$$(-x)(-1) \geq (1)(-1)$$

Tenga en cuenta que se utilizan los paréntesis para indicar que se está multiplicando.

$$x \geq -1$$

La respuesta obtenida se interpreta como que el conjunto solución de la inecuación son todos los números reales mayores o iguales que menos 1.

a. Respuesta en notación de conjunto: $CS = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1\}$
b. Respuesta en notación de intervalo: $CS = [-1, +\infty)$
c. Respuesta mediante representación gráfica

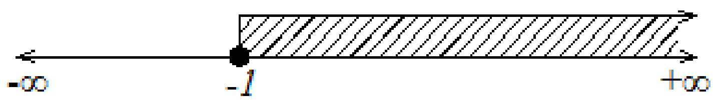


Figura 21: Solución gráfica a la inecuación 3-x≤4

Ejemplo

Resuelva la inecuación $4 - 5x > 7 + 2x$

Respuesta

La variable está repartida entre los miembros de la inecuación, por lo que se debe manipular algebraicamente la inecuación hasta lograr que la variable quede en un miembro y la parte numérica en el otro miembro.

Se suma en ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de $-5x$ que es $5x$.

$$4 - 5x + 5x > 7 - 2x + 5x$$
$$4 > 7 + 3x$$

Se suma en ambos lados de la desigualdad -7 que es el inverso aditivo de 7.

$$4 - 7 > 7 + 3x - 7$$
$$-3 > 3x$$

Se multiplica ambos miembros de la inecuación por $\frac{1}{3}$ que es el inverso multiplicativo de 3, el número que acompaña a la variable x.

$$(-3)\left(\frac{1}{3}\right) > (3x)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$-1 > x$$

Como lo normal es que la variable esté en el primer miembro, se invierte el orden, incluyendo la desigualdad.

$$x < -1$$

a. Respuesta en notación de conjunto: $CS = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < -1\}$
b. Respuesta en notación de intervalo: $CS = (-\infty, -1)$
c. Repuesta en representación gráfica

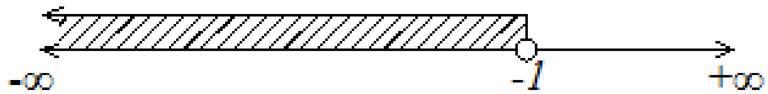


Figura 22: Conjunto solución en forma gráfica de la inecuación 4-5x>7+2x

Ejemplo

Resuelve la inecuación $3 \leq 7x + 5 \leq 11$

Respuesta

Este tipo de inecuaciones se puede considerar que es la conjunción de dos inecuaciones $7x + 5 \geq 3 \ \wedge 7x + 5 \leq 11$, de tal manera que se puede optar por resolver las dos proposiciones de manera separada y luego intersectar los resultados. También se puede resolver la estructura tal como está planteada.

Resolución de las proposiciones de manera separada:

La primera proposición es

$$7x + 5 \geq 3$$
$$7x \geq -2$$
$$x \geq -\frac{2}{7}$$

La otra proposición es

$$7x + 5 \leq 11$$
$$7x \leq 6$$
$$x \leq \frac{6}{7}$$

Ahora se intersectan estos dos intervalos, es decir se busca la conjunción entre las dos proposiciones

$$\left[-\frac{2}{7}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{6}{7}\right] = \left[-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right]$$
$$CS = \left[-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right]$$

También pudo haberse realizado la búsqueda del conjunto solución a partir de la proposición planteada inicialmente o proposición compuesta

$$3 \leq 7x + 5 \leq 11$$

Se suma -5 en cada uno de los miembros de la inecuación

$$3 - 5 \leq 7x + 5 - 5 \leq 11 - 5$$
$$-2 \leq 7x \leq 6$$

Se multiplica cada miembro de la inecuación por $\frac{1}{7}$

$$(-2)\left(\frac{1}{7}\right) \leq (7x)\left(\frac{1}{7}\right) \leq (6)\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$-\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{6}{7}$$

a. Respuesta en notación de conjunto: $CS = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{6}{7}\right\}$

b. Respuesta en notación de intervalos: $CS = \left[-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right]$
c. Respuesta en representación gráfica

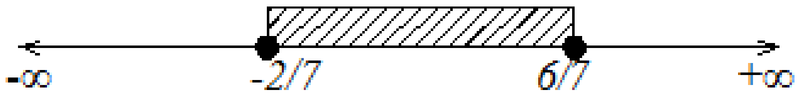


Figura 23: Conjunto solución de la inecuación 3≤7x+5≤11

Ejemplo

Resuelva la inecuación $\frac{3}{5} < \frac{7-2x}{4} \leq 8$

Respuesta

Se multiplica cada miembro de la inecuación por 4, que es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)(4) < \left(\frac{7-2x}{4}\right)(4) \leq (8)(4)$$
$$\frac{12}{5} < 7 - 2x \leq 32$$

Se suma a cada miembro -7 el cual es el inverso aditivo de 7.

$$\left(\frac{12}{5}\right) - 7 < 7 - 2x - 7 \leq 32 - 7$$
$$-\frac{23}{5} < -2x \leq 25$$

Se multiplica cada miembro por $-\frac{1}{2}$ y se tiene el cuidado de invertir las desigualdades

$$\frac{23}{10} > x \geq -\frac{25}{2}$$

Se ordenan los extremos

$$-\frac{25}{2} \leq x < \frac{23}{10}$$

a. Respuesta en notación de conjunto: $CS = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{25}{2} \leq x < \frac{23}{10}\right\}$
b. Respuesta en notación de intervalo: $CS = \left[-\frac{25}{2}, \frac{23}{10}\right)$
c. Repuesta mediante representación gráfica:

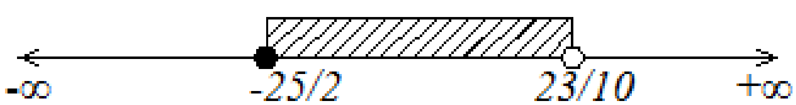


Figura 24: Conjunto solución en forma gráfica de la inecuación 3/5<(7-2x)/4≤8.

Recordemos que la inecuación $\frac{3}{5} < \frac{7-2x}{4} \leq 8$ no es más que una proposición compuesta por dos proposiciones simples conectadas por el conectivo “y”.

$$\frac{3}{5} < \frac{7-2x}{4} \wedge \frac{7-2x}{4} \leq 8$$

Se puede resolver cada proposición por separado y luego intersectar los resultados. Trabajando con la primera proposición:

$$\frac{3}{5} < \frac{7-2x}{4}$$

Se multiplica por 4 ambos miembros de la inecuación

$$\left(\frac{3}{5}\right)(4) < \left(\frac{7-2x}{4}\right)(4)$$

$$\frac{12}{5} < 7-2x$$

Se suma -7 en ambos lados de la desigualdad

$$\frac{12}{5} - 7 < 7 - 2x - 7$$

$$-\frac{23}{5} < -2x$$

Se multiplica ambos lados por $-\frac{1}{2}$ y se invierte el signo de la inecuación

$$\frac{23}{10} > x$$

Se coloca la variable del lado izquierdo, por lo tanto se invierte la desigualdad

$$x < \frac{23}{10}$$

Trabajando con la segunda proposición:

$$\frac{7-2x}{4} \leq 8$$

Se multiplica ambos miembros por 4

$$\left(\frac{7-2x}{4}\right)(4) \leq (8)(4)$$

$$7-2x \leq 32$$

Se suma -7 en ambos lados de la desigualdad

$$7-2x-7 \leq 32-7$$

$$-2x \leq 25$$

Se multiplica ambos miembros por $-\frac{1}{2}$ y se invierte la desigualdad

$$x \geq -\frac{25}{2}$$

Los resultados coinciden con la solución de la estructura compuesta ya explicada.

Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$\frac{t+3}{4} \leq \frac{t-2}{3}$$

Respuesta

La variable en este caso es t, la cual aparece en ambos lados de la desigualdad, aunque en ambos términos aparece una fracción, no se considera una inecuación fraccionaria ya que la variable está en ambos casos en el numerador.

En primer lugar hay que eliminar los denominadores

Se multiplica en ambos miembros por 4 y por 3, es decir por 12.

$$\left(\frac{t+3}{4}\right)(12) \leq \left(\frac{t-2}{3}\right)(12)$$
$$3t+9 \leq 4t-8$$

Ahora se suma en ambos miembros *-4t.*

$$3t+9-4t \leq 4t-8-4t$$
$$-t+9 \leq -8$$

Se suma en ambos términos -9

$$-t+9-9 \leq -8-9$$
$$-t \leq -17$$

Se multiplica ambos miembros por -1, se invierte el signo de la inecuación.

$$(-t)(-1) \leq (-17)(-1)$$
$$t \geq 17$$

Inecuaciones lineales con Geogebra.

Las inecuaciones son manejadas por Geogebra a través de la interfaz denominada CAS (Cálculo simbólico). El lector ya debe tener una visión acerca de este importante software matemático, el cual es muy fácil de usar, sobre todo si ya se tiene experiencia en la solución de estructuras algebraicas y de ecuaciones, los problemas relacionados con las inecuaciones son de muy fácil manejo.

Resolver la inecuación

$$\frac{2(x+1)}{3}+\frac{4(3x+1)}{5} \leq \frac{3(3x+5)}{7}$$

Se carga Geogebra, se selecciona la aplicación CAS y se escribe la estructura planteada de la siguiente manera: (2/3)(x+1)+(4/5)(3x+1)<=(3/7)(3x+5). Al presionar la tecla Enter o Intro el programa presenta la inecuación parcialmente desarrollada.

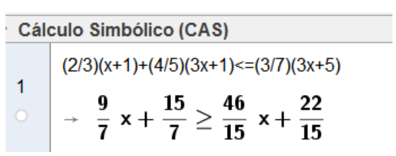


Figura 25: Ventana CAS de Geogebra en la cual se muestra la estructura de la inecuación.

Para que el programa resuelva la inecuación se debe presionar el botón Resuelve, que tiene al forma x=.

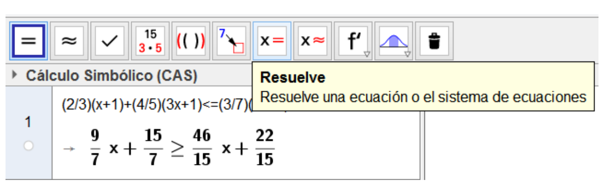


Figura 26: Botón Resuelve de Geogebra, el cual permite obtener el conjunto solución de la inecuación.

La respuesta es

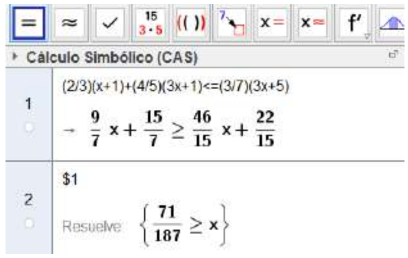


Figura 27: Conjunto solución de la inecuación en Geogebra, mostrado en la fila 2 de la ventana CAS.

De acuerdo a la notación usada en este libro el conjunto solución es

a. Conjunto solución en notación de conjuntos: $CS=\left\{x/x\in\mathbb{R}\wedge x\leq\frac{71}{187}\right\}$

b. Conjunto solución en notación de intervalos: $CS=\left(-\infty,\frac{71}{187}\right]$

c. Conjunto solución en representación gráfica

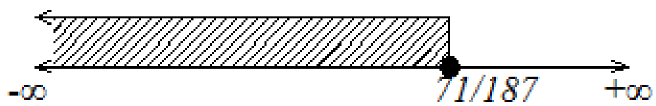


Figura 28: Conjunto solución expresado gráficamente de la inecuación 2(x+1)/3+4(3x+1)/5≤3(3x+5)/7.

Ejercicios

1. Resuelva las inecuación dada y exprese su respuesta en notación de conjunto, notación de intervalo y gráficamente.
   a. $10x-4<16$
   b. $2-x\geq 8$
   c. $\frac{4-7x}{5}\geq 2$
   d. $\frac{x}{5}+\frac{x}{6}<12$
   e. $\frac{5(x-1)}{2}+\frac{(6x+5)}{7}\leq x+4$
   f. $4-x\leq 12x+5\leq 30-x$
   g. $\frac{10x-3}{2}+\frac{(2x-1)}{7}<\frac{x}{2}$
   h. $\left(5-\sqrt{2}\right)x\leq\frac{7}{5+\sqrt{2}}$
   i. $2-\left(\frac{1-x}{3}\right)\geq\frac{6}{5}$
   j. $-8\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{3}\right)<\frac{4}{9}$

2. Resuelva la inecuación dada con la ayuda de Geogebra y exprese la respuesta de manera gráfica
   a. $\frac{x-9}{3}<\frac{5}{8}$

b. $\left(\frac{10}{9}\right)\frac{(x-3)}{2} > \frac{19}{4}$
c. $(5y+6) + \frac{7y-3}{8} \leq 1 - y$
d. $4 < 4x + 2 \leq 21$
e. $x + 1 \leq 10x - 7 < x + 5$
f. $\frac{2x-5}{4} < \frac{6x-3}{8} \leq \frac{8x+1}{16}$
g. $-3 < 4x - 10x - 7 \leq 10$
h. $\frac{3+\frac{2}{5}x}{2} + \frac{7}{4} \leq \frac{7+\frac{3}{4}}{5}$
i. $\frac{x+4x-10x}{3} < \frac{3}{7} - 1$
j. $\frac{x}{1+\sqrt{3}} + \frac{11}{1-\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}$

Inecuaciones con valor absoluto

Tal como lo indica el título, se trata de inecuaciones contenidas dentro de la función valor absoluto. Cuando se estudió las propiedades de las desigualdades incluyó un aparte para indicar cómo estructurar una desigualdad de este tipo, aspectos que ahora pueden expresarse como:

$$|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| \geq a \leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$$

Ejemplo

Resolver la inecuación $|5x+3| \leq 2$

Respuesta

$$-2 \leq 5x + 3 \leq 2$$
$$-2 - 3 \leq 5x + 3 - 3 \leq 2 - 3$$
$$-5 \leq 5x \leq -1$$
$$(-5)\left(\frac{1}{5}\right) \leq (5x)\left(\frac{1}{5}\right) \leq (-1)\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{5}$$
$$\boldsymbol{CS} = \left\{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \wedge -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right\}$$

Esta respuesta puede quedar tal como está escrita. Sin embargo, si a usted se le exige presentarla bajo alguna de las otras notaciones ya tiene las herramientas necesarias para hacerlo.

Ejemplo

Resolver la inecuación $\left|\frac{10x-4}{7}\right| \geq 8$

Respuesta

$$\frac{10x-4}{7} \leq -8 \vee \frac{10x-4}{7} \geq 8$$

Resolvamos cada proposición

$$\frac{10x-4}{7} \leq -8$$
$$\left(\frac{10x-4}{7}\right)(7) \leq (-8)(7)$$
$$10x-4 \leq -56$$
$$10x-4+4 \leq -56+4$$
$$10x \leq -52$$
$$(10x)\left(\frac{1}{10}\right) \leq (-52)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$x \leq -\frac{52}{10}$$
$$\boldsymbol{x \leq -\frac{26}{5}}$$

$$\frac{10x-4}{7} \geq 8$$
$$\left(\frac{10x-4}{7}\right)(7) \geq (8)(7)$$
$$10x-4 \geq 56$$
$$10x-4+4 \geq 56+4$$
$$10x \geq 60$$
$$(10x)\left(\frac{1}{10}\right) \geq (60)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$x \geq \frac{60}{10}$$
$$\boldsymbol{x \geq 6}$$

La respuesta está conformada por la unión de los dos intervalos, la cual equivale a la conjunción ∨.

$$CS = \left\{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \wedge \boldsymbol{x} \leq -\frac{\boldsymbol{26}}{\boldsymbol{5}} \vee \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{6}\right\}$$

La representación gráfica de este conjunto solución es

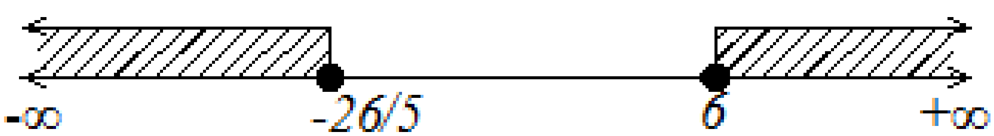


Figura 29: Conjunto solución, representado gráficamente, de la inecuación |(10x-4)/7|≥8.

Ejemplo

Resolver la inecuación $4 - \left|\frac{3-5x}{10}\right| > 1$

Respuesta

Se debe eliminar el 4 que está sumando al valor absoluto. Se suma -4 en ambos miembros.

$$4 - \left|\frac{3-5x}{10}\right| - 4 > 1 - 4$$

$$-\left|\frac{3-5x}{10}\right| > -3$$

Se multiplica ambos miembros por -1 y se invierte el signo de la desigualdad

$$(-1)\left(-\left|\frac{3-5x}{10}\right|\right) < (-3)(-1)$$

$$\left|\frac{3-5x}{10}\right| < 3$$

$$-3 < \frac{3-5x}{10} < 3$$

$$(-3)(10) < \left(\frac{3-5x}{10}\right)(10) < (3)(10)$$

$$-30 < 3 - 5x < 30$$

$$-30 - 3 < 3 - 5x - 3 < 30 - 3$$

$$-33 < -5x < 27$$

$$(-33)\left(-\frac{1}{5}\right) > (-5x)\left(-\frac{1}{5}\right) > (27)\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{33}{5} > x > -\frac{27}{5}$$

Observe atentamente esta respuesta y verá que se trata del intervalo $\left(-\frac{27}{5}, \frac{33}{5}\right)$. En dicho intervalo están todos los números reales mayores que $-\frac{37}{5}$ y menores que $\frac{43}{5}$. Ubíquese siempre en la variable y recuerde que si la "punta de la flecha" está llegando a *x* es porque *x* es menor que el extremo de donde "parte la flecha".

$$CS = \left\{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} - \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{5}} < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{5}}\right\}$$

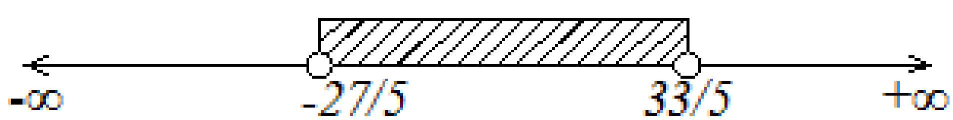


Figura 30: Repesentación gráfica del conjunto solución de la inecuación 4-|(3-5x)/10|>1.

Inecuaciones lineales con valor absoluto y Geogebra. Este software puede calcular inecuaciones con valor absoluto. Cuando se ingresa la estructura de la inecuación en la ventana CAS, se debe tener el cuidado de introducir la función abs( ) en vez de las barras características del valor absoluto.

Ejemplo

Resolver la inecuación $10 + \left|\frac{4}{7} - \frac{9x}{11}\right| > 15$

Respuesta

Cargar el Software y en la venta CAS escribir la estructura de la inecuación

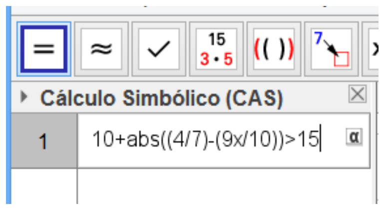


Figura 31: Estructura de la inecuación, observe que se usa la función valor absoluto (abs).

Pulsar la tecla Enter o Intro. El software presenta la inecuación.

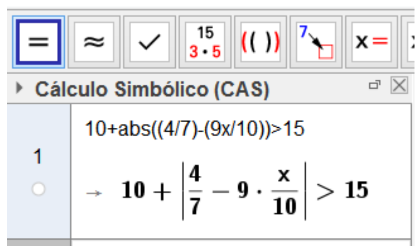


Figura 32: Geogebra reescribe la inecuación y la presenta de la manera normal.

Hacer clic en el botón Resuelve

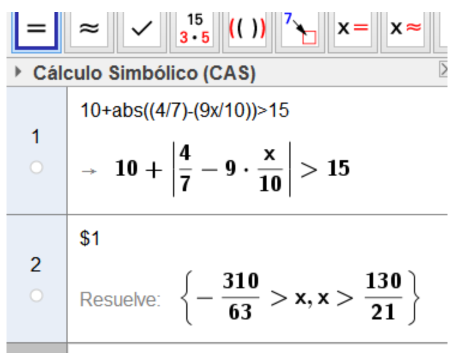


Figura 33: Conjunto solución de la inecuación 10+|4/7-9x/11|>15.

Geogebra presenta un conjunto conformado por dos intervalos.

$$CS = \left\{ \boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \wedge \boldsymbol{x} < -\frac{\mathbf{310}}{\mathbf{63}} \vee \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{130}}{\mathbf{21}} \right\}$$

Ejercicios

1. Resuelva cada inecuación y exprese el resultado en notación de conjunto y de forma gráfica.
   a. $|3x + 4x + 6| > 4$
   b. $12 - |x + 7| \geq 11$
   c. $|1 - 3x| \leq 6$
   d. $\frac{|8x-3|}{5} > 2$
   e. $\frac{6}{11} + |7 + x| \geq 9$
   f. $\left|\frac{4x+1}{9} - \frac{2}{5}\right| \leq 14$
   g. $\left(\frac{3}{4}\right)\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{7} + 5$
   h. $|6 - 7x| - 10 > 1$
   i. $\left|5x + \frac{4}{11}\right| > \frac{14-3}{7}$
   j. $\frac{3}{8} + 5\left|\frac{10}{3} + x\right| > 8$
2. Utiliza Geogebra para resolver las inecuaciones siguientes y expresa el conjunto solución en notación de conjunto y notación de intervalo
   a. $|15x + 3| < 21$
   b. $\frac{12+|3-7x|}{11} \leq \frac{16}{5}$
   c. $|x + 5| + |x + 5| + 2|x + 5| < 4$
   d. $17|2 - 19x| \leq 125$
   e. $3\left|\frac{5x-3}{2}\right| > \sqrt{2}$
   f. $\left|\frac{3-x}{4}\right| \leq \frac{1}{3}$
   g. $\frac{3}{4} + \left|\frac{3-\frac{x}{9}}{4+\frac{7}{5}}\right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
   h. $\frac{\frac{4}{7}+2}{\frac{5}{8}} - \left|6 - \frac{12x}{5}\right| \geq 2$
   i. $2^3 + 1 + \left|\frac{4x-3}{2}\right| \leq 10$
   j. $\left|\frac{3x-14}{12}\right| \leq \frac{3-\frac{2}{9}}{4}$

Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita

Cuando en la solución de un determinado planteamiento se encuentran involucradas dos o más inecuaciones, se habla de sistema. En tal sentido, un sistema de inecuaciones lineales está conformado por más de una inecuación que juntas conducen a resultado expresado como el conjunto intersección de los resultados individuales de cada inecuación.

Ejemplo

Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 1 < 4 \\ |10x + 7| \geq 5 \end{cases}$$

Respuesta

Se calcula el conjunto solución de cada inecuación por separado y luego se intersectan estos resultados.

$$2x - 1 < 4$$
$$2x - 1 + 1 < 4 + 1$$
$$2x < 5$$
$$(2x)\left(\frac{1}{2}\right) < (5)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x < \frac{5}{2}$$
$$CS = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$$

$$|10x + 7| \geq 5$$
$$10x + 7 \leq -5 \vee 10x + 7 \geq 5$$
$$10x + 7 - 7 \leq -5 - 7 \vee 10x + 7 - 7 \geq 5 - 7$$
$$10x \leq -12 \vee 10x \geq -2$$
$$(10x)\left(\frac{1}{10}\right) \leq (-12)\left(\frac{1}{10}\right) \vee (10x)\left(\frac{1}{10}\right) \geq (-2)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$x \leq -\frac{12}{10} \vee x \geq -\frac{2}{10}$$
$$x \leq -\frac{6}{5} \vee x \geq -\frac{1}{5}$$
$$CS = \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

$$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cap \left\{\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)\right\}$$

En consecuencia, la intersección es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}, \frac{5}{2}\right)$$

La representación gráfica de esta operación se muestra en la Figura 34.

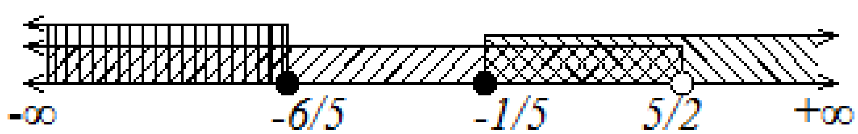


Figura 34: Representación gráfica del sistema de inecuaciones, las zonas donde coinciden los sombreados son solución del sistema.

Ejemplo

Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{3x + 2}{5} < 6 \\ 1 - 4x \geq -3 \\ 6x + 1 < 5x + 7 \end{cases}$$

Respuesta

Se resuelve cada inecuación por separado

$$\frac{3x+2}{5} < 6$$
$$\left(\frac{3x+2}{5}\right)(5) < (6)(5)$$
$$3x+2 < 30$$
$$3x+2-2 < 30-2$$
$$3x < 28$$
$$(3x)\left(\frac{1}{3}\right) < (28)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x < \frac{28}{3}$$
$$CS = \left(-\infty, \frac{28}{3}\right)$$

$$1-4x \geq -3$$
$$1-4x-1 \geq -3-1$$
$$-4x \geq -4$$
$$(-4x)\left(-\frac{1}{4}\right) \leq (-4)\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$x \leq 1$$
$$CS = (-\infty, 1]$$

$$6x+1 < 5x+7$$
$$6x+1-1 < 5x+7-1$$
$$6x < 5x+6$$
$$6x-5x < 5x+6-5x$$
$$x < 6$$
$$CS = (-\infty, 6)$$

El conjunto solución es la intersección de cada respuesta individual.

$$\left(-\infty, \frac{28}{3}\right) \cap (-\infty, 1] \cap (-\infty, 6)$$

En consecuencia el conjunto solución es

$$CS = (-\infty, 1]$$

La representación gráfica es la mostrada en la Figura 35.

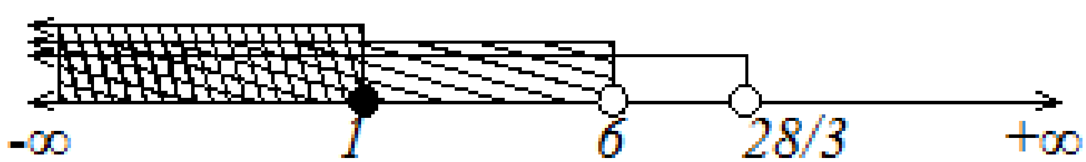


Figura 35: Representación gráfica del sistema de inecuaciones, la zona de coincidencia de los sombreados es la solución del sistema.

Ejemplo

Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \left|\frac{5x}{7} - 2\right| \leq 12 \\ \frac{3x}{4} + 2 < -4 \\ 4 - 7x \geq 10 \end{cases}$$

Respuesta

$$\left|\frac{5x}{7}-2\right|\le 12$$
$$-12\le\frac{5x}{7}-2\le 12$$
$$-12+2\le\frac{5x}{7}-2+2\le 12+2$$
$$-10\le\frac{5x}{7}\le 14$$
$$(-10)(7)\le\left(\frac{5x}{7}\right)(7)\le(14)(7)$$
$$-70\le 5x\le 98$$
$$(-70)\left(\frac{1}{5}\right)\le(5x)\left(\frac{1}{5}\right)\le(98)\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$-14\le x\le\frac{98}{5}$$
$$CS=\left[-14,\frac{98}{5}\right]$$

$$\frac{3x}{4}+2<-4$$
$$\frac{3x}{4}+2-2<-4-2$$
$$\frac{3x}{4}<-6$$
$$\left(\frac{3x}{4}\right)(4)<(-6)(4)$$
$$3x<-24$$
$$(3x)\left(\frac{1}{3}\right)<(-24)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x<-8$$
$$CS=(-\infty,-8)$$

$$4-7x\ge 10$$
$$4-7x-4\ge 10-4$$
$$-7x\ge 6$$
$$(-7x)\left(-\frac{1}{7}\right)\le(6)\left(-\frac{1}{7}\right)$$
$$x\le-\frac{6}{7}$$
$$CS=\left(-\infty,-\frac{6}{7}\right]$$

El conjunto solución del sistema es la intersección de los tres conjuntos solución parciales calculados.

$$CS=\left[-14,\frac{98}{5}\right]\cap(-\infty,-8)\cap\left(-\infty,-\frac{6}{7}\right]$$

$$CS=[-14,-8)$$

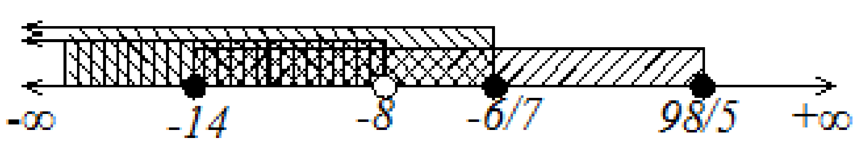


Figura 36: Conjunto solución del sistema de inecuación, en representación gráfica.

Sistemas de inecuaciones lineales con Geogebra

Se aprovecha la versatilidad de este programa en el cálculo del conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales. Es interesante la manera como está diseñada la salida del software, la cual combina la presentación algebraica con la presentación gráfica para ofrecer detalles importantes que pueden ser editados a gusto del usuario.

Ejemplo

Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{3-8x}{4} \geq -5 \\ |5(x+3)| < 7 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{11} \leq -8 \end{cases}$$

Respuesta

Cargar Geogebra y asegurarse de que se encuentra activa la barra de entrada, para ello ir al menú Vista – Barra de entrada.

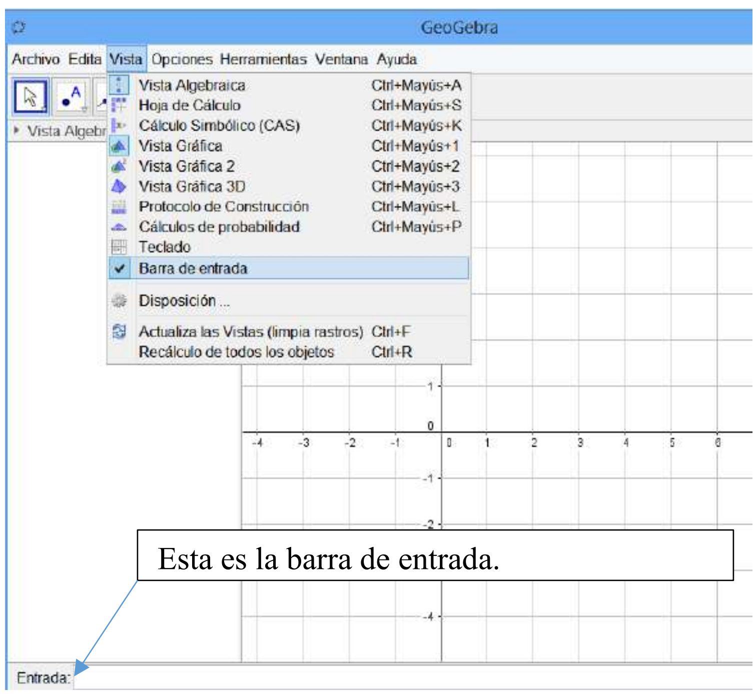


Figura 37: Para verificar que la barra de entrada está activa, se hace clic en el menú Vista y se observa que dicha barra tenga la marca de verificación, en caso contrario se hace clic en esa opción.

En la barra de entrada escribir la primera ecuación así: $((3-8x)/4)$>= -5. Los signos mayor o igual que y menor o igual que se escriben >=; <= respectivamente. Pulsar la tecla Enter. El resultado se observa en la Figura 38, en la cual se observa en la vista algebraica la inecuación identificada con la letra *a* y en la vista gráfica en color azul, el conjunto solución de dicha inecuación.

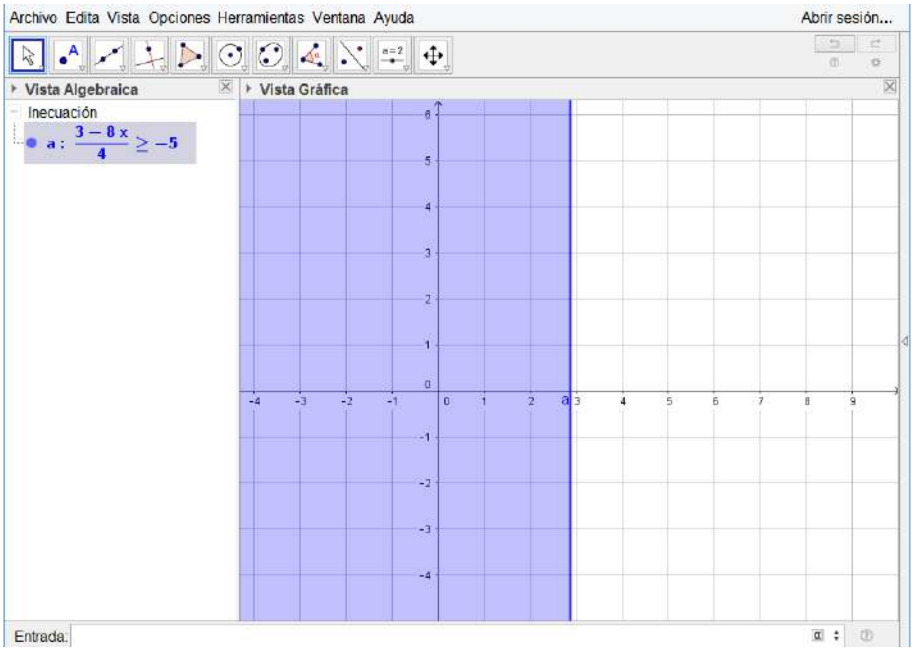


Figura 38: Geogebra asigna a la primera inecuación introducida la letra a, la coloca en la vista algebraica y dibuja el conjunto solución en la vista gráfica.

En la barra de entrada escribir la estructura de la segunda inecuación de esta manera: $|5(x+3)| < 7$. Las barras del valor absoluto se escriben con el teclado virtual, para ello hacer clic en el menú Vista – Teclado, seleccionar la tecla para activar las mayúsculas y la barra vertical. Presionar la tecla Enter y luego cerrar la ventana del teclado.

Es conveniente cambiar el color por defecto de esta inecuación. Hacer clic con el botón derecho del ratón sobre la inecuación b de la vista algebraica. En la ventana emergente, clic en Propiedades.

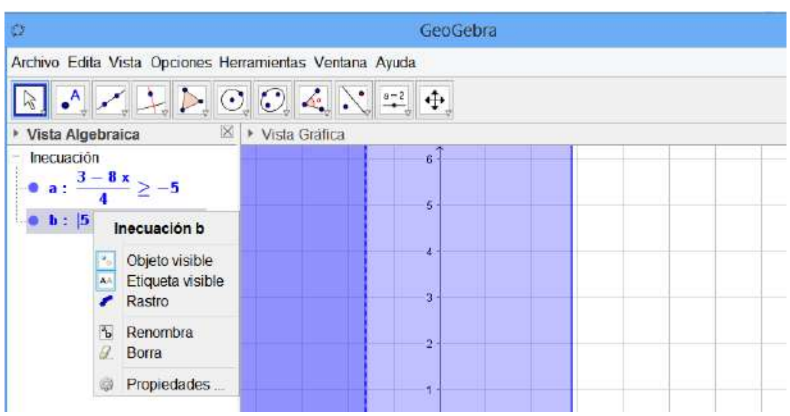


Figura 39: Ventana emergente al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre la inecuación b. La idea es cambiar el color que asigna por defecto Geogebra al intervalo en la vista gráfica.

En la ventana Preferencias, clic en la pestaña Color y seleccionar Marrón. Cerrar la ventana Preferencias. Esto cambia el color de la inecuación y permite distinguir las inecuaciones en la vista gráfica.

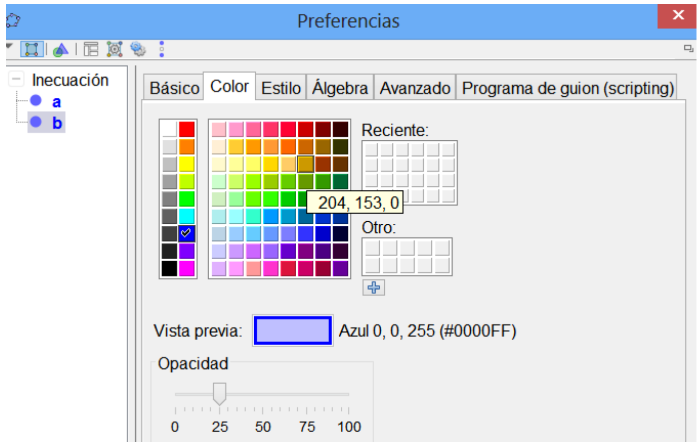


Figura 40: Ventana Preferencias, pestaña Color correspondiente a la inecuación b.

En la barra de entrada escribir la estructura de la tercera inecuación: $(2/3)\,x + (3/11) \leq -8$. Observar que el sistema le asigna a esta inecuación la letra c. Cambiar el color de esta inecuación a verde oscuro.

Alejar el zoom en la vista gráfica para apreciar las tres inecuaciones, tal como se muestra en la Figura 41.

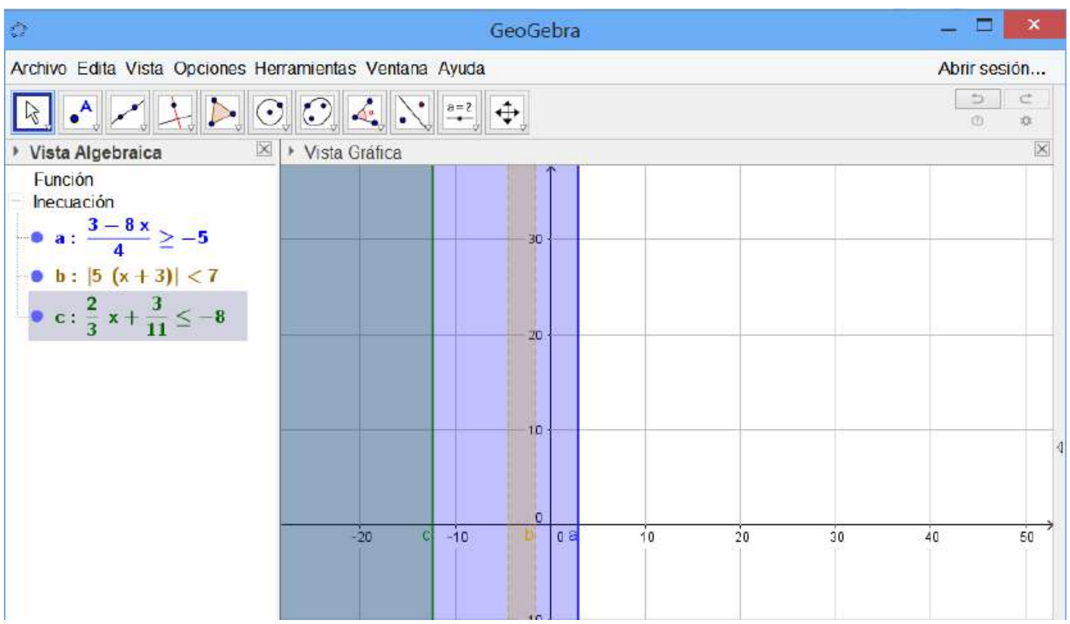


Figura 41: Las tres inecuaciones que conforman el sistema en estudio presentadas en la vista algebraica y las mismas inecuaciones en vista gráfica.

El conjunto solución del sistema de inecuaciones es la intersección de los tres conjuntos solución de las inecuaciones individuales. En la barra de entrada escribir: $a \wedge b \wedge c$. El símbolo de conjunción se puede generar con el teclado virtual. El sistema coloca la estructura completa de las tres inecuaciones bajo el nombre d. En la vista gráfica se puede observar el conjunto solución del sistema.

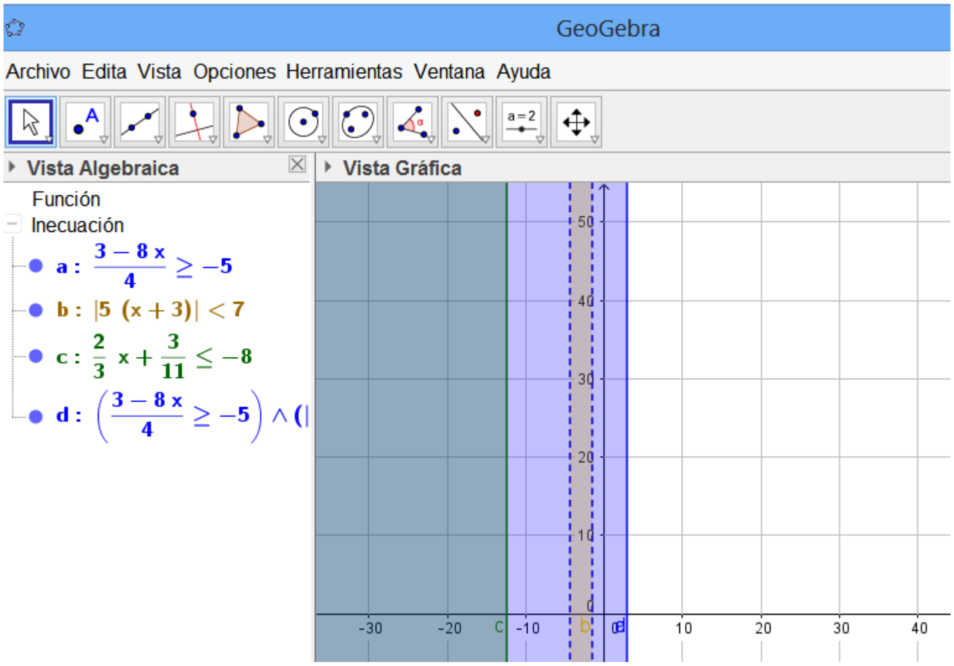


Figura 42: El conjunto solución del sistema de inecuaciones es la conjunción de las tres inecuaciones. la inecuación identificada con la letra d, refleja esa situación.

Como a veces no es fácil leer la solución del sistema de inecuaciones en la vista gráfica, hacer clic en Vista – Cálculo simbólico (CAS). En la fila 1 de la vista CAS escribir d y pulsar Enter, esta acción escribirá en esa vista la proposición combinada de las tres inecuaciones individuales, separadas por la conjunción. En la fila 2 de esa misma vista hacer clic en el botón Resuelve.

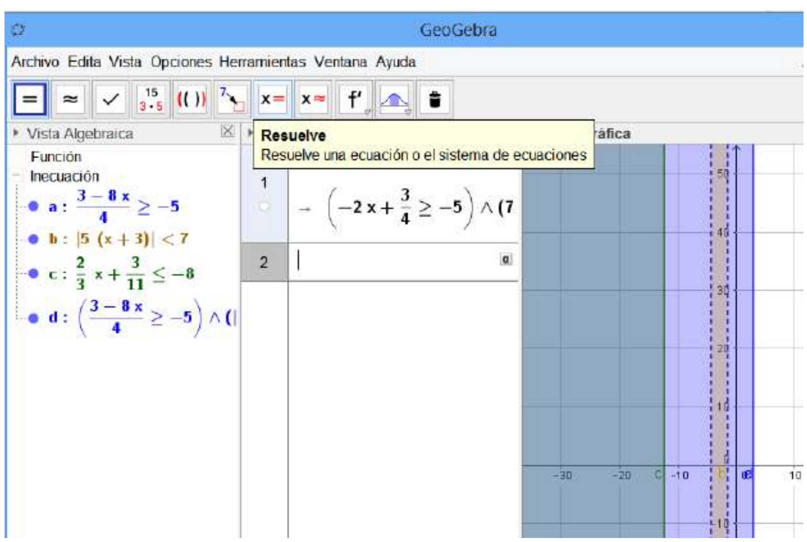


Figura 43: Las tres inecuaciones como proposición compuesta en la vista CAS y la solución del sistema mediante la pulsación del botón Resuelve.

Geogebra presenta una llaves vacías indicando con esto que el conjunto solución del sistema es el conjunto vacío.

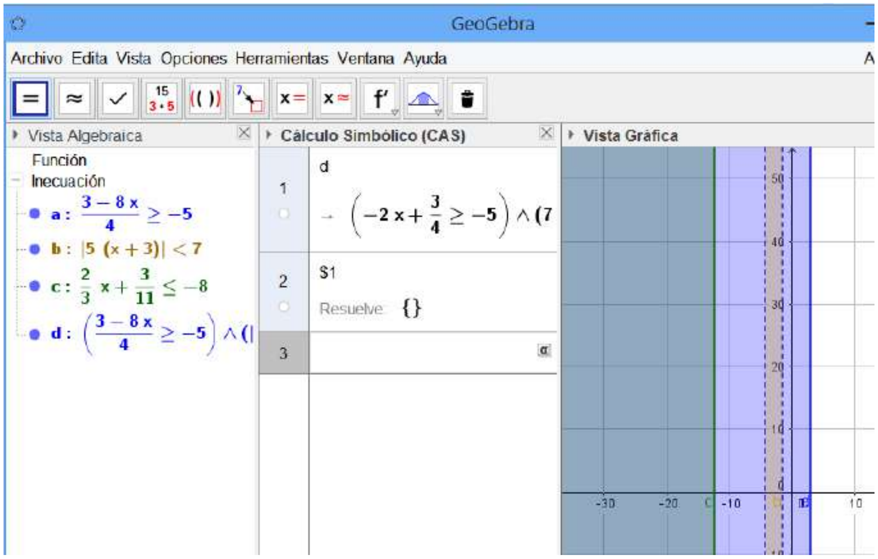


Figura 44: Respuesta emitida por Geogebra: En la fila 2 de la vista CAS se observa el conjunto vacío.

Se puede configurar la vista gráfica para que presente los intervalos solamente sobre el eje x. Para ello hay que hacer clic con el botón derecho del ratón sobre los intervalos representados en la vista gráfica, en la ventana emergente seleccionar la opción Propiedades, que presenta la ventana Preferencias, en dicha ventana hacer clic en la pestaña Estilo y marcar la opción Mostrar sobre eje x, aumente el grosor del trazo a 10. Cierre la ventana preferencias. Repita el último paso en caso de ser necesario.

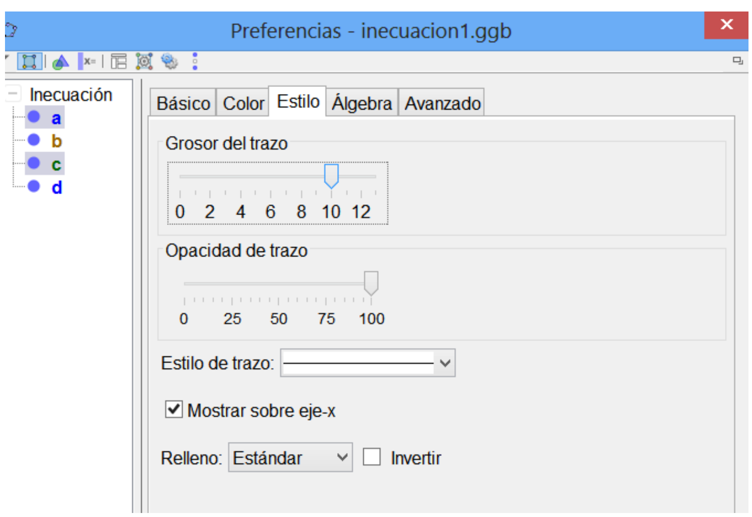


Figura 45: Es posible presentar los intervalos en una dimensión sobre la recta real. Para ello hay que configurar las preferencias.

Geogebra muestra los intervalos y los puntos de separación mediante círculos en blanco o círculos rellenos dependiendo si el extremo es abierto o cerrado.

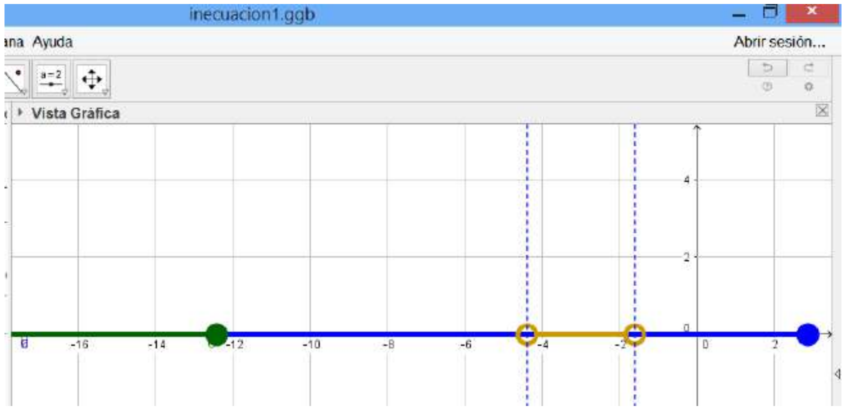


Figura 46: Intervalos correspondientes a las inecuaciones en estudio, representados sobre la recta real.

Ejercicios

1. Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones y haga la representación gráfica del conjunto solución.

a. $\begin{cases} x+10<6 \\ \left|\frac{5x+7}{4}\right| \leq 7 \\ 10-3x<4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \left|11-\frac{2x}{5}\right| \geq 6 \\ \left|\frac{8x+3}{9}\right| > 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 6-8x>2 \\ \frac{x}{5}+\frac{x}{7} \geq 11 \\ \frac{4x}{3}-\frac{2x}{9} \leq 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} |15x-10| > 9 \\ 9-\left|3-\frac{x}{7}\right| \leq 1 \\ \frac{3}{5}x-\frac{2}{7}x<\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{x}{5}\left(3-\frac{4}{9}\right) < \frac{3}{7}x \\ 10x-12 \leq 11 \\ \frac{x+5x+8x}{4} \geq 12 \end{cases}$

2. Los siguientes intervalos son el conjunto solución de un sistema de inecuaciones, exprese el resultado final en la notación de intervalos
    a. $(-\infty,-4) \cap [-15,-2]$
    b. $(-14,4] \cap \{(-10,5) \cup [7,9]\}$
    c. $\{(-\infty,0] \cup [1,5)\} \cap (-\infty,3]$
    d. $[-3,2] \cap \left(-\frac{1}{2},1\right) \cap \left[-\frac{3}{4},3\right)$
    e. $(-\infty,6] \cap [-2,+\infty) \cap [0,10)$

Inecuaciones de primer grado con dos variables

Este tipo de inecuaciones se corresponden con la representación de rectas en el plano. Esto significa que las dos variables están relacionadas con el eje x y el eje y, por lo tanto la expresión algebraica es convertible a una línea recta que actúa como conjunto de puntos de separación o puntos fronteras de un área que está por encima o por debajo de esa recta.
De forma manual se opera la estructura de la inecuación hasta lograr tener una estructura que tenga la forma de la ecuación de la recta, luego se hace la gráfica de la recta mediante el cálculo de al menos dos puntos pertenecientes a ésta y finalmente se selecciona un punto del plano para verificar si satisface o no la desigualdad; en caso afirmativo esa zona del plano es el conjunto solución, en caso negativo se trata del otro lado de la recta el conjunto solución.
La ecuación de la recta es:

$$y = mx + b$$

Donde m es la pendiente de la recta, b es la coordenada y del punto de corte de ese eje.

Ejemplo

Resolver

$$4x + y \geq 7$$

Respuesta

Se convierte la inecuación en una ecuación

$$4x + y = 7$$

Se despeja la variable y

$$4x + y - 4x = 7 - 4x$$
$$y = -4x + 7$$

Se le asigna a x dos valores arbitrarios
$si\ x = 0 \rightarrow y = -4(0) + 7 = 7 \quad punto\ (0,7)$
$si\ x = 3 \rightarrow y = -4(3) + 7 = -12 + 7 = -5 \quad punto\ (3,-5)$

En un sistema de coordenadas cartesianas se ubican los dos puntos y se traza por esos puntos una recta. Dicha recta tiene la ecuación $y = -4x + 7$

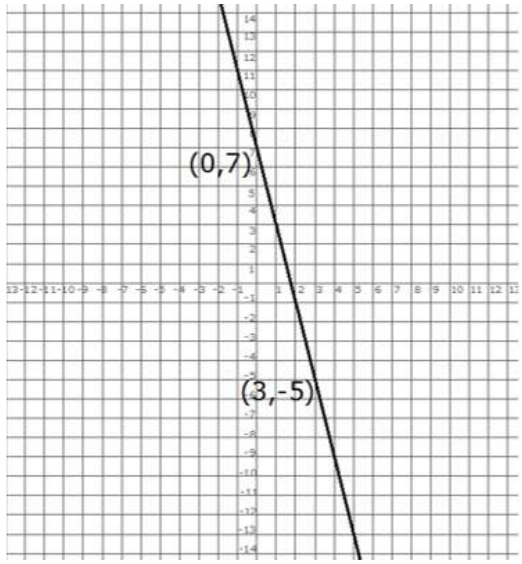


Figura 47: Gráfica de la recta 4x+y=7, la cual actúa como región frontera.

Observe que la recta divide al plano en dos partes, se selecciona un punto que está a la derecha o a la izquierda de la recta, se sustituyen esos valores en la estructura de la inecuación y de acuerdo al resultado se determina si es cierta o es falsa la proposición resultante. El punto $(3,0)$ por ejemplo, está a la derecha de la recta.

$$4(3) + (0) \geq 7$$
$$12 \geq 7$$

La proposición es verdadera, en consecuencia el punto $(3,0)$ está en la zona que es conjunto solución de la inecuación.

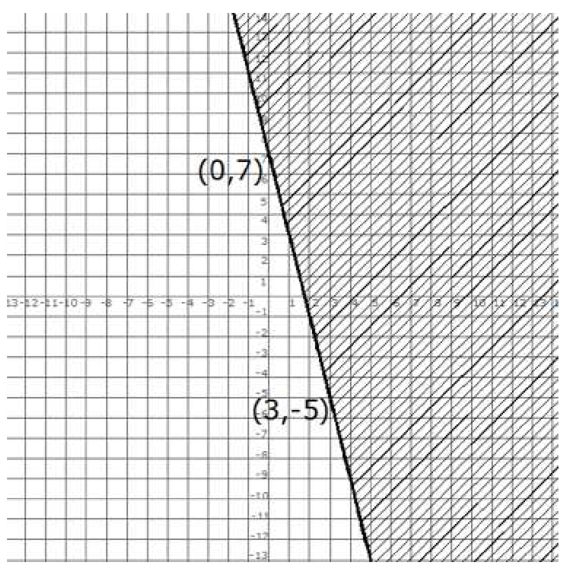


Figura 48: Identificación de la zona solución de la inecuación. En este caso es la derecha de la recta, incluidos los puntos que conforman la recta.

Ejemplo

Resolver

$$\frac{6x - y}{5} < 2$$

Respuesta

Se convierte la inecuación en ecuación

$$\frac{6x - y}{5} = 2$$

Se despeja la variable y

$$6x - y = 10$$
$$y = 6x - 10$$

Se trata de la ecuación de una recta, la cual puede ser graficada mediante la ubicación de dos puntos en el plano. Se da a x valores arbitrarios para obtener valores de y

$$Si\ x = 0 \rightarrow y = 6(0) - 10 = 0 - 10 = -10 \quad punto(0, -10)$$
$$Si\ x = 1 \rightarrow y = 6(1) - 10 = 6 - 10 = -4 \quad punto(1, -4)$$

En un sistema de coordenadas cartesianas se ubica el par de puntos y se traza la recta que corresponde con la ecuación $y = 6x - 10$.

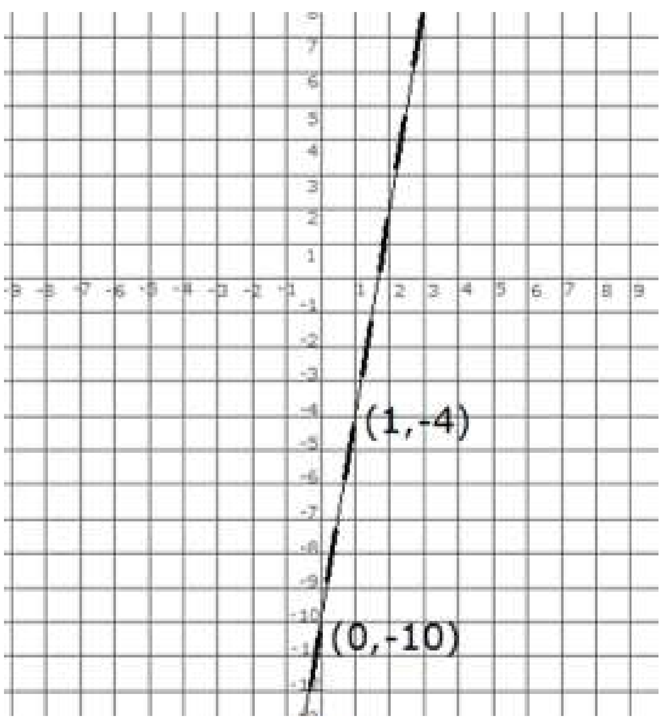


Figura 49: Representación gráfica de la recta (6x-y)/5=2. En este caso los trazos son discontinuos para indicar que los puntos de la recta no forman parte del conjunto solución de la inecuación.

Se observa en el gráfico que la recta divide al plano en dos zonas. Se selecciona un punto cualquiera ubicado en una de estas partes. En esta caso el punto (0,0).

$$\frac{6x - y}{5} < 2$$

$$Si\ x = 0\ \wedge y = 0 \rightarrow \frac{6(0) - (0)}{5} \leq 2$$

$$0 \leq 2$$

Esta proposición es verdadera, en consecuencia el punto (0,0) está en la zona que es solución de la inecuación. Hay que tener presente que en este caso, la recta actúa solamente como frontera entre una zona y la otra, aspecto que se representa gráficamente con una línea punteada.

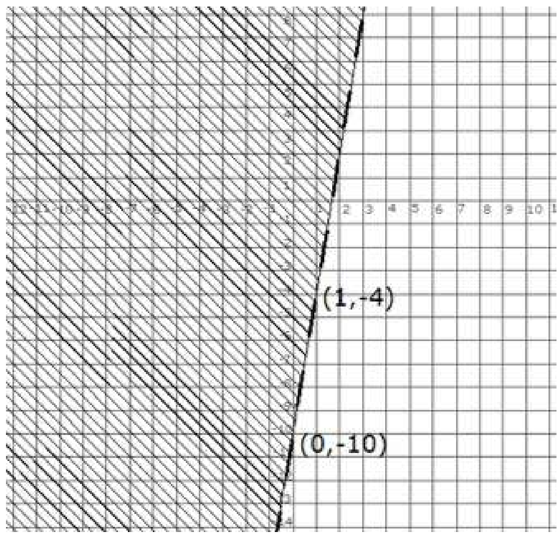


Figura 50: Zona solución de la inecuación (6x-y)/5<2. Parte izquierda o superior de la recta que en este caso está actuando solamente como frontera entre una zona y la otra.

Inecuaciones de primer grado con dos variables, solución con Geogebra.

Con este programa la solución de este tipo de inecuaciones es bastante sencilla, basta ingresar en la barra de entrada la estructura que define a la inecuación y Geogebra presenta en la vista gráfica la parte del plano que es solución a la inecuación.

Ejemplo

Resolver $\frac{6x-y}{7} \leq 2$

Respuesta

En la barra de entrada escribir $(6x - y)/7 \leq 2$. Presionar Enter. Inmediatamente se muestra la inecuación en la vista algebraica y la recta que separa la parte del plano que es solución de la inecuación de aquella que no lo es. Si se hace clic con el botón derecho del ratón sobre la vista gráfica, se puede configurar el formato, entre lo que se encuentra el color y la trama del sombreado.

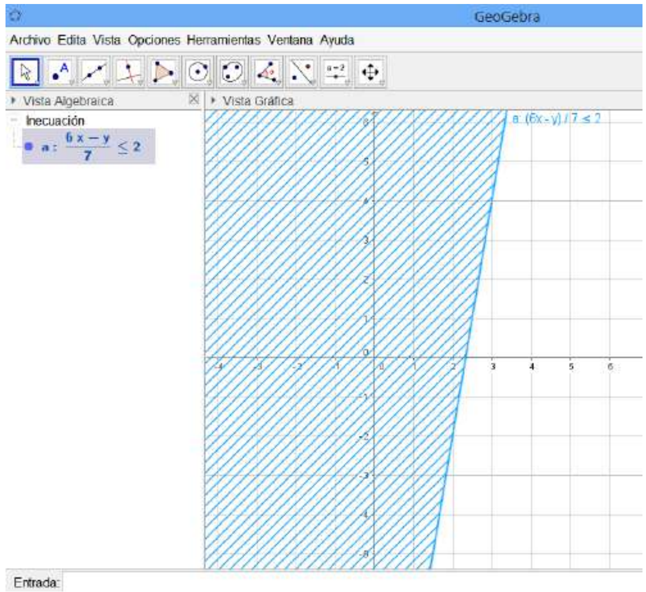


Figura 51: Solución de la inecuación (6x-y)/7≤2.

Ejercicios

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado

a. $1 - x - y < 0$
b. $7x - 2y > -6$
c. $4x \leq y - 8$
d. $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} \geq 0$
e. $10x + 9y \geq 12$
f. $\frac{x+3y}{7} \leq -5$
g. $5 - y > x - 7$
h. $\frac{2}{5}x + \frac{5}{2}y \leq \frac{10}{3}$
i. $11 - x \leq 2y + 3$
j. $5x + 8y - 3 \leq 9$

Sistema de inecuaciones de primer grado con dos variables

Tal como sucede con las inecuaciones de primer grado con una incógnita, el conjunto solución de un sistema de dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas está conformado por la intersección de los conjuntos solución de cada inecuación. En este caso las soluciones son áreas del plano cartesiano, puesto que las respuestas de este tipo de inecuaciones se logran de manera gráfica.

Ejemplo

Resolver

$$\begin{cases} 5x + 3y < 4 \\ \dfrac{2x - 5y}{3} \geq 7 \end{cases}$$

Respuesta

Inecuación $5x + 3y < 4$:
Se transforma en ecuación

$$5x + 3y = 4$$

Se despeja la variable y

$$5x + 3y - 5x = -5x + 4$$
$$3y = -5x + 4$$
$$y = \frac{-5x + 4}{3}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$$

Se determinan dos puntos pertenecientes a esta recta. En este caso buscamos los puntos de corte con los ejes, es decir, cuando $x = 0$ y cuando $y = 0$.

$$Si\ x = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{3}(0) + \frac{4}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}\ \ punto\ \left(0, \frac{4}{3}\right)$$
$$Si\ y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \frac{5}{3}x = \frac{4}{3}\ \rightarrow x = \frac{4}{5}\ \ \ punto \left(\frac{4}{5}, 0\right)$$

Por esos puntos se traza una recta la cual va actuar como conjunto de puntos frontera entre las dos áreas en las cuales va a quedar dividido el plano.

Se determina un punto de prueba ubicado en una de las áreas en que está dividido el plano, por ejemplo, el punto $(0,0)$ está a la izquierda o debajo de la recta.

Se regresa a la inecuación y se sustituyen los valores del punto de prueba, si resulta una proposición verdadera entonces el semiplano donde está el punto de prueba es solución de la inecuación, en caso contrario la respuesta es el otro semiplano.

$$5x + 3y < 4$$
$$5(0) + 3(0) < 4$$
$$0 < 4$$

La proposición es verdadera, por lo tanto el punto $(0,0)$ está en el área que es solución de la inecuación.

Inecuación $\frac{2x-5y}{3} \geq 7$
Se transforma en ecuación

$$\frac{2x - 5y}{3} = 7$$

Se despeja la variable y

$$2x - 5y = 21$$
$$2x - 2x - 5y = -2x + 21$$

$$-5y = -2x + 21$$
$$y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$$

Se calculan dos puntos que pertenecen a la recta. Lo más conveniente es que estos puntos sean aquellos donde la recta corta a cada uno de los ejes.

$$Si\ x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{5}(0) - \frac{21}{5} \rightarrow y = -\frac{21}{5} \quad Punto\ \left(0, -\frac{21}{5}\right)$$
$$Si\ y = 0 \rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{21}{5} \rightarrow x = \frac{21}{2} \quad Punto\ \left(\frac{21}{2}, 0\right)$$

Usemos como punto de prueba el punto $(0{,}0)$ el cual es evidente que está a la izquierda de la recta. Para ello se sustituye en la inecuación los valores correspondientes de x e y.

$$\frac{2x - 5y}{3} \geq 7$$
$$Si\ x = 0\ \wedge y = 0 \rightarrow \frac{2(0) - 5(0)}{3} \geq 7$$
$$0 \geq 7$$

Se trata de una proposición que es falsa, por lo tanto el punto $(0{,}0)$ no pertenece al conjunto solución de la inecuación y la zona del plano que satisface a la inecuación es la situada a la derecha de la recta $y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$.

Si se igualan las ecuaciones de las rectas que actúan como fronteras de los conjuntos solución de las inecuaciones, se obtiene el punto donde éstas se cortan.

La ecuación de la primera recta es $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

La ecuación de la segunda recta es $y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$

Por lo tanto

$$-\frac{5}{3}x + \frac{4}{3} = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$$
$$\frac{4}{3} + \frac{21}{5} = \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{3}\right)x$$
$$83 = 31x$$
$$x = \frac{83}{31}$$

Se obtiene la coordenada y sustituyendo a x en cualquiera de las dos ecuaciones de la recta, por el valor que se acaba de calcular.

$$y = \frac{2}{5}\left(\frac{83}{31}\right) - \frac{21}{5} = \frac{166}{155} - \frac{21}{5} = \frac{166 - 651}{155} = -\frac{485}{155} =$$

Las rectas se cortan en el punto $\left(\frac{83}{31}, -\frac{97}{31}\right)$

Con los conjuntos solución ya determinados, se hace la representación gráfica en un solo sistema de coordenadas cartesianas y aquellas zonas que se superponen son las que satisfacen la condición de ambas inecuaciones y en consecuencia son la solución del sistema. Observe que la recta $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ está representada mediante líneas a trazos para señalar que sus puntos no pertenecen al conjunto solución de la inecuación.

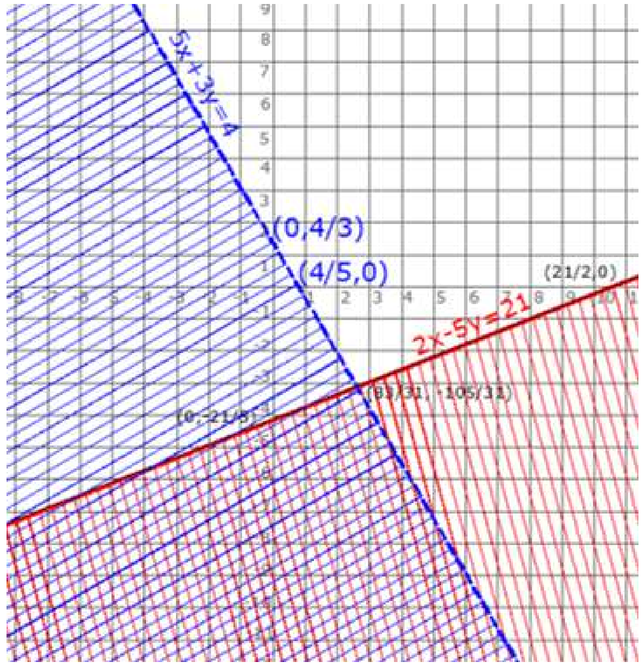


Figura 52: Solución del sistema de inecuaciones lineales, la respuesta se encueentra en la zona de coincidencia de los sombreados, la recta 5x+3y=4 no forma parte de la solución.

La solución del sistema de inecuaciones es el área del plano delimitada por la recta $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ en el intervalo $\left(-\infty, \frac{83}{31}\right]$ y por la recta $y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$ en el intervalo $\left(\frac{83}{31}, +\infty\right)$.

Ejemplo

Resuelva

$$\begin{cases} 3x + 4y > 12 \\ \dfrac{5}{2}x + \dfrac{4}{3}y \leq -2 \\ |4x + 5y| \geq 3 \end{cases}$$

Respuesta

Inecuación

$$3x + 4y > 12$$

Se convierte la inecuación en una ecuación

$$3x + 4y = 12$$
$$4y = -3x + 12$$
$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Se requieren dos puntos para hacer la gráfica, por lo tanto se calculan los puntos de corte de la recta con los ejes

$$Si\ x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{4}(0) + 3 \rightarrow y = 3 \quad punto(0,3)$$

$$Si\ y = 0 \to \frac{3}{4}x = 3 \to x = \frac{12}{3} = 4 \quad punto\ (4{,}0)$$

Se utiliza en punto $(0{,}0)$ como punto de prueba en la inecuación. Dicho punto está por debajo o hacia la izquierda de la recta $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

$$Si\ x = 0 \wedge y = 0 \to 3(0) + 4(0) > 12 \to 0 > 12$$

Resulta una proposición falsa, por lo tanto la respuesta está en el área por encima o a la derecha de la recta $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

Inecuación

$$\frac{5}{2}x + \frac{4}{3}y \leq -2$$

Se convierte esta inecuación en ecuación

$$\frac{5}{2}x + \frac{4}{3}y = -2$$
$$\frac{4}{3}y = -\frac{5}{2}x - 2$$
$$y = -\frac{15}{8}x - \frac{3}{2}$$

Puntos de corte con los ejes.

$$Si\ x = 0 \to y = -\frac{15}{8}(0) - \frac{3}{2} \to y = -\frac{3}{2} \quad punto\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$
$$Si\ y = 0 \to \frac{15}{8}x = -\frac{3}{2} \to x = -\frac{24}{30} = -\frac{4}{5} \quad punto\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$$

Al trazar la recta por los dos puntos calculados, el plano queda dividido en dos partes: a la izquierda o debajo de la recta y a la derecha o arriba de la recta. Se requiere un punto de prueba para verificar cuál es el conjunto solución de la inecuación. En este caso el punto $(0{,}0)$ está por encima o a la derecha de la recta.

$$Si\ x = 0 \wedge y = 0 \to \frac{5}{2}(0) + \frac{4}{3}(0) \leq -2 \to 0 \leq -2$$

Resulta una proposición falsa, por lo tanto la respuesta de la inecuación está a la izquierda o por debajo de la recta.

Inecuación

$$|4x + 5y| \geq 3$$

Se transforma la inecuación en ecuación

$$|4x + 5y| = 3$$

Existen dos posibilidades

$$4x + 5y = -3 \ \vee 4x + 5y = 3$$
$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5} \vee y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$$

Se trata de rectas que son paralelas ya que tienen la misma pendiente, cortan al eje y en $-\frac{3}{5}$ y en $\frac{3}{5}$. Se escoge como punto de prueba al punto $(0{,}0)$ el cual se encuentra en el medio de la zona ocupada por las dos rectas.

En la inecuación

$$|4x + 5y| \geq 3$$

$$Si\ x = 0 \wedge y = 0 \rightarrow |4(0) + 5(0)| \geq 3 \rightarrow |0| \geq 3 \rightarrow 0 \geq 3$$

Proposición que es falsa, por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es la zona por encima de la recta $y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$ y por debajo de la recta $y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$.

Una vez calculadas las respuestas de cada inecuación por separado, se grafica cada caso en un solo sistema de coordenadas y donde exista intersección triple es la respuesta del sistema de inecuaciones. En este caso la gráfica se ha elaborado con Geogebra.

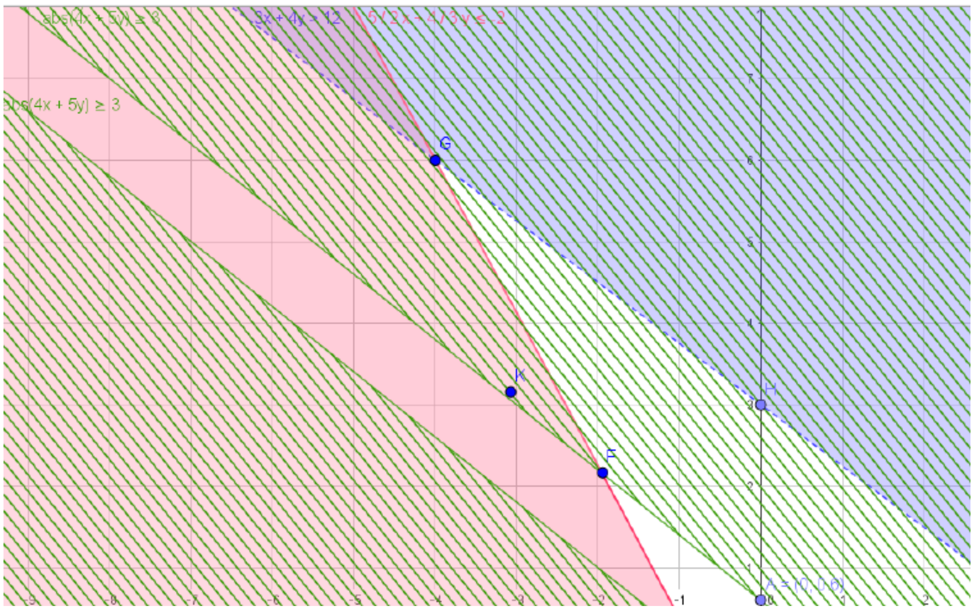


Figura 53: Representación gráfica del sistema de inecuaciones lineales, elaborada con Geogebra, la solución del sistema es el área de coincidencia triple, la cual comienza en el punto G.

Estos problemas pueden resolverse con Geogebra, para ello utilice la barra de entrada y el teclado virtual de dicho software, en la vista algebraica verá las inecuaciones y en la vista gráfica la zona que corresponde al conjunto solución.

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones lineales

a. $\begin{cases} 4x - 2y < 5 \\ 2 - 3x + y \geq 0 \\ x - 3y < 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 12x + 5y < -2 \\ 5x - y > 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - y > -1 \\ x - 5y \geq 4 \\ x - y < 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 12 - x > y + 3 \\ 4x < -5y + 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 10x - 3y < 12 \\ 3x - 6y \leq -9 \\ x + 8y > 7 \end{cases}$

Inecuaciones de segundo grado en una variable

Este tipo de inecuaciones son estructuras algebraicas que se pueden expresar bajo alguna de las siguientes formas: $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$. El grado del polinomio es 2 y la variable nunca forma parte del denominador.

Para resolver una inecuación de segundo grado hay que seguir los pasos siguientes:

1. Hacer cero uno de los miembros de la inecuación
2. Calcular las raíces del polinomio de segundo grado
3. Establecer los intervalos en función de las raíces calculadas
4. Estudiar los signos de cada intervalo, tomando en cuenta puntos de prueba que pertenecen a dicho intervalo.
5. Tomando en cuenta si la inecuación es mayor que cero o menor que cero, los intervalos positivos o negativos serán la solución de ésta.

Ejemplo

Resolver la inecuación

$$x^2 - 5x \geq 14$$

Respuesta

Se trata de una estructura polinómica de segundo grado. Seguimos los pasos señalados para calcular el conjunto solución de esta inecuación.

1. Se hace cero el miembro derecho de la inecuación, para ello se suma en ambos lados -14 que es el inverso aditivo de 14.

$$x^2 - 5x - 14 \geq 14 - 14$$
$$x^2 - 5x - 14 \geq 0$$

2. Se resuelve el polinomio de segundo grado, tomando en cuenta que existen varios métodos a través de los cuales se puede calcular las raíces. En este caso se usa la factorización de la forma $x^2 + bx + c$ explicada en el capítulo 4 de este libro.

   Se buscan dos números cuyo producto sea -14 y cuya suma sea -5.

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$$
$$(x - 7)(x + 2) = 0$$

   Las raíces del polinomio son

$$x = 7$$
$$x = -2$$

3. Al ubicar sobre la recta real a los valores de x calculados se conforman tres intervalos

$$(-\infty, -2)$$
$$[2, 7]$$
$$(7, +\infty)$$

Ante la duda sobre cuál es extremo cerrado y cuál es el extremo abierto, se construyen los intervalos de acuerdo a nuestro criterio, luego en los pasos siguientes se definen esos extremos.

4. Para analizar el signo de cada intervalo, se asigna de manera arbitraria un valor de *x* que pertenece a dicho intervalo.

   Intervalo $(-\infty, -2)$, se asigna -3 como valor de prueba.
   $$si\ x = -3 \rightarrow x^2 - 5x - 14 = (-3)^2 - 5(-3) - 14 = 9 + 15 - 14 = 10$$
   El intervalo es positivo

   Intervalo $[-2, 7]$, se asigna 0 como valor de prueba.
   $$si\ x = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 14 = (0)^2 - 5(0) - 14 = 0 - 0 - 14 = -14$$
   El intervalo es negativo

   Intervalo $(7, +\infty)$, se asigna 8 como valor de prueba.
   $$si\ x = 8 \rightarrow x^2 - 5x - 14 = (8)^2 - 5(8) - 14 = 64 - 40 - 14 = 10$$
   El intervalo es positivo

5. La inecuación es mayor o igual que cero, por lo tanto los intervalos positivos serán solución de $x^2 - 5x - 14 \geq 0$ y los extremos no infinitos son cerrados.

$$CS = (-\infty, -2] \cup [7, +\infty)$$

Ejemplo

Resolver la inecuación

$$\frac{4x^2 - 2x}{3} < 1$$

Respuesta

1. Se hace cero el miembro derecho de la inecuación.
$$4x^2 - 2x < 3$$
$$4x^2 - 2x - 3 < 0$$
2. Se aplica la fórmula cuadrática: $a = 4; b = -2; c = -3$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$$
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$$
3. Al ubicar estas raíces sobre la recta real, se conforman tres intervalos:
$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{4}\right)$$

$$\left[\frac{1-\sqrt{13}}{4},\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right]$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4},+\infty\right)$$

4. Se analiza el signo de cada intervalo, para lo cual se asignan valores de prueba de la variable x que pertenecen a cada intervalo en estudio.

   Intervalo $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)$, valor de prueba $x=-2$:

   $$Si\ x=-2\rightarrow 4x^2-2x-3=4(-2)^2-2(-2)-3=16+4-3=17$$

   El intervalo es positivo

   Intervalo $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{4},\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right]$, valor de prueba $x=0$:

   $$Si\ x=0\rightarrow 4x^2-2x-3=4(0)^2-2(0)-3=-3$$

   El intervalo es negativo

   Intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4},+\infty\right)$, valor de prueba $x=2$:

   $$Si\ x=2\rightarrow 4x^2-2x-3=4(2)^2-2(2)-3=16-4-3=9$$

   El intervalo es positivo

5. La inecuación es menor que cero, por lo tanto todos los intervalos negativos son conjunto solución. Los extremos numéricos son abiertos.

$$CS=\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4},\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)$$

Ejercicios

Resuelva los ejercicios de forma manual y compare los resultados con Geogebra

a. $x^2-5x-6<0$
b. $x^2\geq 25$
c. $\frac{x^2}{2}-x>\frac{3}{2}$
d. $3x^2+5x\geq 10$
e. $x^2+18x+36\leq 0$
f. $x^2-49<0$
g. $\frac{x^2+2x}{4}\geq 2$
h. $\frac{7x-x^2}{3}\leq -4$
i. $2x-\frac{3x^2}{5}<1$
j. $\frac{21x}{4}+\frac{13}{7}x^2\geq 90$

Inecuaciones racionales

Se trata de inecuaciones donde la variable forma parte del denominador. Se debe tener en consideración el hecho de que dicha variable en algún momento toma el valor cero y por lo tanto debe excluirse del conjunto solución para evitar indeterminaciones. En lo demás, la manera de resolver este tipo de inecuaciones se parece al procedimiento aplicado para resolver inecuaciones de segundo grado.

Ejemplo

Resolver

$$\frac{4x+1}{x+2} \geq 2$$

1. Se hace cero el miembro derecho de la inecuación

$$\frac{4x+1}{x+2} - 2 \geq 0$$
$$\frac{4x+1-2(x+2)}{x+2} \geq 0$$
$$\frac{4x+1-2x-4}{x+2} \geq 0$$
$$\frac{2x-3}{x+2} \geq 0$$

2. Se hace cero el numerador y el denominador

$$2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

3. Al ubicar sobre la recta real los valores de x calculados se debe tener en cuenta que el valor $x=-2$ es un extremo abierto para cualquier intervalo, puesto que de lo contrario causaría una división entre cero.

   Los intervalos que surgen son

$$(-\infty,-2)$$
$$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$$
$$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$$

   El análisis posterior permitirá confirmar o rechazar si en efecto, los intervalos son abiertos o cerrados para los valores calculados de x, sobre todo en el numerador, ya que en el denominador ya se ha dicho que deben ser abiertos en los valores que lo anulan.

4. Se analiza el signo de cada intervalo, considerando valores de prueba de x.

   Intervalo $(-\infty,-2)$, valor de prueba $x=-3$.

$$Si\ x=-3 \rightarrow \frac{2x-3}{x+2}=\frac{2(-3)-3}{(-3)+2}=\frac{-9}{-1}=9$$

   El intervalo es positivo

Intervalo $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$, valor de prueba $x = 0$

$$Si\ x = 0 \rightarrow \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2(0)-3}{(0)+2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

El intervalo es negativo

Intervalo $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, valor de prueba $x = 2$.

$$Si\ x = 2 \rightarrow \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2(2)-3}{(2)+2} = \frac{1}{4}$$

El intervalo es positivo

5. La inecuación es mayor o igual que cero, por lo tanto los intervalos positivos forman parte del conjunto solución, los extremos numéricos derivados de numerador son cerrados

$$CS = (-\infty,-2) \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right)$$

Ejemplo

Resolver

$$3 - \frac{7}{x} < \frac{x+5}{2x-1}$$

Respuesta

1. Se hace cero el miembro derecho de la inecuación.

$$3 - \frac{7}{x} - \left(\frac{x+5}{2x-1}\right) < \frac{x+5}{2x-1} - \left(\frac{x+5}{2x-1}\right)$$
$$3 - \frac{7}{x} - \left(\frac{x+5}{2x-1}\right) < 0$$
$$\frac{3x-7}{x} - \left(\frac{x+5}{2x-1}\right) < 0$$

2. Se calculan las raíces de los polinomios en el numerador y en el denominador

$$\frac{(2x-1)(3x-7) - x(x+5)}{x(2x-1)} < 0$$
$$\frac{6x^2 - 14x - 3x + 7 - x^2 - 5x}{x(2x-1)} < 0$$
$$\frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} < 0$$

$$a = 5; b = -22; c = 7$$
$$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4(5)(7)}}{2(5)} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 140}}{10}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{344}}{10} = \frac{11 \pm \sqrt{86}}{5}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{86}}{5} \qquad x_2 = \frac{11 - \sqrt{86}}{5}$$

Se debe tener presente que los denominadores no deben tomar el valor cero, por lo tanto $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$ son valores de x que se constituyen en extremos abiertos de intervalos

Se tienen cuatro valores de x críticos que conforman extremos de intervalos: $0, -\frac{1}{2}, \frac{11-\sqrt{86}}{5},\ \frac{11+\sqrt{86}}{5}$.

3. Los intervalos a analizar son

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$
$$\left(0, \frac{11 - \sqrt{86}}{5}\right)$$
$$\left(\frac{11 - \sqrt{86}}{5}, \frac{11 + \sqrt{86}}{5}\right)$$
$$\left(\frac{11 + \sqrt{86}}{5}, +\infty\right)$$

4. Se analiza el signo de cada intervalo

Intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, valor de prueba $x = -1$.

$$Si\ x = -1 \rightarrow \frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} = \frac{5(-1)^2 - 22(-1) + 7}{(-1)(2(-1)+1)} = \frac{34}{1} = 34$$

El intervalo es positivo

Intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, valor de prueba $x = -\frac{1}{4}$.

$$Si\ x = -\frac{1}{4} \rightarrow \frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} = \frac{5\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 22\left(-\frac{1}{4}\right) + 7}{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right)} = -\frac{205}{2}$$

El intervalo es negativo

Intervalo $\left(0, \frac{11-\sqrt{86}}{5}\right)$, valor de prueba $x = \frac{1}{4}$

$$Si\ x = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} = \frac{5\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 22\left(\frac{1}{4}\right) + 7}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(2\left(\frac{1}{4}\right) + 1\right)} = \frac{29}{6}$$

El intervalo es positivo

Intervalo, $\left(\frac{11-\sqrt{86}}{5}, \frac{11+\sqrt{86}}{5}\right)$, valor de prueba $x = 1$

$$Si\ x = 1 \to \frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} = \frac{5(1)^2 - 22(1) + 7}{(1)(2(1)+1)} = -\frac{10}{3}$$

El intervalo es negativo

Intervalo $\left(\frac{11+\sqrt{86}}{5}, +\infty\right)$, valor de prueba $x = 10$

$$Si\ x = 10 \to \frac{5x^2 - 22x + 7}{x(2x+1)} = \frac{5(10)^2 - 22(10) + 7}{(10)(2(10)+1)} = \frac{41}{30}$$

El intervalo es positivo

5. La inecuación es menor que cero, por lo tanto los intervalos negativos forman parte del conjunto solución, los extremos numéricos son abiertos.

$$CS = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{11-\sqrt{86}}{5}, \frac{11+\sqrt{86}}{5}\right)$$

Ejercicios

Resuelva las inecuaciones siguientes

a. $\frac{1}{x} + 3 < 4$
b. $\frac{4x+5}{3} + \frac{5}{x+1} \leq 10$
c. $\frac{x-5}{x+2} \geq x + 3$
d. $\frac{4}{x} - \frac{10}{x} \geq \frac{3}{5}$
e. $\frac{x-6}{2} - \frac{12}{x-3} > -4$
f. $\frac{2}{3-x} - \frac{4}{5-2x} \leq -10$
g. $10x - \frac{x+2}{x-5} \geq x - 6$
h. $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}x \geq \frac{10x-5}{8x+3}$
i. $11x - \frac{2}{x} + \frac{x+5}{3x} \leq 4$
j. $\frac{7x+4}{6x-3} + \frac{2x+1}{4x+5} < \frac{2}{5}$

Aplicaciones de las inecuaciones a la vida real

A lo largo de este capítulo se ha mencionado que las inecuaciones tienen amplio uso en nuestro quehacer diario, por ejemplo cuando se dice que los costos de producción de una empresa son superiores a cierta cantidad, cuando se indica el nivel del río en época lluviosa alcanza una cota x, cuando las estadísticas mencionan que el número de nacimientos en el hospital central durante el mes de mayo alcanzarán y cantidad de niños. Se trata de aseveraciones que involucran un margen de error y por lo tanto expresables matemáticamente bajo la forma intervalos.

En esta sección se resuelven planteamientos que involucran inecuaciones, con la diferencia que en esta ocasión la variable es un elemento conocido de nuestro entorno, tal como los mencionados. Algunas veces de parte de una regla que define a la inecuación ya establecida, otras veces hay que desarrollarla partiendo de la revisión del planteamiento de la situación problemática, en todo caso lo que se persigue es revisar una pequeña parte de ese inmenso abanico de posibilidades que brinda el presente tema.

Ejemplo

Una empresa tiene costos fijos de Bs. 5 000 000 mensual y le cuesta producir Bs. 55 cada artículo cuyo precio de venta es Bs 70 ¿cuántas unidades debe producir y vender al mes para que la empresa tenga utilidades?

Respuesta

La utilidad de una empresa es función de los ingresos y del costo total

$$U = I - C$$

Donde $U = utilidad; I = ingresos; C = costo\ total.$

Los ingresos son una función de las unidades producidas y vendidas

$$I = px$$

Donde $p = precio\ de\ venta; x = unidades\ producidas\ y\ vendidas.$ Para el caso particular

$$I = 70x$$

El costo total es

$$C = CF + CV$$

Donde $CF = costos\ fijos; CV = costos\ variables.$ Para el caso particular

$$C = 5\,000\,000 + 55x$$

La situación planteada en el problema se modela así:

$$70x - (5\,000\,000 + 55x) > 0$$

De donde

$$(70 - 55)x > 5\,000\,000$$

$$15x > 5\,000\,000$$

$$x > 333{,}33\ unidades$$

Se deben producir al menos 334 unidades para que la empresa tenga utilidades

Ejemplo

Una empresa puede vender todo lo que produce a Bs. 2 530 cada artículo, el costo de producir cada artículo es Bs. 1700 y tiene costos fijos de Bs. 10 000 000 al mes. Encuentre el número de unidades que deberá producir y vender en un mes para obtener una utilidad de al menos Bs. 7 000 000.

Respuesta.

$$U = I - C$$
$$U = 2\,530x - 1\,700x - 10\,000\,000$$
$$U \geq 7\,000\,000$$
$$830x - 10\,000\,000 \geq 7\,000\,000$$
$$830x \geq 17\,000\,000$$
$$x \geq 20482$$

La empresa debe producir al menos 20482 unidades para obtener la utilidad esperada.

Ejemplo

Una caja abierta se fabrica de un cartón que mide 1,20 metros por 0,80 metros, cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Se desea que el área de la base la caja sea al menos de 0,12 metros cuadrados, ¿cuál es la máxima altura posible de la caja?

Respuesta

Se cortan cuadrados de lado h en las cuatro esquinas del cartón, entonces, el área de la base de la caja es

$$A = (l - 2h)(a - 2h)$$

Donde $A = area; a = ancho; h = alto$

$$A = (1{,}20 - 2h)(0{,}80 - 2h)$$
$$A = 0{,}96 - 2{,}40h - 1{,}60h + 4h^2$$
$$A = 4h^2 - 4h + 0{,}96$$

Como inecuación y de acuerdo con el planteamiento

$$4h^2 - 4h + 0{,}96 \geq 0{,}12$$
$$4h^2 - 4h + 0{,}84 \geq 0$$

Se resuelve el miembro izquierdo de la inecuación, considerándolo como una ecuación.

$$4h^2 - 4h + 0{,}84 = 0$$
$$a = 4; b = -4; c = 0{,}84$$
$$h = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(0{,}84)}}{2(4)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 13{,}44}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{2{,}56}}{8} = \frac{4 \pm 1{,}6}{8}$$

$$h_1 = \frac{4 - 1{,}6}{8} = 0{,}30$$

$$h_2 = \frac{4 + 1{,}6}{8} = 0{,}70$$

Intervalo $(0; 0{,}30)$ Si el valor de h es cero es porque no se recorta ningún cuadrado en las esquinas. h no puede ser negativo.

Valor de prueba:
$h = 0{,}1 \Rightarrow 4(0{,}1)^2 - 4(0{,}1) + 0{,}84 = 0{,}48$ (positivo)

Intervalo $(0{,}30; 0{,}70)$
Valor de prueba:
$h = 0{,}50 \Rightarrow 4(0{,}5)^2 - 4(0{,}5) + 0{,}84 = -0{,}16$ (negativo)

Intervalo $(0{,}70, +\infty)$
Valor de prueba:
$h = 1 \Rightarrow 4(1)^2 - 4(1) + 0{,}84 = 0{,}84$ (positivo)

Los intervalos solución de la inecuación son los positivos, hay que considerar que el intervalo $(0{,}70, +\infty)$ a pesar de ser solución de la inecuación no se adapta a la realidad, puesto que recortar dos cuadrados de 0,70 metros de lados sumarían 1,40 metros y solo se cuenta con 1,20 metros por el lado más largo. Por lo tanto la máxima altura posible de la caja es 0,30 metros.

Ejemplo

En un corral había cierto número de reses, se duplicó el número y se vendió 4 quedando menos de 15. Después se triplicó el número de reses que había al principio y se vendieron 9 quedando más de 17 ¿Cuántas reses había al principio?

Respuesta

Sea x el número de reses al principio.
Situación luego de la primera venta: $2x - 4 < 15$
Resolviendo esta inecuación:

$$2x < 19$$
$$x < 9{,}5$$

Situación luego de la segunda venta: $3x - 9 > 17$
Resolviendo esta inecuación:

$$3x > 26$$
$$x > 8{,}7$$

El conjunto solución del sistema es:

$$8{,}7 < x < 9{,}5$$

Como el número de reses es un número entero, al principio había 9 reses.

Ejemplo

En un terreno rectangular, su largo mide 18 metros más que el ancho. Si el perímetro del terreno tiene como máximo 360 metros, ¿qué medida debe tener el ancho?

Respuesta

El perímetro de una figura geométrica plana es la suma de las longitudes de sus lados. En el caso de un rectángulo, el perímetro es

$$P = 2l + 2a$$

Donde $P = perímetro; l = largo; a = ancho.$

En el caso particular

$$P = 2(a + 18) + 2a$$

Planteado como inecuación

$$4a + 36 \leq 360$$
$$4a \leq 324$$
$$a \leq \frac{324}{4}$$
$$a \leq 81$$

El ancho del terreno debe tener como máximo 81 metros.

Resumen

- Un desigualdad es una relación de orden que se produce cuando los valores son distintos.
- Los dos tipos de desigualdades de mucha importancia en las matemáticas son las desigualdades estrictas, identificadas por los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$) y las desigualdades no estrictas o amplias identificadas por los símbolos mayor o igual que ($\geq$) y menor o igual que ($\leq$).
- Si se multiplica o divide ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, ésta cambia de sentido.
- Un intervalo es un subconjunto de los números reales, conformado por los infinitos números que existen entre dos números reales que actúan como extremo inferior y extremo superior.
- Los intervalos abiertos son aquellos en los cuales los extremos no forman parte del conjunto.
- Los intervalos cerrados son aquellos donde los extremos están incluidos dentro del conjunto solución.
- Se habla de intervalo infinito cuando uno de sus extremos es infinito.
- Una inecuación es una desigualdad en la cual está presente al menos una variable o incógnita en su estructura.
- Una inecuación lineal es aquella donde la variable se encuentra elevada al exponente 1.
- Cuando en la solución de un determinado planteamiento se encuentran involucradas dos o más inecuaciones se habla de sistema.
- Las inecuaciones de primer grado con dos variables se resuelven de manera gráfica.
- Las inecuaciones de segundo grado en una variable contienen a un polinomio de grado 2.
- En una inecuación racional la variable forma parte del denominador.

Términos Clave

- Desigualdad
- Intervalo
- Intervalo abierto
- Intervalo cerrado
- Inecuación

Ejercicios de Autoevaluación

1. Exprese simbólicamente las proposiciones
   a. Cuarenta y cinco es menor que cien.
   b. Diez es mayor que ocho
   c. Menos cuatro es mayor que menos 5
   d. Cero es mayor que menos dos
   e. Menos tres es menor que siete.
2. Represente cada proposición desde el punto de vista del otro número
   a. $3 < 5$
   b. $12 \geq 11$
   c. $-1 > -5$
   d. $11 < 20$
   e. $0{,}5 < 0{,}7$
3. Los siguientes intervalos están conformados por números reales, expréselos mediante el lenguaje normal.
   a. $[4, 9]$
   b. $(-\infty, 3]$
   c. $(1, 5)$
   d. $[-5, 8)$
   e. $(3, 10]$
4. Represente gráficamente las operaciones entre intervalos
   a. $(3, 6) \cup (10{,}12)$
   b. $[-2, 10] \cap (5, 12)$
   c. $(-\infty, -4] \cap [-6, 8)$
   d. $(4, 20) \cup [15{,}18]$
   e. $(-\infty, -30) \cap [-40, 0)$
5. Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese su respuesta en notación de conjunto, notación de intervalo en forma gráfica.
   a. $4 - 6x < -3$
   b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{2}{3}$
   c. $5x + 3x - 4x \leq 3$
   d. $10(x + 2) \geq 15$
   e. $\frac{4}{7} - \frac{5x}{8} > -7$
6. Resuelva las inecuaciones siguientes
   a. $|4x + 5| \leq 3$
   b. $\frac{|x-4|}{12} \geq 5$
   c. $\frac{3x+7}{4x+9} \geq 11$
   d. $x^2 - 144 \geq 0$
   e. $x^2 - x - 20 \leq 0$
7. Haga la gráfica del conjunto solución de las inecuaciones
   a. $4x + 6y \geq 5$
   b. $3x - y \leq -7$
   c. $5 - 4x + y \leq 3$

d. $\frac{x+y}{5}+\frac{2}{3}>\frac{7}{8}$

e. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{y}{4}\geq\frac{5}{7}$

8. Si Pedro gana mensualmente menos de Bs 100 000 y José gana mensualmente más de Bs 60 000. Haga una gráfica del conjunto solución de estas proposiciones.
9. El precio de venta de un producto es Bs 1200, la empresa que lo fabrica tiene unos costos fijos de Bs 12 000 y unos costos variables de Bs. 580 por cada unidad producida. Indique cuántas unidades debe producir y vender la empresa para que tenga una utilidad de al menos Bs. 8 000 000.
10. Se desea construir un edificio en un lote de terreno rectangular, el área para la construcción es 1 200 metros cuadrados. Cuáles deben ser las dimensiones del terreno si se requiere al menos 400 metros cuadrados para áreas verdes y servicios y uno de los lados está limitado a 35 metros.

Bibliografía Recomendada

- Becerra, J. (2005). *Temas selectos de matemática: la amena forma de aprender más.* Unam: México.
- Del Pozo, E., Díaz, Z., Fernández, J., Segovia, J. (2007). *Matemáticas fundamentales para estudios universitarios*. Delta: Madrid.
- Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., Hecklein, M. (2005). *Algebra*. Universidad Nacional del Litoral: Santa Fe.
- Soler, F., Núñez, R., Aranda, M. (2005). *Fundamentos de cálculo con aplicaciones a ciencias económicas y administrativas*. Ecoe: Bogotá.

Sitios web

- https://goo.gl/QweWRs. Se trata de un blog donde se plantea la solución de varios tipos de inecuaciones con enlaces a videos en youtube.
- https://goo.gl/LvK6mn. Es una portal web denominado "Profesor en Línea" donde se explican diversos tópicos relacionados con las matemáticas, en enlace apunta al tema inecuaciones lineales.
- https://goo.gl/XMHNUw. Sitio web denominado "Portal Educativo" con contenido matemático para diferentes niveles. El diseño de los ejercicios es a full color.
- https://goo.gl/ZbXu9o. Sitio web "Plan Ceibal" con ejercicios ilustrados y explicados de forma muy amena.

CAPÍTULO 6

Funciones Reales

Objetivos:

General

Analizar los elementos presentes en las funciones reales de una variable real conducentes a la representación gráfica de dichas funciones tanto de manera manual como como con el apoyo de software.

Específicos

- Definir conceptos básicos relacionados con las funciones reales de una variable real tales como función, función real, dominio y rango de una función.
- Comprender la clasificación de las funciones reales.
- Analizar las funciones algebraicas
- Analizar las funciones Transcendentes

Introducción

Las características de un sujeto de estudio normalmente se traducen bajo el nombre de variables, las cuales pueden ser cuantitativas o cualitativas. En el caso de las primeras se recurre algunas veces a la clasificación en variables dependientes y en variables independientes, sobre todo cuando interesa estudiar la relación entre al menos dos de ellas, con el fin de sustentar o probar hipótesis. De igual manera en las ciencias sociales es importante estudiar el comportamiento de diversos aspectos tomando como base el tiempo, el costo, los precios de venta o de adquisición o en general de variables que inciden de manera directa en la conformación de patrones a través de los cuales se puede concluir si determinada acción va por el rumbo correcto o se hay que tomar medidas correctivas.

El carácter general de las matemáticas, permite que las variables sean expresadas mediante letras y que la relación existente entre ellas sea definida a través de una estructura que produce un resultado. Dicho mecanismo se parece a una máquina que se nutre elementos de entrada, efectúa un proceso y genera un producto, pero en este caso tanto la entrada, como la salida está conformada por números reales, el proceso es la estructura de la función.

En este capítulo se estudian las funciones reales de variables reales, es decir operaciones matemáticas que tienen como condición de entrada a números reales y generan en la salida números reales, la entrada está representada por una variable independiente y la salida por una variable dependiente. El resultado final en la mayoría de los casos es la representación de la gráfica de la función, la cual adopta una forma característica tomando en cuenta la estructura de los números que están a la entrada y la fórmula que los define.

En tal sentido, se estudia en primer lugar las funciones lineales, la cuales tienen como representación a la línea recta y a pesar de ser una de las funciones más sencillas de representar, tiene muchos usos y es la base para la comprensión de situaciones más complejas. Luego se estudian la función cuadrática, la función logarítmica, las funciones inversas y la función valor absoluto; todas importante puesto que constituyen el fundamento para la comprensión de fenómenos más complejos presentes en las diversas áreas del saber.

Se procura una explicación básica tanto sobre la definición del dominio y el rango de la función como de los elementos necesarios para realizar la gráfica. En este sentido es importante que el alumno tenga presente que debe esforzarse por comprender la ubicación de puntos en el plano, situación que es el punto de partida para la conformación definitiva de la gráfica representativa de la función.

De igual manera, en el presente capítulo se hace uso intensivo de software para la construcción de las gráficas de cada función, elemento que resulta imprescindible en nuestros días, al punto que existen aplicaciones que corren en teléfonos inteligentes, a partir de los cuales los interesados disponen de opciones ni siquiera pensadas hasta hace poco. Sin embargo no hay que olvidar que es de suma importancia conocer las bases sobre las cuales se apoya ese fantástico andamiaje que nos muestran las tecnologías de la información y la comunicación, sobre todo en la parte que nos corresponde desde nuestra área que nos estamos formando.

Definiciones básicas relacionadas con las funciones reales

Se establece en esta sección los conceptos que conducen a la comprensión de la idea de función, los cuales serán el piso sobre el cual se asienta tanto la construcción de la gráfica como su interpretación. Recordemos que dichas representaciones gráficas se hacen sobre un sistema de coordenadas cartesianas que a su vez está conformado por una recta horizontal y otra recta vertical de tal forma que sobre ella se proyectan valores numéricos bajo el esquema de puntos en el plano que tienen cada uno dos componentes, la primera perteneciente al eje horizontal o eje x y la segunda al eje vertical o eje y.

Es de suma importancia que el estudiante sepa ubicar un punto en el plano, que tenga idea de la ubicación en dos dimensiones, ya que eso le va a permitir avanzar sobre pasos seguros en la construcción de curvas representativas de cada función. De igual manera, en la actualidad la palabra coordenada no suena extraña a nuestros oídos, la mayoría de los teléfonos inteligentes son capaces de indicarnos nuestra ubicación a través del sistema de posicionamiento global GPS; dicha ubicación es simplemente un par de números que actúan como coordenadas cartesianas de ejes trazados en zonas específicas de la tierra. En consecuencia, si conocemos los fundamentos matemáticos estaremos en capacidad de comprender mejor lo que nos indican los recursos tecnológicos.

Definición de función

Si su función como estudiante es estudiar, usted entiende que debe utilizar los recursos disponibles para llevar a cabo su tarea, dentro de ellos está la asistencia diaria a clases y la realización de las actividades formativas y de evaluación; por lo tanto usted debe distribuir su tiempo de tal forma que pueda abarcar todas ellas de la mejor manera posible y con el resultado esperado: aprender. Un resumen básico de este proceso es: Actividades formativas y de evaluación – Estudiar – Aprender. La función estudiar, tiene unos elementos de entrada y genera un resultado, para que usted aprenda previamente debe cumplir sus actividades. Situación que se representa en la Figura 1.

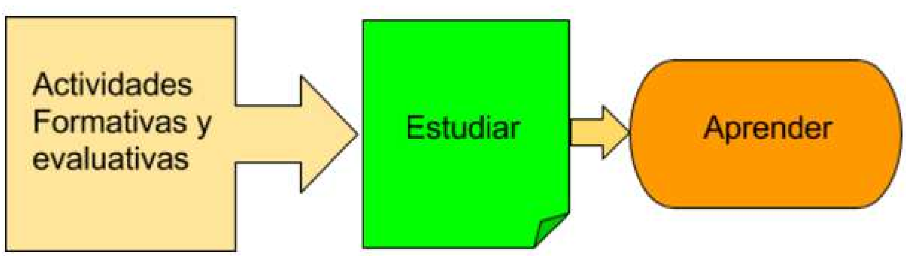


Figura 1: Función estudiar, una idea del concepto de función matemática.

En matemáticas, la idea de función es similar; un número n es sometido a operaciones presentes en una estructura, luego de lo cual se genera otro número m. Se observa que el número m depende del número n, tal como se indica en la Figura 2.

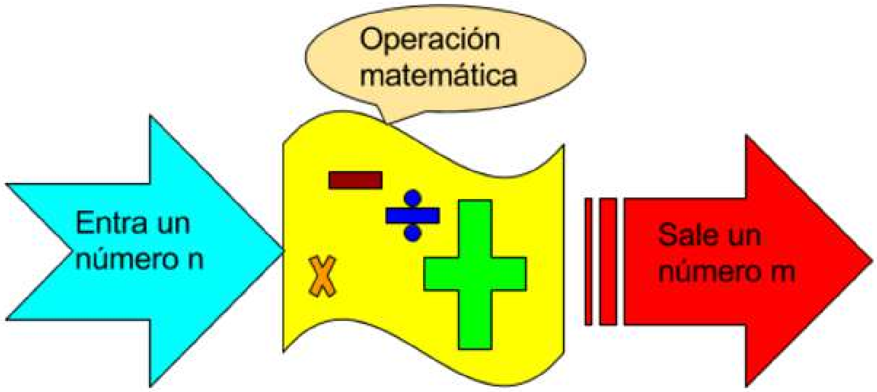


Figura 2: Forma como se procesan los elementos en una función.

La operación matemática es una regla de correspondencia, es decir, define la manera como debe modificarse el número que entra para generar la salida. Si x es el número que entra, una regla puede ser: "elevar a x al cuadrado", otra regla puede ser: "sumar tres unidades a x", otra puede ser: "multiplicar a x por cuatro y el resultado dividirlo entre tres". Las directrices anteriores en representación simbólica equivalen a: $x^2, x + 3,\ \frac{4x}{3}$.

Por supuesto que esa regla aplica no solamente para un número sino para muchos, es decir en la entrada se puede aceptar una cantidad a veces ilimitada de números, dichos números conforman un conjunto, el cual se denominará por lo momentos como conjunto de partida. La función va a generar muchos números diferentes, tomando en cuenta los elementos que procese. Esos números conforman un conjunto que por ahora se denominará conjunto de resultados, como indica la Figura 3. Hay que tener en cuenta algo muy importante: entra un número – sale un número, entra un símbolo – sale un símbolo.

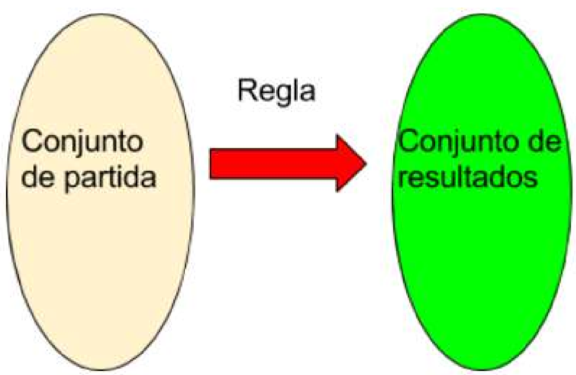


Figura 3: Elementos básicos de una función.

Tomando en cuenta lo mencionado hasta ahora, se define a una función como una regla o ley que transforma un elemento perteneciente a un conjunto de entrada y genera un elemento que conforma un conjunto de resultados.

Dominio y rango de una función

El dominio de una función es el conjunto conformado por todos los elementos que actúan como entrada de la función, es decir se trata del conjunto de partida de la función. En este capítulo se estudian las funciones reales de variables reales, por lo tanto el dominio de todas las funciones analizadas estará conformado por todos los números reales o bien por un subconjunto o de éste. Es importante destacar el hecho que cada elemento que pertenece al dominio tiene una imagen y solamente una imagen en el conjunto de llegada o rango. Cuando se habla de imagen nos estamos refiriendo a que hay un resultado luego de aplicar la regla que define a la función.

También nos podemos referir al dominio como el conjunto conformado por los elementos para los cuales tiene sentido la función.

El dominio de una función *f* se representa simbólicamente como:

$$Dom(f)$$

Se define el rango de una función como el conjunto conformado por los elementos que surgen como resultado de aplicar la regla o ley matemática que la define, es decir, es el conjunto de resultados de la función. Como se trata de funciones reales, el rango es un conjunto conformado por números reales. De igual forma, al rango también se le conoce con el nombre de conjunto de imágenes de la función.

Figura 4: Elementos básicos de una función bajo la denominación matemática tradicional.

El rango de una función f se representa simbólicamente como:

$$Rgo(f) \quad \text{o también como } Img(f)$$

El dominio de la función también recibe el nombre de campo de variación. En el conjunto de llegada pueden existir elementos adicionales a los que conforman el conjunto de imágenes o rango de la función, en tal caso se habla de codominio de la función (Figura 5).

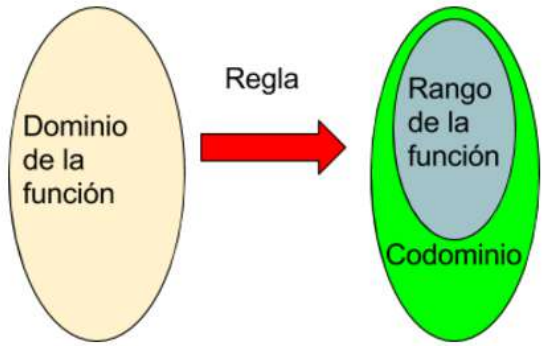


Figura 5: El codominio de una función.

El dominio de la función representa a la variable independiente. Si se trata de funciones de una variable independiente como las estudiadas en este capítulo, lo normal es utilizar la letra *x*; el rango de la función representa a la variable dependiente para la cual se utiliza la letra *y*; letras que se corresponden con el eje horizontal y el eje vertical de un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se indica y representa en la Figura 6.

Figura 6: Ejes coordenados, base para la representación gráfica de funciones.

Notación para funciones

Las funciones generalmente son representadas con las letras *f, g, h;* sin embargo no es un error representarlas con el resto de letras del alfabeto. Luego de la letra de la función se escribe un paréntesis dentro del cual se escribe la variable independiente, x, luego el signo igual y finalmente la estructura que define a la función. Para el caso de que la regla que define a la función sea, por ejemplo: "multiplicar a x por 5 y sumar 3", la notación de la función es $f(x) = 5x + 3$. Observe que $f(x)$ genera el valor de y, por lo tanto es muy común trabajar indistintamente con las formas: $y = f(x)$; es decir que la función anterior también puede ser escrita así: $y = 5x + 3$. $f(x)$ se lee "efe de equis".

También es común la representación de una función mediante diagramas de Venn o sagitalmente. Si se tiene al conjunto A que actúa como dominio y al conjunto B que es el rango, entonces la función es: $f: A \to B$ que se lee como "efe de A en B".

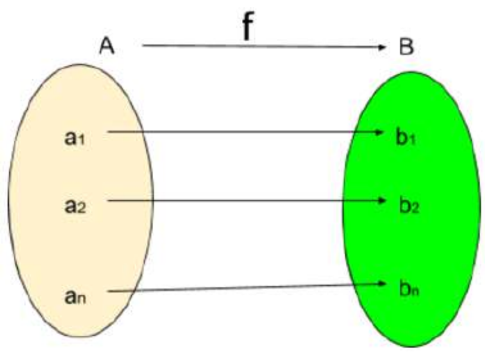


Figura 7: Representación sagital de una función.

De acuerdo con la figura, f es una función de A en B si y solamente si todo elemento que pertenece al conjunto A tiene su correspondiente elemento en el conjunto B. Técnicamente esto se resume en las denominadas leyes de existencia y de unicidad.

Ley de existencia: $\forall x \in A, \exists\, y \in B\ / y = f(x)$

Ley de unicidad: $y = f(x) \wedge z = f(x) \Longrightarrow y = z$

Tomando en cuenta lo expresado, una función se encuentra definida:

a. Cuando tiene un conjunto de partida llamado dominio
b. Cuando tiene un conjunto de llegada denominado rango
c. Cuando la regla que la define cumple con la ley de existencia y con la ley de unicidad.

Puntos en el plano cartesiano

Un punto en el plano cartesiano está conformado por un par de valores, el primero de ellos representa a la variable *x* y el segundo a la variable *y*. Si el primer elemento es a y el segundo es *b*, la manera correcta de representar al punto es $P(a, b)$, la letra mayúscula sirve para distinguir el punto de los otros puntos. Las letras *a,b* corresponden a las coordenadas del punto expresadas de manera genérica. Todo punto en el plano también se conoce con el nombre de par ordenado. El eje de las x o eje horizontal también se conoce como eje de las abcisas, el eje y o eje vertical se conoce con el nombre de eje de las ordenadas. Todo par ordenado comienza con una abcisa y termina con una ordenada.

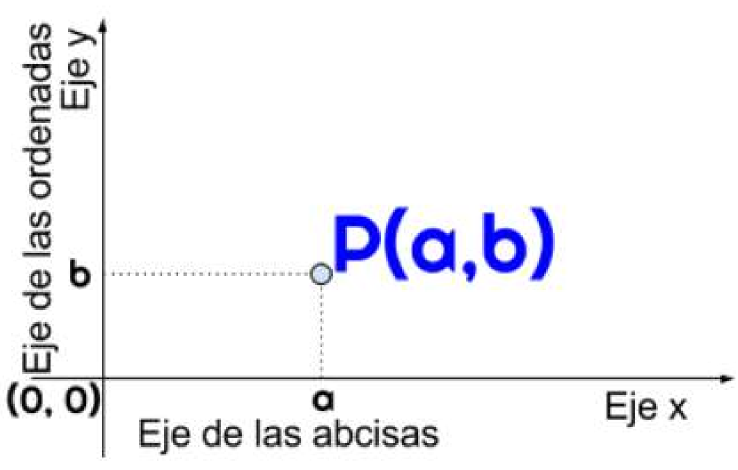


Figura 8: Coordenadas de un punto en el plano.

La intersección de los ejes produce cuatro zonas perfectamente diferenciadas denominadas cuadrantes. En el primer cuadrante tanto las abcisas como las ordenadas son positivas; en el segundo cuadrante las abcisas son negativas y las ordenadas positivas; en el tercer cuadrante tanta las abcisas como las ordenadas son negativas y en el cuarto cuadrante las abcisas son positivas y las ordenadas negativas.

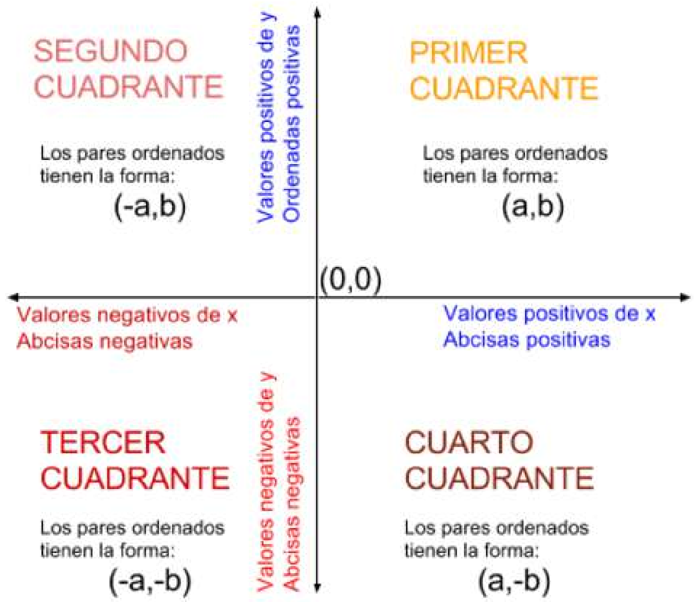


Figura 9: Signo de las coordenadas de un punto de acuerdo al cuadrante que ocupa.

Un punto específico, tal como $A(2,7)$ está ubicado dos unidades a la derecha del origen en el eje x y a siete unidades sobre el origen en el eje y; otro punto $B(-3,-4)$ está ubicado tres unidades a la izquierda del origen sobre el eje x y a cuatro unidades bajo el origen sobre el eje y.

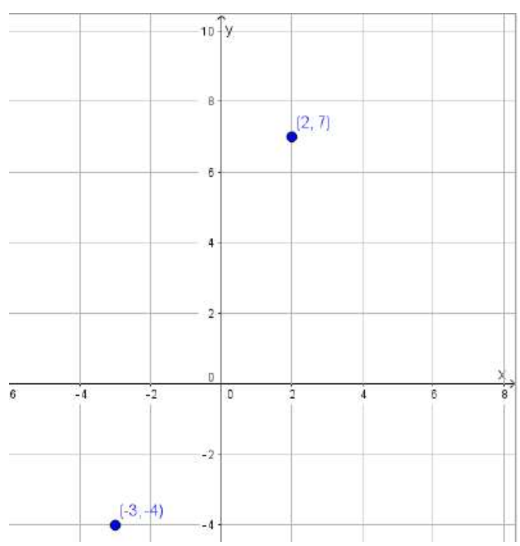


Figura 10: Ubicación de puntos n el sistema de coordenadas cartesianas.

En el caso de las funciones reales de una variable real como las estudiadas en este capítulo, el punto resume el resultado de aplicar la regla o ley que define la función; el elemento de entrada es el primero representado y el elemento resultado de la función es el segundo en el par.

Cálculo de imágenes de una función

Para construir la gráfica de una función a partir de la regla que la define, se necesita el cálculo de algunos de sus puntos, para luego trasladarlos a un sistema de coordenadas y así facilitar la representación. De acuerdo al tipo de función se requiere un mínimo de puntos para que ésta quede adecuadamente representada. En esta parte se practicará el cálculo de imágenes.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 2x + 7$, calcular: a. $f(1)$, b. $f(-2)$, c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$, d. $f(10)$.

Respuestas:

a. $f(1)$
Se trata de calcular el valor de la función *f* cuando el valor de *x* es igual a 1, es decir, la imagen de la función para $x = 1$.

$$f(1) = 2(1) + 7 = 2 + 7 = 9$$

$f(1) = 9$, por lo tanto se tiene al punto $P_1(1, 9)$

b. $f(-2)$
Se trata de calcular el valor de la función *f* cuando la entrada es -2.

$$f(-2) = 2(-2) + 7 = -4 + 7 = 3$$

$f(-2)$=3, por lo tanto se tiene el punto $P_2(-2, 3)$.

c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$
Se trata de calcular la imagen de la función cuando $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 1 + 7 = 8$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$, por lo tanto se tiene el punto $P_3\left(\frac{1}{2}, 8\right)$

d. $f(10)$
Se trata de calcular la imagen de la función *f* cuando $x = 10$.

$$f(10) = 2(10) + 7 = 20 + 7 = 27$$

$f(10) = 27$, por lo tanto se tiene el punto $P_4(10, 27)$

Los puntos fueron denominados con la letra P seguida de un subíndice, también es válido, como ya se dijo denominarlos con letras mayúsculas.

Estos puntos calculados, pueden presentarse a manera de resumen de la siguiente manera, ya ordenados en x.

x	y
-2	3
$\frac{1}{2}$	8
1	8
10	27

Ejemplo

Dada la función $g(x) = \frac{x^2+5}{x+1}$, calcular a. $g(3)$ b. $g\left(-\frac{2}{5}\right)$, c. $g(-3)$. d. $g(\sqrt{2})$

Respuestas

a. $g(3)$

Se calculará la imagen de la función g cuando $x = 3$.

$$g(3) = \frac{(3)^2 + 5}{(3) + 1} = \frac{9 + 5}{3 + 1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$g(3) = \frac{7}{2}$, punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$

b. $g\left(-\frac{2}{5}\right)$

Se calculará la imagen de la función g cuando $x = -\frac{2}{5}$

$$g\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 5}{\left(-\frac{2}{5}\right) + 1} = \frac{\frac{4}{25} + 5}{-\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{4 + 125}{25}}{\frac{-2 + 5}{5}} = \frac{\frac{129}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{(129)(5)}{(25)(3)} = \frac{43}{5}$$

$g\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{43}{5}$, punto $B\left(-\frac{2}{5}, \frac{43}{5}\right)$

c. $g(-3)$

Se calculará la imagen de la función g cuando $x = -3$

$$g(-3) = \frac{(-3)^2 + 5}{(-3) + 1} = \frac{9 + 5}{-3 + 1} = \frac{14}{-2} = -7$$

$g(-3) = -7$, punto $C(-3, -7)$

d. $g(\sqrt{2})$

Se calculará la imagen de la función g cuando $x = \sqrt{2}$.

$$g(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2 + 5}{(\sqrt{2}) + 1} = \frac{2 + 5}{\sqrt{2} + 1} = \frac{7}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\frac{7}{\sqrt{2}+1}=\frac{7}{\left(\sqrt{2}+1\right)}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{2+1}=\frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$$

En la última línea se racionalizó la expresión al multiplicar y dividir por $\sqrt{2}-1$ y lograr así convertir el denominador en el producto de una suma por diferencia. Revisar los casos de factorización, en el capítulo 4.

$g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$, punto $D\left(\sqrt{2},\frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}\right)$

Finalmente se construye una tabla con los puntos calculados

x	y
-3	-7
$-\frac{2}{5}$	$\frac{43}{5}$
$\sqrt{2}$	$\frac{7\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$
3	$\frac{7}{2}$

Imagen de una función con wxMaxima. Si se introduce la regla que define a la función, luego el programa puede calcular la imagen de cualquier número que el usuario introduzca. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo

Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{6x-4}{5x-2}$$
$$g(x)=12x^3+22x^2-14x+5$$
$$h(x)=\frac{x^3-3}{7}$$

Calcular

a. $f(-7)$
b. $g(12)$
c. $h\left(-\frac{10}{3}\right)$
d. $f\left(\frac{1}{3}\right)$
e. $g\left(-\frac{4}{5}\right)$
f. $h(24)$
g. $f\left(\sqrt[3]{5}\right)$
h. $g\left(\sqrt[4]{6}\right)$
i. $h\left(\sqrt[7]{20}\right)$

Respuestas

Se define cada una de la funciones, wxMaxima utiliza el operador $:=$, también hay que colocar un asterisco cada vez que exista una multiplicación. Una vez que se introduce la función se presiona la combinación de teclas SHIFT + ENTER para que el software genere la salida. En la Figura 11 se observan las tres entradas y las tres salidas de las funciones.

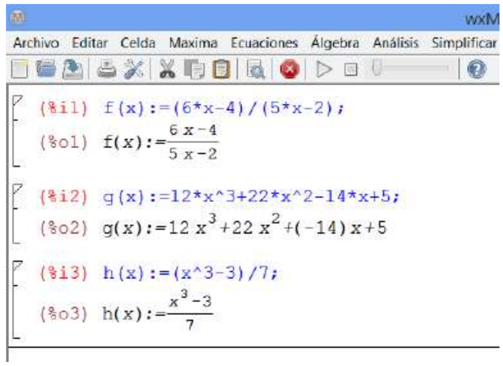


Figura 11: Definición de las funciones con wxMaxima.

Ahora, para el cálculo de las imágenes solicitadas, se introduce la letra que representa a cada función, paréntesis de apertura, el valor de la variable, paréntesis de cierre y la combinación de techas SHIFT + ENTER. En la Figura se muestra las entradas realizadas por el usuario identificadas con $(\%in)$ donde n es un número entero y la salida generada por el programa, identificada con $(\%on)$. Las raíces se escriben como exponentes fraccionarios.

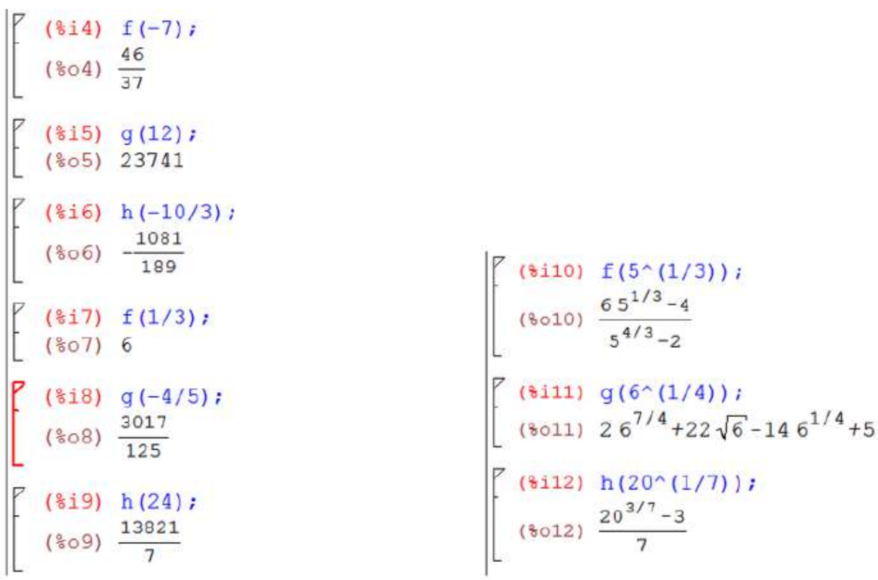


Figura 12: Resultado del cálculo de imágenes de funciones con wxMaxima.

Si se desea que la imagen de la función sea expresada como un decimal, una de las maneras que tiene wxMaxima es usar la función float( ). Por ejemplo el valor decimal de la salida 12 es:

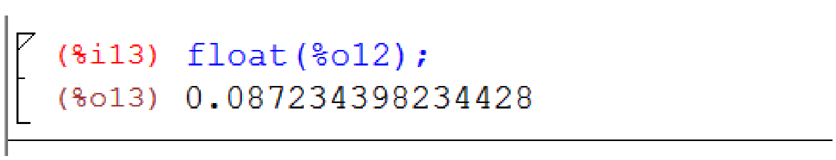


Figura 13: Modo de convertir una salida simbólica en numérica con wxMaxima.

Otra posibilidad es conmutar la salida numérica.

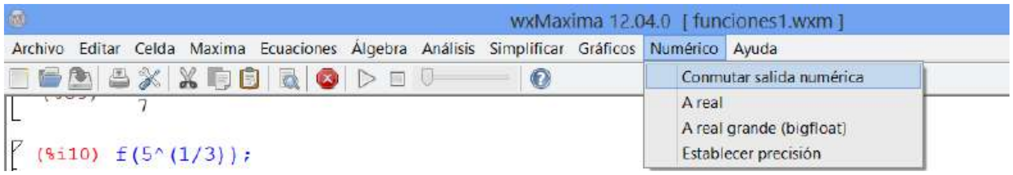


Figura 14: Forma alternativa de obtener una salida numérica con wxMaxima.

Luego escribir las salidas cuyo valor numérico aproximado se desea obtener. En la Figura 15 se observan las primeras 5 imágenes del planteamiento, expresadas en decimal

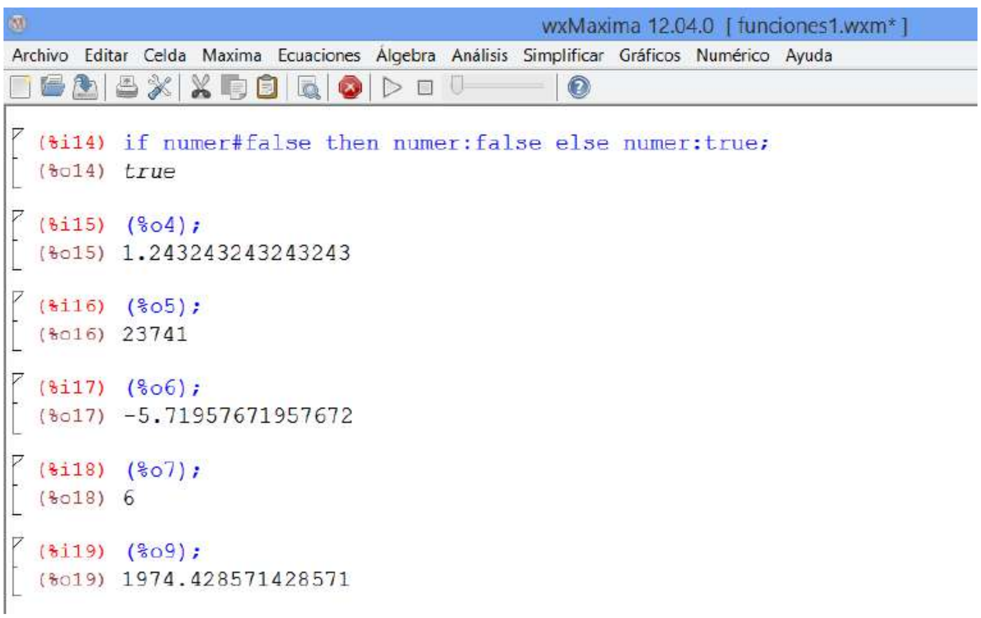


Figura 15: Imágenes de las funciones, calculadas con wxMaxima y expresadas en números decimales.

Clasificación de las funciones

Existen diferentes clasificaciones de las funciones, en este caso se considera el tipo de funciones de acuerdo a asociación entre dominio y rango y la clasificación de acuerdo a las operaciones que definen a la función.

Clasificación de acuerdo a la relación entre los elementos del dominio y el rango

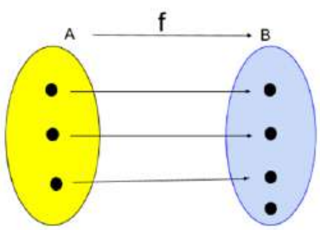
Tomando en consideración la relación entre los elementos del dominio y el rango de la función, estas se clasifican en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. En cada una ellas se cumplen la ley de existencia y la ley de unicidad.

Funciones inyectivas. Una función es inyectiva si a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del rango. Este tipo de funciones también se conocen con el nombre de funciones uno a uno.

$$Si\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Significa que no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen. Cada elemento del conjunto B debe aparecer como máximo una vez como imagen de algún elemento del conjunto A.

Los siguientes son ejemplos de este tipo de funciones.



$$f = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$$

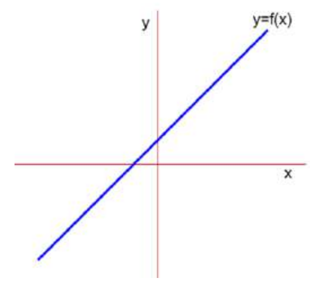


Figura 16: Ejemplos de funciones inyectivas.

¿Cómo se identifica una función inyectiva si está representada gráficamente o sagitalmente?

Si se trazan rectas horizontales, cada una de estas rectas debe cortar a la gráfica de la función en solamente un punto.

En el caso de representación sagital, si en el conjunto B llega más de una flecha a un elemento, la función no es inyectiva.

Funciones inyectivas en la vida real:

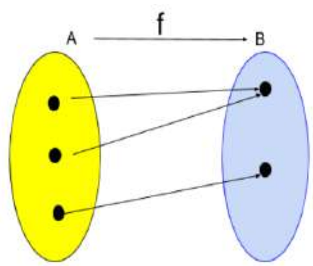
a. Número de cédula de identidad – Persona. Una persona tiene solamente un número de cédula de identidad; sin embargo existen personas que aún no tienen número de cédula de identidad
b. Código de barras – Artículo de consumo. El código de barras es único para cada artículo; es posible que en una tienda existan artículos sin esta codificación.
c. Número de placa de identificación – Vehículo. La placa de un vehículo es irrepetible en otro vehículo; pero es posible la existencia de vehículos sin número de placa.
d. Personas – asientos ocupados en un cine. Es muy probable el caso de que existan asientos vacíos.

Funciones sobreyectivas. Una función es sobreyectiva si el conjunto de todas sus imágenes es igual al conjunto de llegada, es decir si coincide el rango con el codominio de la función. Simbólicamente se dice que una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva

$$Si\ \forall\ y \in B\ \exists\ x \in\ A/y = f(x)$$

Significa que todos los elementos del conjunto de llegada aparecen por lo menos una vez como imagen de algún elemento del conjunto A. No deben existir elementos en el conjunto B sin su respectivo par en el conjunto A.

Los siguientes son ejemplos de este tipo de funciones.



$f = \{(1,4),(2,4),(3,6)\}$

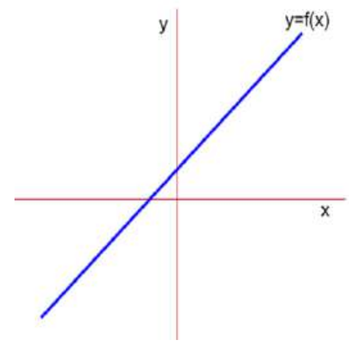


Figura 17: Ejemplos de funciones sobreyectivas.

¿Cómo se identifica una función sobreyectiva si está representada gráficamente o sagitalmente?

Si se trazan rectas horizontales y estas cortan la gráfica de la función en al menos un punto la función es sobreyectiva. Si se trazan rectas horizontales y al menos una de ellas no corta la gráfica de la función, ésta no es sobreyectiva.

En el caso de representación sagital, si en el conjunto B existe al menos un elemento al cual no llega una flecha, la función no es sobreyectiva.

Funciones sobreyectivas en la vida real:

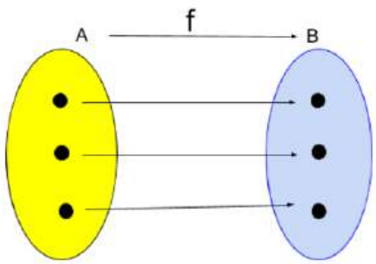
a. Usuario – Servicio de Telefonía. Muchos usuarios y pocos operadores de telefonía.
b. Estudiante – Carrera universitaria. Muchos estudiantes demandan una carrera universitaria.
c. Estudiante – profesor. Varios estudiantes cursan una materia con un solo profesor.
d. Concesionaria de vehículos – marca. Cada empresa concesionaria distribuye una marca de vehículo, en una ciudad pueden existir varias concesionarias.

Funciones biyectivas. Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva. Estas funciones no tienen pares ordenados con la misma segunda componente y el rango es igual al codominio, es decir en una función $f: A \to B$, el conjunto A tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto B.

$$\forall y \in B\ \exists!\, x \in A / y = f(x)$$

Es decir, para todo y que pertenece al conjunto B existe un único *x* que pertenece al conjunto A tal que *y* es igual a *f* de *x*.

Los siguientes son ejemplos de este tipo de funciones.



$f = \{(3,4), (5,7), (7,10)\}$

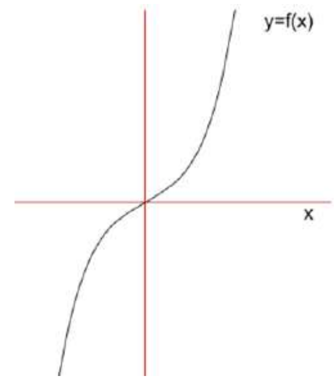


Figura 18: Ejemplos de funciones biyectivas.

¿Cómo se identifica una función biyectiva si está representada gráficamente o sagitalmente?

Si se trazan rectas horizontales, todas deben cortar a la gráfica de la función en uno y solo un punto.

En el caso de representación sagital, en el conjunto B debe llegar solamente una flecha a todo elemento presente.

En nuestra realidad se pueden considerar muchos ejemplos de este tipo de funciones:

a. Lugar de procedencia – gentilicio. Dependiendo del lugar donde procede la persona, tendrá un gentilicio único.
b. Madre natural – persona. Toda persona tiene una y solamente una madre natural.
c. Dirección catastral – edificación. Toda edificación en una ciudad tiene un único identificador catastral.
d. Huella dactilar – Persona. Todo individuo tiene una forma exclusiva de su huella dactilar.

Se debe tener presente que no necesariamente todas las funciones quedan clasificadas en alguna de las categorías mencionadas, es decir que existen funciones que no son ni inyectivas, ni sobreyectivas, ni mucho menos biyectivas. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva en $\mathbb{R}$ ya que existen elementos diferentes del dominio que tienen la misma imagen, tal es el caso de $x = -2$ cuya imagen es $f(-2) = 4$ y de $x = 2$ cuya imagen es $f(2) = 4$. En el mismo sentido, tampoco es sobreyectiva ya que el rango es el intervalo $[0, +\infty)$.

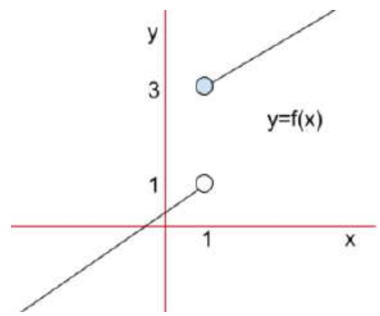
Ejercicios

1. Señale cuatro situaciones de la vida real para cada uno de los casos planteados.
   a. Ejemplos de funciones inyectivas
   b. Ejemplos de funciones sobreyectivas

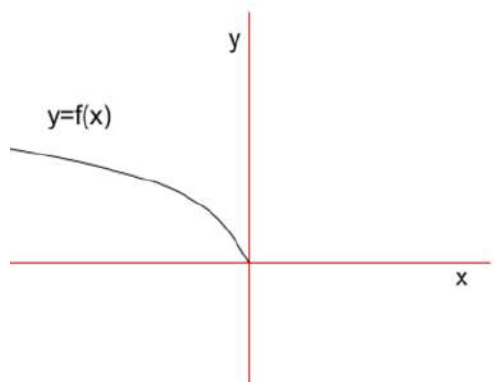
c. Ejemplos de funciones biyectivas

2. Indique si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, explique.
   a. $f = \{(2,4),(3,5),(4,5),(6,7)\}$
   b. $g = \{(3,3),(4,6),(5,7),(6,9),(7,10)\}$
   c. $h = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$
   d. $l = \{(12,10),(15,20),(20,20),(35,20)\}$

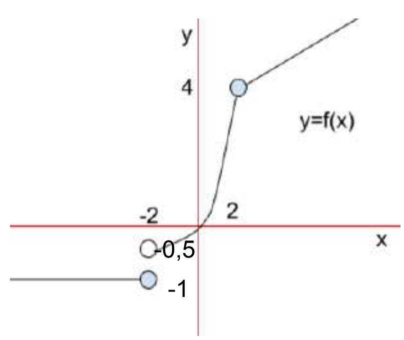
3. Trace rectas horizontales e indique si la función es biyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
   a.



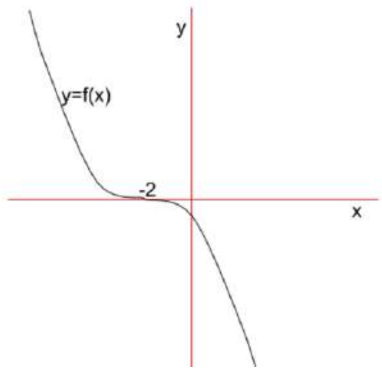
   b.



   c.



d.



Clasificación de acuerdo a las operaciones que definen la función

Toda función está definida mediante una regla o ley la cual se utilizará para establecer esta clasificación, tomando en consideración que algunas veces se corresponde con expresiones que son algebraicas pero otras veces no. En tal sentido las funciones se clasifican en:

1. Funciones algebraicas
   - Funciones polinómicas
   - Funciones racionales
   - Funciones radicales
2. Funciones trascendentes.
   - Funciones exponenciales
   - Funciones logarítmicas
   - Funciones trigonométricas

Funciones algebraicas

Como su nombre lo indica se trata de funciones cuya regla que la define es una estructura algebraica, de tal forma que aplica la clasificación para este tipo de estructuras realizadas en capítulos previos.

Funciones polinómicas

La regla que define a estas funciones es un polinomio.

Las siguientes funciones son polinómicas:

$f(x) = x + 1$ $\qquad g(x) = 4x^2 - 5$ $\qquad h(x) = 7x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

$f(x)$ es una función polinómica de primer grado, también conocida como función lineal.

$g(x)$ es una función polinómica de segundo grado, también conocida como función cuadrática

$h(x)$ es una función polinómica tercer grado, también conocida como función cúbica.

En este tipo de funciones no existe restricción alguna ni para el dominio ni para el rango, por lo tanto si la función es f se tiene que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$Rgo(f) = \mathbb{R}$$

Funciones lineales. Se trata de funciones polinómicas de grado 1. Tienen la forma

$$f(x) = ax + b$$

Con a igual a la pendiente de la recta y b punto donde la recta corta al eje y. La gráfica es una línea recta. Tanto el dominio como el rango de este tipo de funciones es el conjunto e los números reales.

Para hacer la gráfica de una función lineal basta con dos calcular dos pares ordenados.

Ejemplo

Construir la gráfica de la función

$$f(x) = 4x + 3$$

Respuestas

Se calcula dos imágenes de la función.

$Si\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 4(0) + 3 = 3$

$Si\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 4(1) + 3 = 7$

x	**y**
0	3
1	7

En un sistema de coordenadas cartesianas se ubican estos pares ordenados y se traza una línea recta por esos puntos. La gráfica se corresponde con la Figura 19, la cual fue construida con la ayuda de Geogebra.

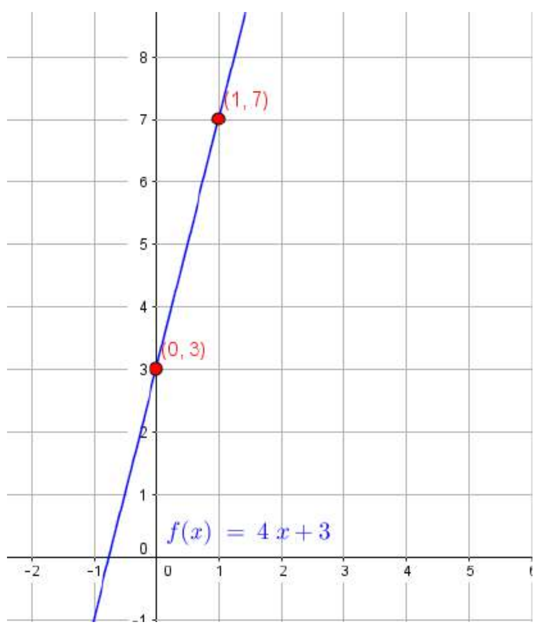


Figura 19: Figura 19: Gráfica de la función f(x)=4x+3

Ejemplo

Construir con Geogebra la gráfica de la función

$$g(x) = 5 - 2x$$

Respuestas

El procedimiento es el siguiente:

- Abrir Geogebra y hacer clic en "calculadora gráfica" de la ventana emergente o en el menú vista - vista gráfica.

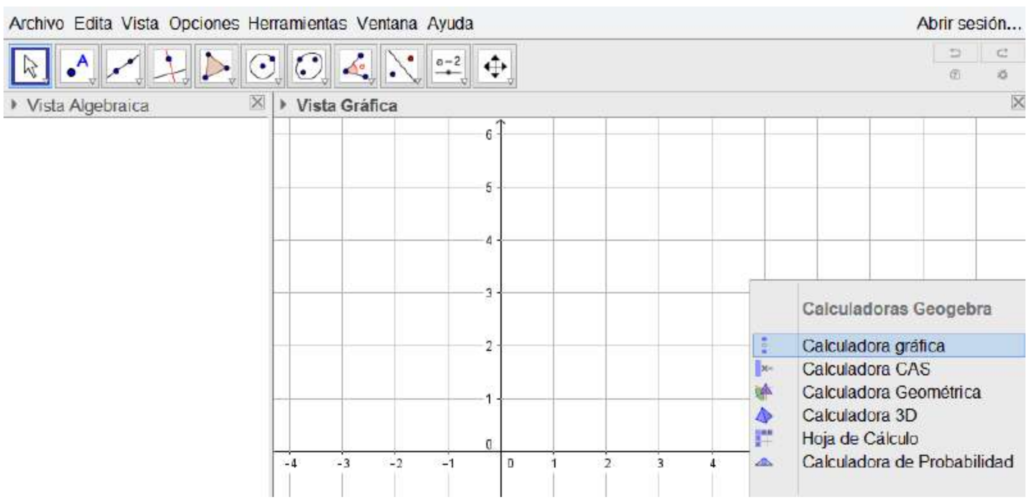


Figura 20: Ventana inicial de Geogebra.

- Verificar si la barra de entrada esta activa, si no lo está hacer clic en el menú vista – Barra de entrada

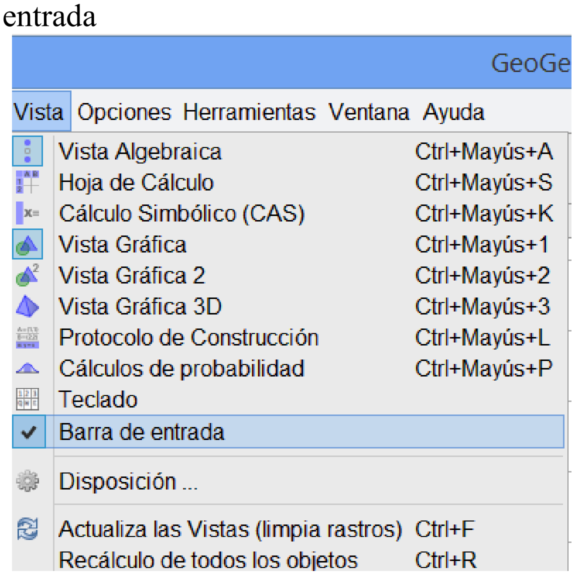


Figura 21: Activación de la barra de entrada de Geogebra.

- En la barra de entrada escribir: $g(x) = 5 - 2x$. Inmediatamente Geogebra dibuja la gráfica y en la vista algebraica coloca la estructura de la función. Esta gráfica puede ser mejorada en cuanto a su formato y se le puede añadir una tabla a la manera como se hace cuando se grafica manualmente.
- Para añadir una tabla, ir al menú vista – hoja de cálculo.
- En la celda A1 escribir "x" (escribir las comillas ya que de lo contrario Geogebra dibujará una recta). En la celda B1 escribir "g(x)=".
- En la celda A2 escribir 0. En la celda A3 escribir $= A2 + 1$. Arrastrar la esquina inferior derecha de la celda A3 hasta la celda A6.
- En la celda B2 escribir $= g(A2)$. Arrastrar la esquina inferior derecha de la celda B2 hasta la celda B6.
- Sombrear con el botón izquierdo del ratón las celdas A1:B6. Justificar al centro, haciendo clic en el botón "centro" ubicado justo encima de los datos.
- Hacer clic con el botón derecho del ratón en el área sombreada, crea – tabla.

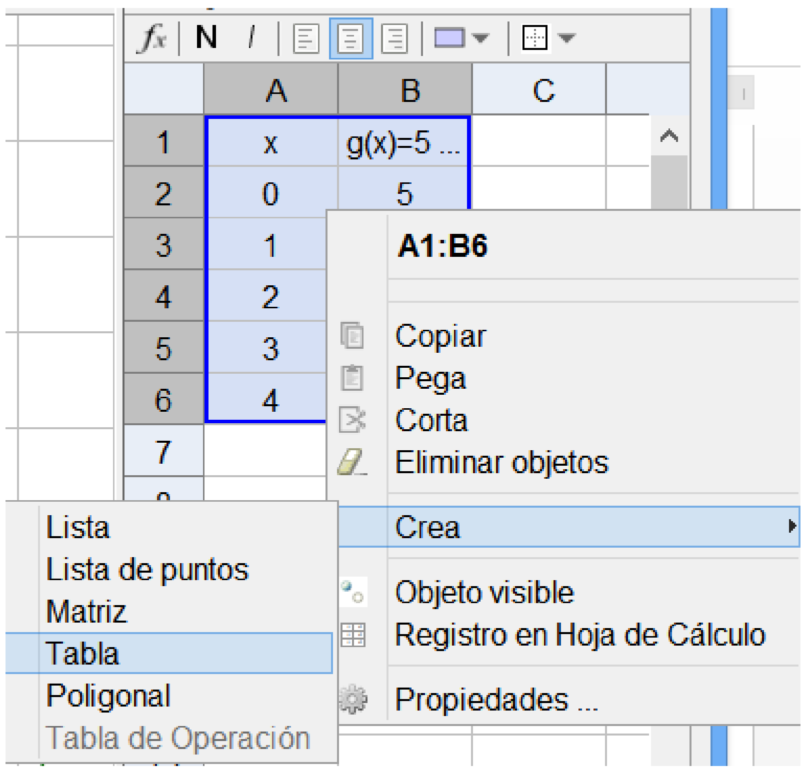


Figura 22: Creación de una tabla desde la vista hoja de cálculo de Geogebra.

- Repetir la operación anterior, pero ahora crea – lista de puntos.
- Cerrar la vista hoja de cálculo. Desplazar la tabla construida en la vista gráfica hasta una zona que no interfiera con la gráfica.
- Clic con el botón derecho del ratón sobre la tabla de la vista gráfica y activar las propiedades, donde se puede modificar entre otros elementos, el color del texto y de fondo.

- Clic con el botón derecho del ratón sobre la gráfica, surge la ventana propiedades donde se puede modificar el color de la línea, el estilo del trazo y en la pestaña básico cambiar la etiqueta visible a Nombre y valor.

La gráfica obtenida se muestra en la Figura 23.

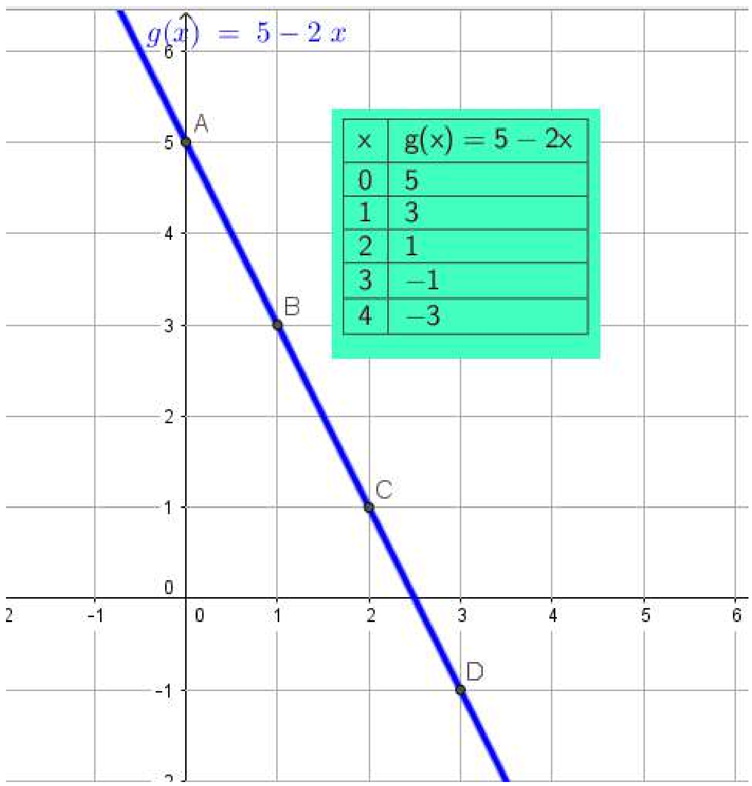


Figura 23: Gráfica y tabla de datos de la función f(x)=5-2x.

Ejemplo

Construir con wxMaxima la gráfica de la función

$$h(x) = \frac{5x + 7}{3}$$

Respuesta

- Cargar wxMaxima y escribir: $h(x) := (5 * x + 7)/3$, presionar SHIFT +ENTER. El programa genera en la salida la estructura de la función.
- Ir al menú Gráficos – Gráficos2D. Configurar la ventana emergente tal como aparece en la figura y aceptar.

Figura 24: Ventana para la definicion de la función y el rango de entrada con el fin de hacer la gráfica en wxMaxima.

wxMaxima genera una gráfica de la función en el intervalo indicado. Se trata de una representación sencilla donde el los ejes están representados en líneas punteadas y la función en color azul continuo.

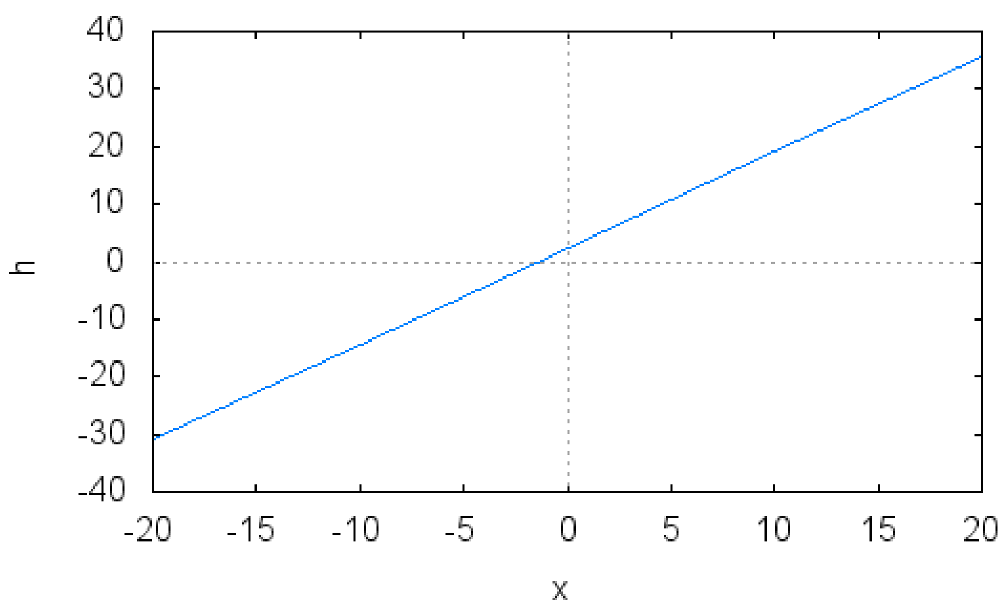


Figura 25: Gráfica de la función h(x)=(5x+7)/3 en el intervalo [-20,20].

Si se desea mayor precisión se pueden modificar los extremos del intervalo en el eje x, haciendo clic sobre el la línea del comando y luego de editar presionar Shift+Enter.

```
wxplot2d([h], [x,-2,2])$
```

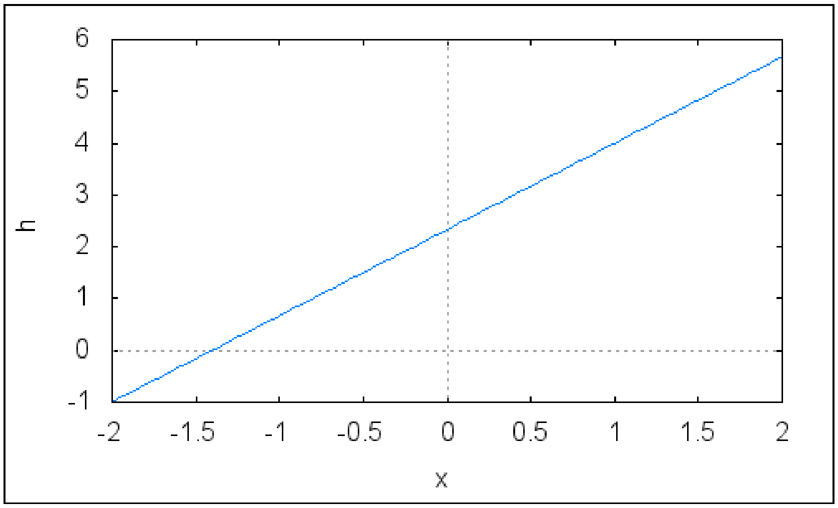


Figura 26: Gráfica de la función h(x)=(5x+7)/3 en el intervalo [-2,2].

Ejercicios

1. Para cada una de las funciones dadas calcular: (a) Dominio, (b) Rango, (c) Construir la gráfica.
   a. $f(x) = 2 - x$
   b. $g(x) = 4x + 1$
   c. $h(x) = x + 5$
   d. $f(x) = \frac{3x+7}{4}$
   e. $h(x) = 20 - 10x$
2. Construya la gráfica de la función en el intervalo indicado
   a. $f(x) = 5x + 2\ [-3, 5]$
   b. $f(x) = -3x + 4\ \ [-10, 10]$
   c. $g(x) = \ -3x + 1\ \ [2, 8]$
   d. $g(x) = \frac{1-3x}{3}\ \ \ [-2, -7]$
   e. $h(x) = 12 - 11x\ \ [-20,\ 20]$

Funciones cuadráticas. Se trata de funciones polinómicas en una variable de grado 2. Tienen la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde $a \neq 0$.

Su gráfica es una figura en forma de U denominada parábola que abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo positivo o negativo que acompañe a la variable al cuadrado. No tienen restricción en el dominio.

El rango se calcula a través de la derivada de la función y genera un intervalo general tal como:

$\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$ en el caso de las parábolas que abren hacia arriba o

$\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ en el caso de las parábolas que abren hacia abajo.

El punto más alto o más bajo de una parábola se denomina vértice de la parábola y sus coordenadas son

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje x, si existen, se obtienen haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo la ecuación de segundo grado.

El punto de corte de la parábola con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

Se pide:

a. Dominio
b. Rango
c. Gráfica en forma manual

Respuestas

a. Dominio de la función.
Es una función polinómica de grado 2, el dominio son todos los números reales.

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b. Rango de la función.
Esta función genera una parábola que abre hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.
Para calcular el valor y en el punto más bajo de la parábola se hace

$$a = 3; b = 4; c = 1$$

Coordenada *y* del vértice o punto más bajo de la parábola

$$y = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(3)(1)-(4)^2}{4(3)} = \frac{12-16}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto el rango de la función es:

$$Rgo(f) = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

c. Para construir manualmente la gráfica de la función es conveniente calcular las coordenadas del vértice y los puntos de corte con los ejes.
   Coordenadas del vértice. En el paso b, se calculó la coordenada *y* del vértice, la coordenada *x* se calculas así:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

   El vértice tiene como coordenadas

$$V\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

   Cortes con el eje x. Se hace $f(x) = 0$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

   Existen diferentes métodos para resolver esta ecuación. Se hará por factorización. Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 3.

$$(3x)^2 + 4(3x) + 3 = (0)(3)$$

   Se hace $u = 3x$

$$u^2 + 4u + 3 = 0$$
$$(u+1)(u+3) = 0$$
$$u + 1 = 0 \Rightarrow u = -1$$
$$u + 3 = 0 \Rightarrow u = -3$$
$$3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$
$$3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

   Cortes con el eje y. Se hace $x = 0$.

$$y = 3(0)^2 + 4(0) + 1$$
$$y = 1$$

   Con estos elementos es suficientes para hacer la gráfica de la función. Es conveniente tabular los puntos calculados.

x	**y**
0	1
-1	0
$-\frac{1}{3}$	0
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

En un sistema de coordenadas cartesianas su ubican estos cuatro pares ordenados, teniendo el cuidado de seleccionar la escala adecuada en ambos ejes.

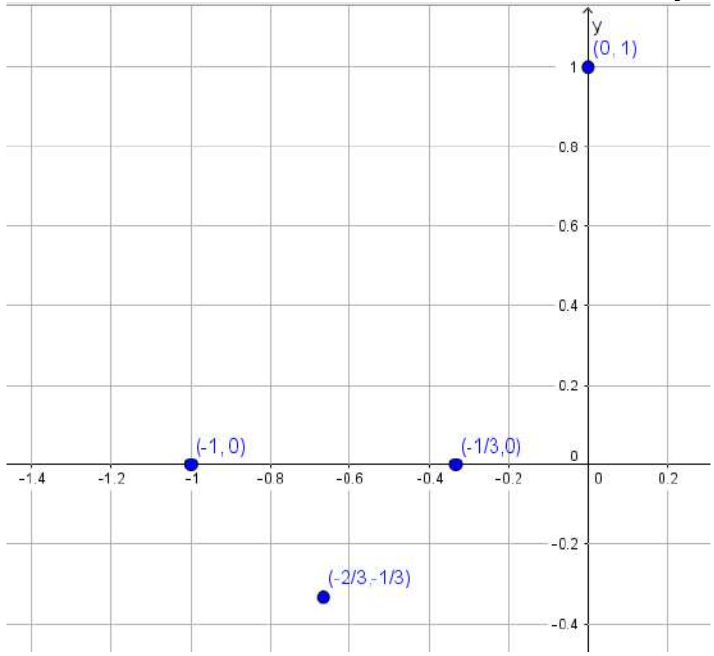


Figura 27: Representación de pares ordenados correspondientes a la función

Ahora solo resta unir los puntos con arcos de curva.

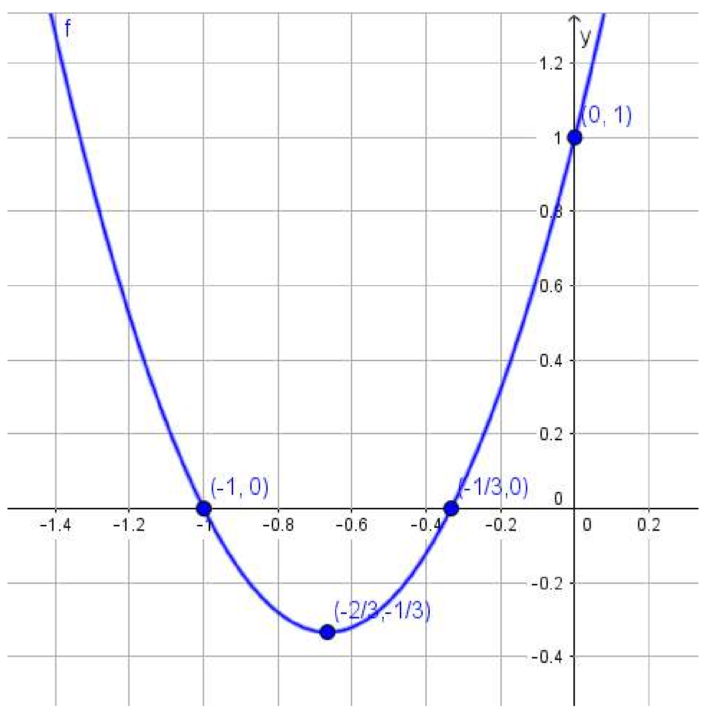


Figura 28: Representación gráfica de la función f(x)=3x^2+4x+1

Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = -x^2 + 5x + 2$$

Se pide:
a. Dominio
b. Rango
c. Coordenadas del vértice
d. Gráfica

Respuestas

a. Se trata de una función polinómica, por lo tanto el dominio de la función es:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b. Para obtener el rango de la función se calcula el valor de y en el vértice.
Se tiene que: $a = -1; b = 5; c = 2.$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(2) - (5)^2}{4(-1)} = \frac{-8 - 25}{-4} = \frac{33}{4}$$

Se trata de una parábola que abre hacia abajo, conclusión a la que se llega por el signo del coeficiente de x^2 el cual es negativo.

$$Rgo(f) = \left(-\infty, \frac{33}{4}\right]$$

c. Coordenadas del vértice.
Las coordenadas del vértice se calculan así:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \Rightarrow V\left(-\left(\frac{5}{2(-1)}\right), \frac{33}{4}\right)$$

$$V\left(\frac{5}{2}, \frac{33}{4}\right)$$

d. Puntos de corte con el eje x.

$$-x^2 + 5x + 2 = 0$$

Se aplica la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{-2}$$

Expresamos a x con sus valores decimales

$$x_1 = -0{,}37$$
$$x_2 = 5{,}37$$

Corte con el eje y.

Se hace $x = 0$

$$y = -(0)^2 + 5(0) + 2$$
$$y = 2$$

Con los valores calculados se construye una tabla

x	**y**
-0,37	0
5,37	0
2,50	8,25
0	2

Las fracciones fueron expresadas en decimal.

Los pares ordenados se ubican en un sistema de coordenadas cartesianas, cuidando siempre la escala.

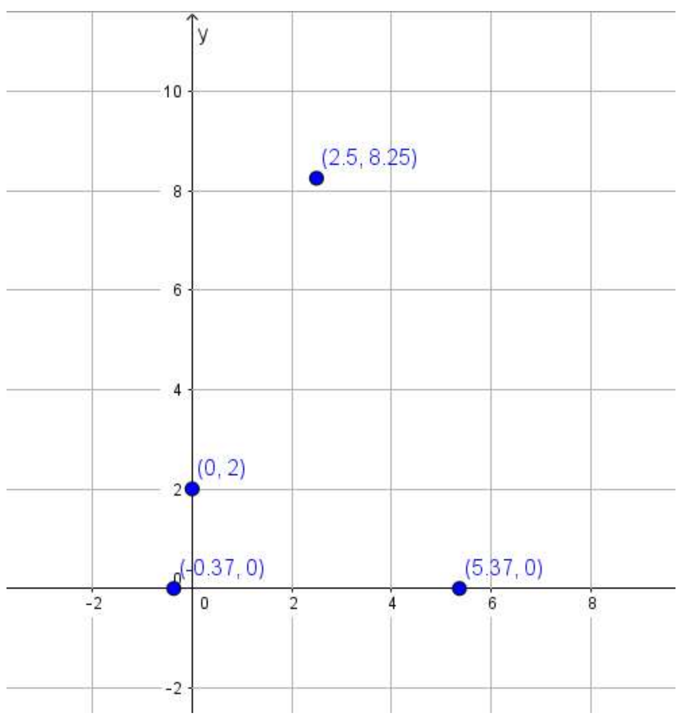


Figura 29: Pares ordenados de f(x)=-x^2+5x+2 ubicados en el sistema de coordenadas cartesianas

Finalmente se unen los puntos, teniendo en cuenta que se trata de una parábola.

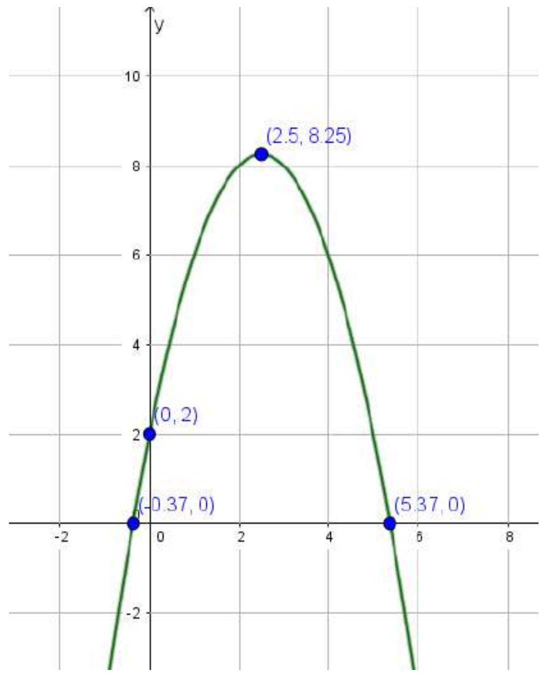


Figura 30: Representación gráfica de la función f(x)=-x^2+5x+2.

Ejemplo

Dada la función

$$g(x) = x^2 + 5x + 10$$

Se pide:

a. Dominio
b. Rango
c. Gráfica

Respuestas

a. El dominio de esta función polinómica es el conjunto conformado por todos los números reales.

$$Dom(g) = \mathbb{R}$$

b. Para calcular el rango se determina primero la coordenada y del vértice de la parábola.

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Los coeficientes de la función son: $a = 1; b = 5; c = 10$

$$y = \frac{4(1)(10) - (5)^2}{4(1)} = \frac{40 - 25}{4} = \frac{15}{4}$$

El coeficiente de x^2 es positivo, por lo tanto la parábola abre hacia arriba.

$$Rgo(g) = \left[\frac{15}{4}, +\infty\right)$$

c. Cálculo de la coordenada x del vértice.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(5)}{2(1)} = -\frac{5}{2}$$

Corte con el eje *x*.

$$x^2 + 5x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 40}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

La ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, por lo tanto la parábola no corta al eje *x*.

Corte con el eje *y*.

$$y = (0)^2 + 5(0) + 10$$

$$y = 10$$

En estos casos, se calculan unas dos imágenes de la función para valores arbitrarios de *x*.

$$Si\ x = 1 \Rightarrow (1)^2 + 5(1) + 10 = 16$$

$$Si\ x = -4 \Rightarrow (-4)^2 + 5(-4) + 10 = 16 - 20 + 10 = 6$$

Se construye una tabla con los valores calculados

x	**y**
$-\frac{5}{2}$	$\frac{15}{4}$
-4	6
1	16
0	10

Se ubica cada par ordenado en un sistema de coordenadas cartesianas, prestando especial atención a la escala de ambos ejes. Luego se unen los puntos con arcos de curva. En este caso se explica cómo construir la gráfica con Geogebra, a partir de los pares ordenados tabulados. En un ejemplo posterior se explica la manera de hacer la gráfica a partir de la regla que define a la función.

- Cargar Geogebra y en ventana emergente seleccionar “Calculadora gráfica”. Asegurarse de que la vista “Barra de entrada” se encuentre activa, de lo contrario activarla en el menú Vista.
- En la barra de entrada escribir

$$A = \left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right) + Enter$$

$$B = (-4, 6) + Enter$$

$$C = (1, 16) + Enter$$

$$D = (0, 10) + Enter$$

Observar que Geogebra coloca cada punto bajo el título Punto, en la vista algebraica y los ubica como tales en la vista gráfica. Puede desplazar la vista gráfica y acercarla o alejarla con el ratón.

- Clic en la sección punto de la vista algebraica para seleccionar todos los puntos. En el área sombreada, presionar el botón derecho del ratón y en la ventana emergente clic en Propiedades, menú Básico. En la ventana Preferencias seleccionar "Valor"

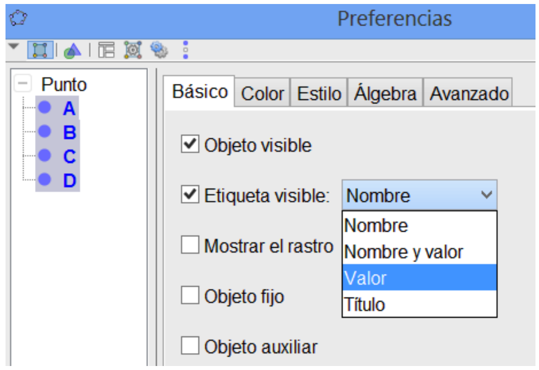


Figura 31: Configuración de los puntos en Geogebra.

- Clic con el botón derecho del ratón en cualquier lugar vacío de la gráfica para activar el menú emergente "Vista gráfica" y hacer clic en vista gráfica situado al final de esa ventana.

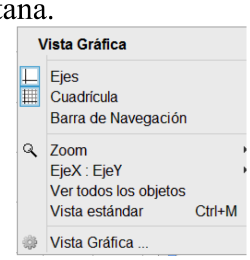


Figura 32: Configuración de la vista gráfica.

- En la pestaña EjeX, Lista desplegable Rótulo seleccionar x. Hacer la misma operación en EjeY. Cerrar la ventana.

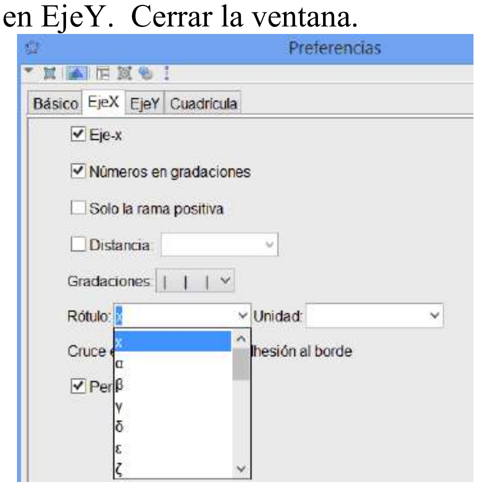


Figura 33: Ventana para configurar lo que se observa en cada eje.

- En la barra de entrada escribir el comando $polinomio$ y en el menú emergente seleccionar la opción que muestra la figura

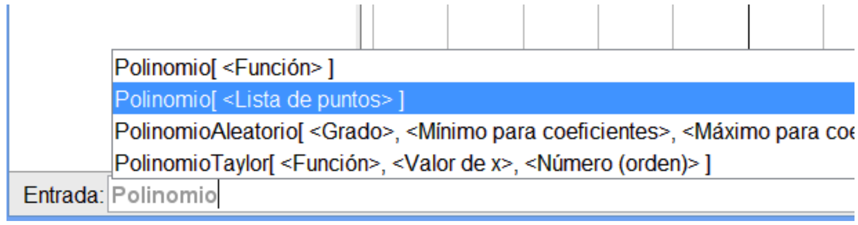


Figura 34: Barra de entrada, transformando la lista de puntos en función

- Escribir a continuación A, B, C, D. El comando completo queda así: $Polinomio[A, B, C, D]$. El software construye la gráfica a partir de la unión de los puntos.

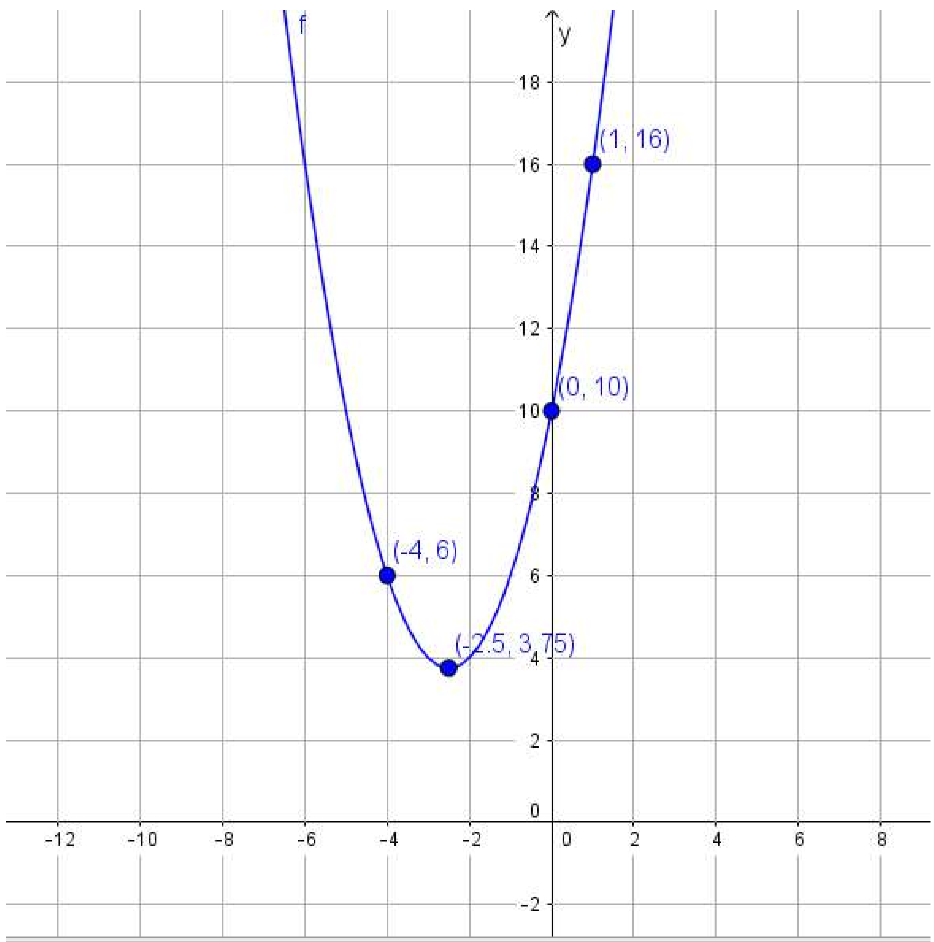


Figura 35: Gráfica de g(x)=x^2+5x+10 construida con Geogebra.

Ejercicios

1. Para cada una de las funciones dadas calcular: (a) Dominio, (b) Rango, (c) Indicar los puntos de corte con los ejes, (d) Construir la gráfica.
    a. $f(x) = 4 - x^2$
    b. $g(x) = 5x^2 + 4$
    c. $h(x) = x^2 + 3x + 5$
    d. $f(x) = \frac{3x^2+7x+3}{4}$
    e. $h(x) = 20 - 10x + 5x^2$
2. Construya la gráfica de la función en el intervalo indicado
    a. $f(x) = 5x^2 + 2x + 4 \ [-6, 6]$
    b. $f(x) = -3x^2 + 4x \ [-2,\ 2]$
    c. $g(x) = \ -3x^2 + 2x + 2 \ [-4, 4]$
    d. $g(x) = \frac{1-3x^2}{3} \quad [-7, -2]$
    e. $h(x) = 12 - 11x + 5x^2 \quad [4,\ 10]$

Funciones racionales

Los ejemplos siguientes corresponden a funciones racionales:

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad f(x) = \frac{3x+4}{x-5} \qquad h(x) = \frac{7x^2-3x+2}{x^2-9}$$

Este tipo de funciones caracteriza por la presencia del cociente de dos funciones polinómicas. En ellas es común la presencia de asíntotas. Una asíntota es una recta hacia la cual se aproxima la curva pero nunca llega a tocarla en lado donde se aproxima. Una función puede tener asíntotas horizontales, asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas. Las asíntotas horizontales tienen ecuación de la forma $y = k$ donde k es cualquier número real; las asíntotas verticales tienen la forma $x = k$; las asíntotas oblicuas tienen la forma:

$$y = mx + b$$

La ecuación de una asíntota vertical se corresponde con el valor que hace cero el denominador de una función racional. La asíntota horizontal existe cuando el grado del denominador es mayor o igual al grado del numerador. Estas asíntotas pueden calcularse a través de las herramientas que nos brinda la teoría de límites y las derivadas, no contempladas en este libro. Sin embargo, programas como Geogebra pueden hacer ese trabajo.

En cuando al dominio, se debe evitar la división entre cero, por lo tanto hay que calcular las raíces del polinomio presente en el denominador para excluir este o estos valores.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = \frac{7}{x}$$

Se pide:

a. Dominio
b. Rango
c. Gráfica

Respuestas

a. Dominio de la función.

Se resuelve la ecuación:$x = 0$, la cual evidentemente ya está resuelta.

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Este dominio también se puede escribir así:

$$Dom(f) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \vee x > 0\}$$

b. Rango de la función. La función nunca es igual a cero. Para valores de x próximos a cero por el lado izquierdo la función toma valores altos negativos, para valores de x próximos a cero por el lado derecho la función toma valores altos positivos. Para valores negativos altos de x la función se aproxima a cero, igual sucede para valores positivos altos de x. Sin embargo, $f(x)$ nunca es igual a cero.

$$Rgo(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

c. La gráfica de la función elaborada con Geogebra.
   - Cargar Geogebra, hacer clic en "calculadora gráfica" en la ventana emergente al cargar el programa o en Vista – vista gráfica en la barra de menú. Asegurarse de que la barra se entrada se encuentra activa, de lo contrario activarla a través del menú vista.
   - En la barra de entrada escribir: $f(x) = 7/x$. Se observa en la vista gráfica la función, la cual puede enfocarse mejor con el ratón.
   - Clic en un lugar vacío de la vista gráfica con el botón derecho del ratón, para activar el menú vista gráfica, hacer clic en la opción vista gráfica.
   - Cambiar el rótulo del eje *x* y del eje *y*, haciendo clic en la pestaña correspondiente de la ventana preferencias de la vista gráfica.
   - Cerrar la ventana preferencias.

   La gráfica de la función es la que se muestra en la Figura 36.

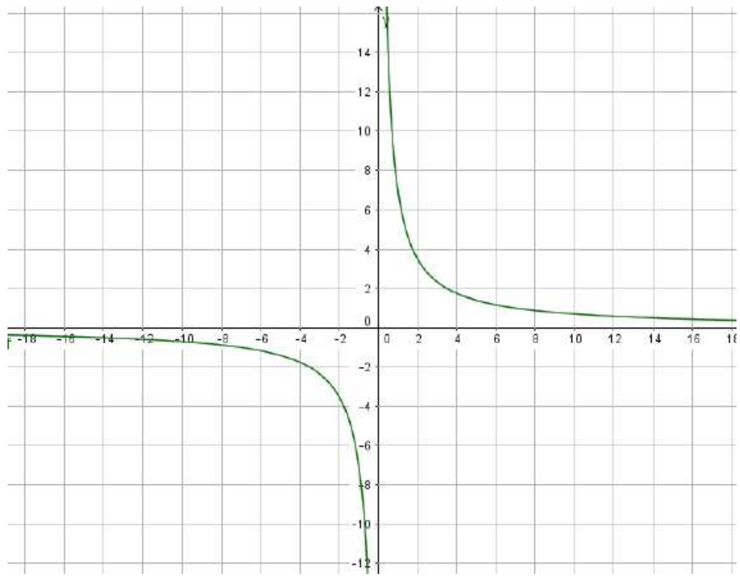


Figura 36: Gráfica de la función f(x)=7/x

Ejemplo

Dada la función

$$h(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 9}$$

Se pide:

a. Dominio
b. Gráfica de la función
c. Rango de la función tomando en cuenta la gráfica

Respuestas

a. Dominio de la función

Se resuelve la ecuación:

$$x^2 - 9 = 0.$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

$$x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$$

$$Dom(h) = \mathbb{R} - \{-3,3\}$$

Este dominio también se escribe de esta forma:

$$Dom(h) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < -3 \vee -3 < x < 3 \vee x > 3\}$$

b. Para la gráfica de la función se usa Geogebra.

- En la barra de entrada escribir:
  $h(x) = (x\text{^}2 + 3x + 2) \ / \ (x\text{^}2 - 9)$

Observar que en la vista gráfica se construye la función y en la vista algebraica se ubica la estructura de la función.

- Para hacer modificaciones en el formato de la gráfica pulsar primero el botón izquierdo del ratón sobre cualquier lugar vacío de la ventana gráfica, inmediatamente pulsar el botón derecho del ratón, eso activa la ventana emergente "Vista gráfica". Hacer que la letra que identifica a cada eje se haga visible. Esto ya ha sido explicado en otras gráficas.
- Hacer clic en la estructura de la función en la vista algebraica. Pulsar el botón derecho del ratón y configurar la etiqueta visible a nombre y valor

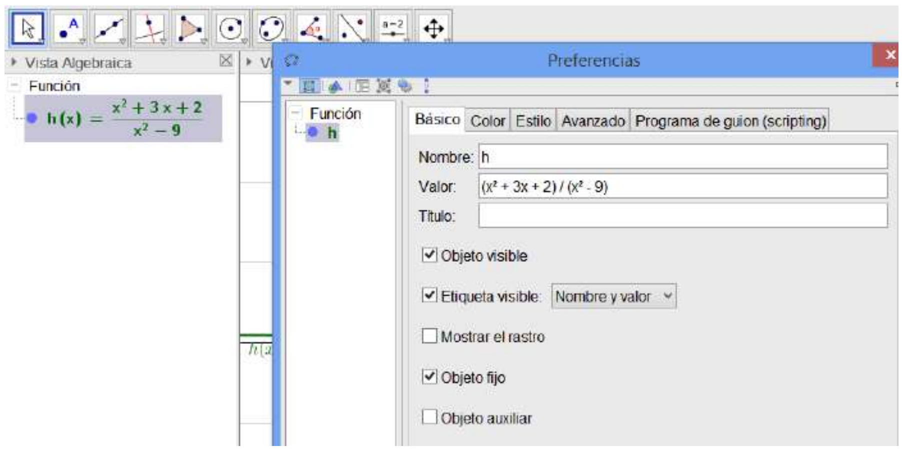


Figura 37: Configuración de la función.

- Cerrar la ventana preferencias y mover la estructura de la función dentro de la vista gráfica a una zona donde sea visible.

La gráfica de la función es la mostrada en la Figura 38.

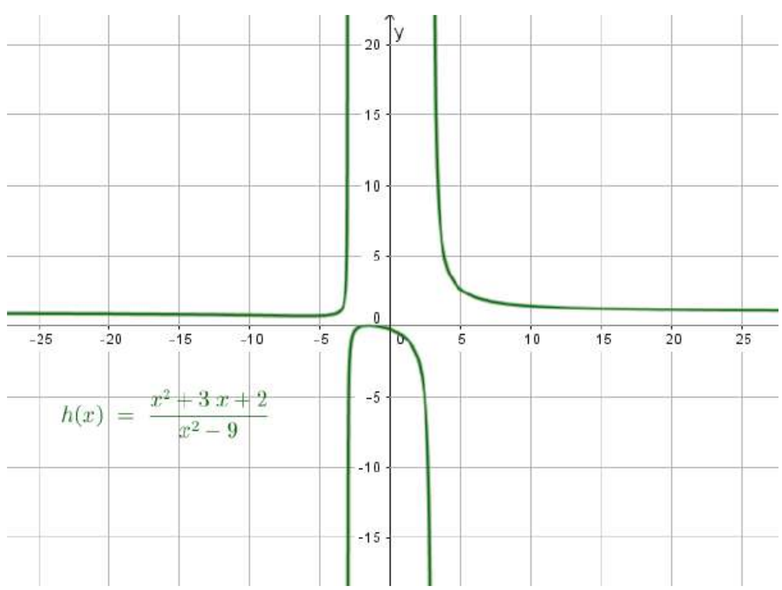


Figura 38: Gráfica de la función h(x)=(x^2+3x+2)/(x^2-9)

c. Rango de la función.

- En la barra de entrada escribir: $asíntota[h(x)]$. Se observa que el programa genera una lista1 en la vista algebraica en la cual muestra tres ecuaciones encerradas en llaves. Además en la vista gráfica coloca tres rectas con líneas a trazos. Esas líneas y sus correspondientes ecuaciones son las asíntotas de la función.
- Hacer clic en lista1 de la vista algebraica con el botón derecho del ratón y cambiar el color a rojo. Repetir esa operación con la función y cambiar el color a azul.
- Hacer zoom con el ratón en el área de la gráfica cercana a la intersección de los ejes. Se observa que parte de la gráfica queda por debajo de la asíntota horizontal en el lado izquierdo. De igual manera la recta toca a la parte de la gráfica comprendida entre las asíntotas verticales. Esto suele suceder para las asíntotas, el comportamiento realmente asintótico de esa recta horizontal es por el lado derecho de la gráfica.
- En la barra de entrada escribir Mínimo y en el menú emergente seleccionar la opción indicada en la Figura 39.

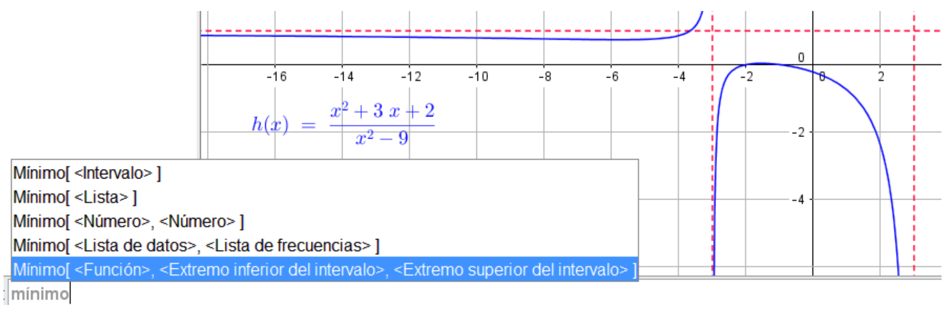


Figura 39: Barra de entrada, comando para obtener el valor máximo de la función en un intervalo.

- Donde dice función escribir h, donde dice Extremo inferior escribir -16, donde dice Extremo superior escribir -3. El comando queda así: $Mínimo[h, -16, -3]$. El programa coloca el punto A sobre la gráfica el cual corresponde al valor mínimo de la función en el intervalo indicado. Las coordenadas aparecen indicadas en la vista algebraica: $A(-5{,}77; 0{,}74)$.
- En la barra de entrada escribir Máximo y en el menú emergente seleccionar la opción indicada en la Figura 40.

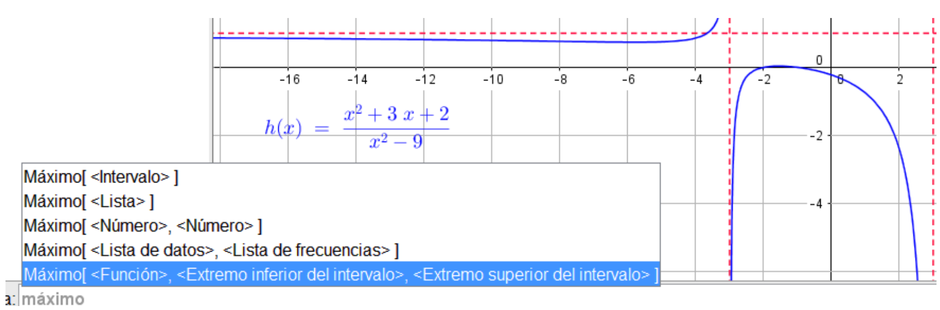


Figura 40: Barra de entrada, comando para obtener el valor mínimo de la función en un intervalo.

- Donde dice función escribir h, donde dice Extremo inferior escribir -3 y donde dice Extremo superior escribir 3. El comando queda así: $Máximo[h, -3,3]$. El software coloca el punto $B(-1,56; 0,04)$ que corresponde al punto más alto de la función en el intervalo indicado.

El rango de la función es:

$(-\infty; 0,04] \cup [0,74; +\infty)$ que se puede escribir así:

$$Rgo(h) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0,04 \vee x \geq 0,74\}$$

La función con sus asíntotas y máximos y mínimos relativos se muestra en la Figura 41.

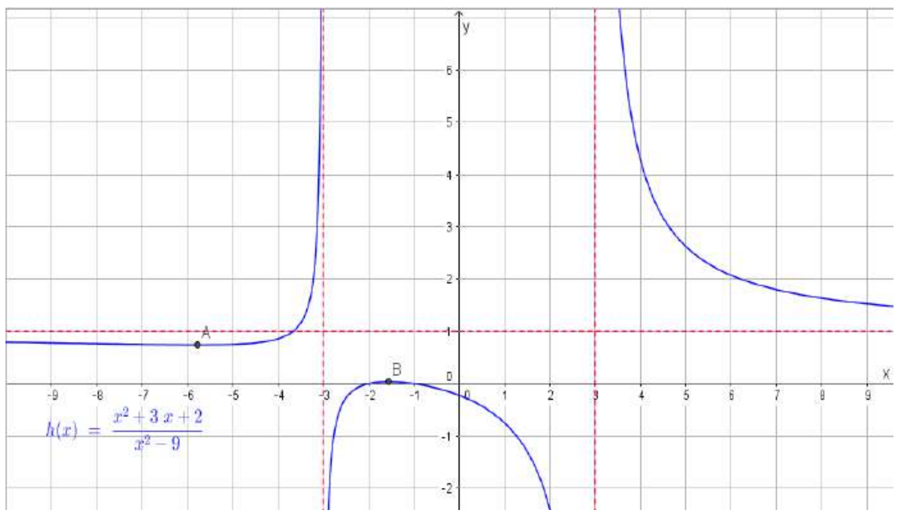


Figura 41: Gráfica de la función h(x)=(x^2+3x+2)/(x^2-9) con sus asíntotas verticales y horizontal.

Ejercicios

1. Para cada una de las funciones siguientes determine: (a) Dominio, (b) Rango, (c) Haga la gráfica de la función a partir de pares ordenados calculados de forma manual.
   a. $f(x) = \frac{3}{x-2}$
   b. $g(x) = \frac{x-5}{x-3}$
   c. $h(x) = 3x + \frac{4}{x}$
   d. $I(x) = \frac{4+x}{x^2-9}$
   e. $J(x) = \frac{7+2x}{5x^2}$
2. Haga la gráfica de la función con la ayuda de Geogebra o wxMaxima e identifique las asíntotas-
   a. $f(x) = \frac{3+x}{3-x}$

b. $g(x) = 6 + \frac{5}{4x}$
c. $h(x) = \frac{5x+1}{x^2-5}$
d. $I(x) = \frac{x-2}{x^3-5}$
e. $J(x) = \frac{10x+5}{4x^4-3}$

Funciones radicales

Los ejemplos siguientes corresponden a funciones radicales:

$f(x) = \sqrt{x} + 3 \qquad g(x) = \sqrt[3]{4x+1} \qquad h(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{6}$

En estas funciones hay que tener en cuenta que las raíces de índice par tienen solución solamente para números mayores o iguales que cero, en caso contrario se entra en el campo de los números imaginarios. Si además la raíz forma parte de una fracción hay que tomar en consideración el hecho de evitar la división entre cero.

Ejemplo

Dada la función

$$g(x) = \sqrt{2x-1}$$

Calcular:
b. Dominio
c. Rango
d. Gráfica

Respuestas

a. Para el cálculo del dominio se resuelve la inecuación $2x - 1 \geq 0$ de donde:

$$2x - 1 + 1 \geq 1$$
$$2x \geq 1$$
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{1}{2}$$
$$x \geq \frac{1}{2}$$
$$Dom(g) = x \geq \frac{1}{2}$$

b. El rango de esta función es conjunto conformado por todos los números reales mayores o iguales que cero.

$$Rgo(g) = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq \frac{1}{2}\right\}$$

c. Para construir la gráfica de la función de forma manual se requiere calcular varias imágenes. Se recomienda que sean al menos tres.

$$Si\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = 0$$
$$Si\ x = 2 \Rightarrow \sqrt{2(2) - 1} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$$
$$Si\ x = 5 \Rightarrow \sqrt{2(5) - 1} = \sqrt{9} = 3$$
$$Si\ x = 7 \Rightarrow \sqrt{2(7) - 1} = \sqrt{13} \cong 3{,}61$$

x	**y**
$\frac{1}{2}$	0
2	1,73
5	3
7	3,61

Con esos pares ordenados, sobre un papel preferiblemente cuadriculado se traza una recta horizontal que actuará como eje *x* y una recta vertical que actuará como eje *y*, con el cuidado de que la escala sea conveniente para abarcar a los puntos a ubicar.

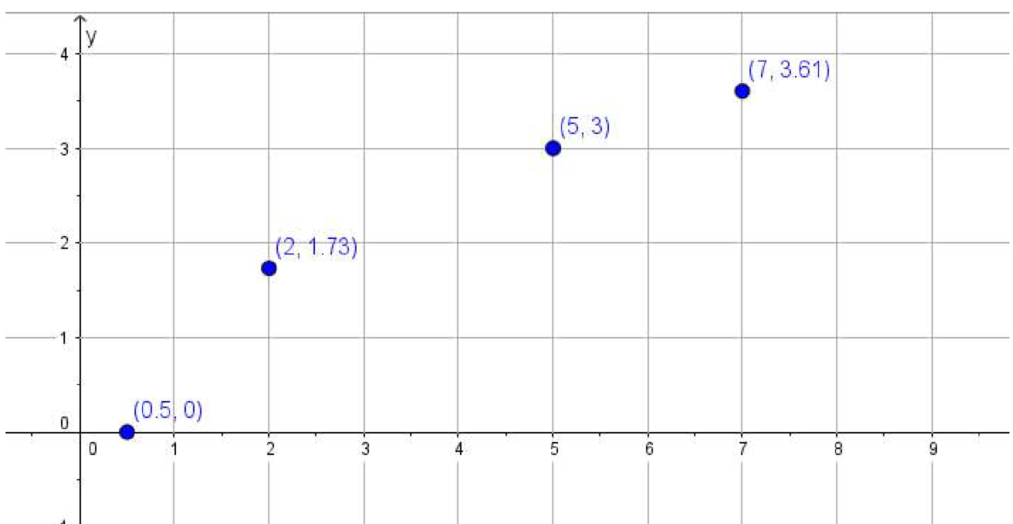


Figura 42: Puntos en el plano de la función g(x)=√(2x-1)

Luego se unen esos puntos considerando que se trata de segmentos curvos. Se tiene así la gráfica de la función, tal como se muestra en la Figura 43.

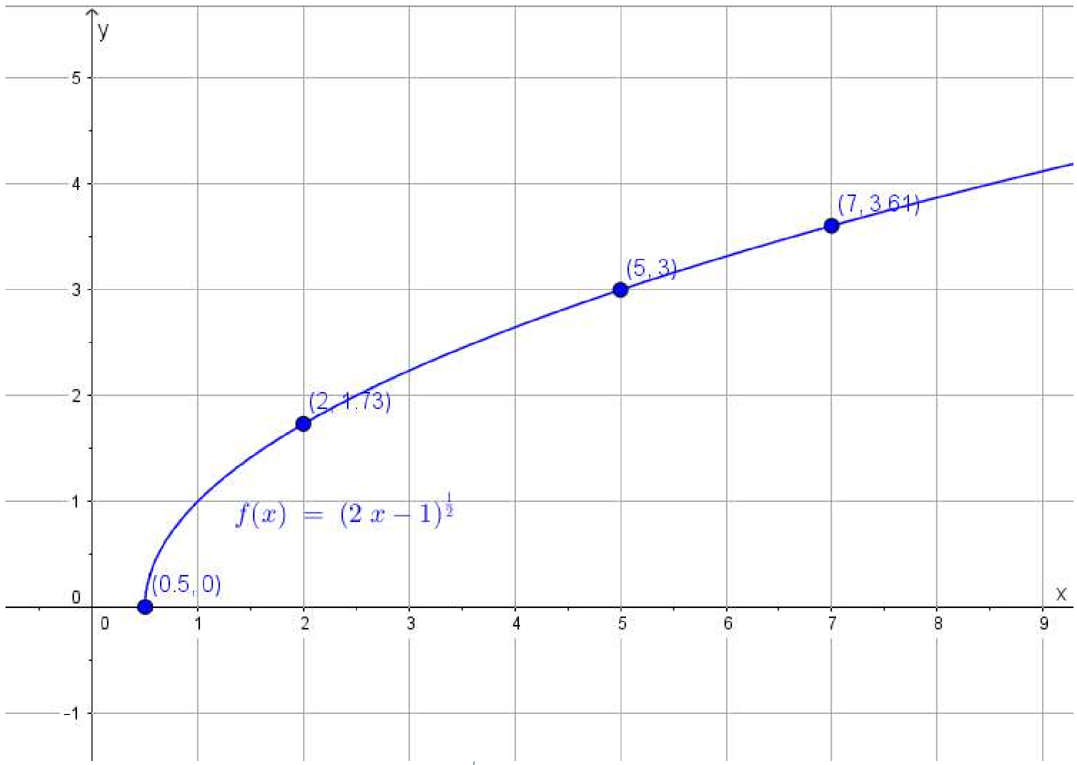


Figura 43: Gráfica de la función g(x)=√(2x-1) elaborada con el soporte de Geogebra.

Ejercicios

1. Dadas las siguientes funciones, clasifíquelas como lineales, cuadráticas, racionales o radicales.
   e. $f(x) = 1 - 3x$
   f. $g(x) = \frac{5}{x} + 2$
   g. $h(x) = x^2 + 6$
   h. $I(x) = \sqrt{3x + 7}$
   i. $J(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5}$
2. Calcule el dominio de cada una de las funciones
   d. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
   e. $g(x) = \sqrt[3]{10 - 3x}$
   f. $h(x) = 4x + \sqrt{2x - 1}$
   g. $I(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{2} + x - 1$
   h. $J(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$

3. Construya la gráfica de la función
   d. $f(x) = \sqrt{10 - x}$
   e. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   f. $h(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$
   g. $I(x) = 3x + \sqrt{x - 2}$
   h. $J(x) = 2 + \sqrt{x - 4} + \sqrt[3]{x + 3}$

Funciones trascendentes

Se trata de funciones cuya regla que las define no es una expresión algebraica.

Funciones exponenciales

Se distinguen porque la variable independiente actúa como exponente. Los ejemplos siguientes corresponden a funciones exponenciales.

$f(x) = 3^x \qquad g(x) = 2e^x \quad h(x) = e^{-5x}$

Generalmente el dominio de este tipo de funciones son todos los números reales, aunque hay que revisar la estructura que contiene a x.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = 3^x$$

Calcule:
a. Dominio
b. Rango
c. Construya la gráfica

Respuestas

a. La variable independiente x puede tomar cualquier valor real, por lo tanto:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b. Esta función nunca es negativa y a medida que x toma valores negativos altos su valor se aproxima a cero. En el caso de que x tome valores positivos altos, la función también va a tener valores altos.

$$Rgo(f) = \mathbb{R}^+$$

c. Para construir de forma manual la gráfica de la función, se calculan imágenes de la función hasta un obtener más de dos puntos. Se recomienda que dentro de esos puntos se incluyan los cortes con los ejes.

$$Si\ x = -4 \Rightarrow y = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = 0{,}01$$
$$Si\ x = 1 \Rightarrow y = 3^1 = 3$$
$$Si\ x = 2 \Rightarrow y = 3^2 = 9$$

Cortes con el eje y: $Si\ x = 0 \Rightarrow y = 3^0 = 1$

Cortes con el eje x: $Si\ y = 0 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow ln(3^3) = ln(0)$, como el logaritmo de cero no existe, la gráfica de la función no corta al eje x.

Con la calculadora científica. Se explica cómo calcular imágenes de funciones exponenciales con la calculadora científica: Por ejemplo si $x = -5$ en la función $f(x)$.

Para elevar 3^{-5}: 

A partir de esos cálculos se construye una tabla con los pares ordenados

x	**y**
-4	0,01
0	1
1	3
2	9

Finalmente, con los pares ordenados ya conformados, se ubican en un Sistema de coordenadas, cuidando siempre la escala en ambos ejes. La gráfica de la función se muestra en la Figura 44.

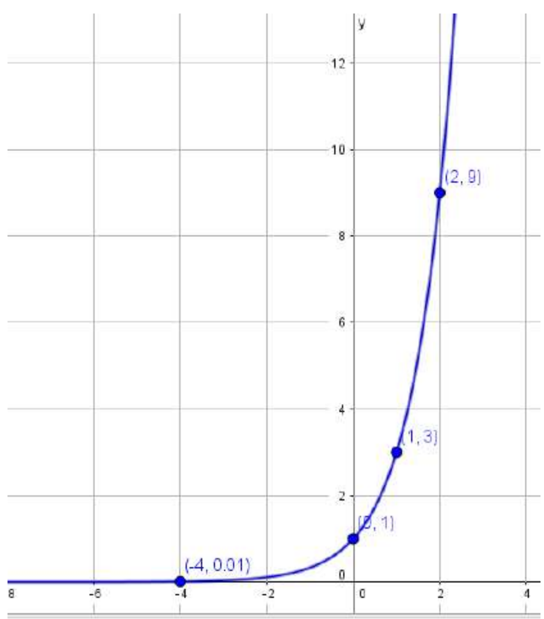


Figura 44: Gráfica de la función f(x)=3^x

Ejemplo

Dada la función

$$h(x) = e^{-5x}$$

Calcular:

a. Dominio
b. Rango
c. Construir la gráfica

Respuestas

a. Es una función exponencial natural. La diferencia con la función $g(x)$ radica en que ante valores negativos de la variable independiente, la función alcanza valores altos, pero ante valores positivos altos de *x*, la función se aproxima a cero. El dominio es el conjunto conformado por todos los números reales.

$$Dom(h) = \mathbb{R}$$

b. El rango de la función exponencial natural el conjunto conformado por los números reales positivos.

$$Rgo(h) = (0, +\infty)$$

c. Se obtienen imágenes de la función para conformar pares ordenados.

$$Si\ x = -1 \Rightarrow y = e^{-5(-1)} = 148{,}41$$
$$Si\ x = -0{,}25 \Rightarrow y = e^{-5(-0{,}25)} = 3{,}49$$
$$Si\ x = 1 \Rightarrow y = e^{-5(1)} = 0{,}007 \cong 0{,}01$$

Cortes con el eje y: $Si\ x = 0 \Rightarrow y = e^{-5(0)} = e^{0} = 1$

Cortes con el eje x: $Si\ y = 0 \Rightarrow e^{-5x} = 0 \Rightarrow ln(e^{-5x}) = ln(0)$, como el logaritmo de cero no existe, la curva que representa a la función no corta al eje x.

Con la calculadora científica: Se explica como hacer estos cálculos con la ayuda de ese dispositivo, por ejemplo $e^{-5(-0{,}5)}$

A partir de los valores calculados se construye la tabla de pares ordenados

x	**y**
-1	148,41
-0,25	3,49
0	1
1	0,01

Luego de ubica cada par ordenado en un sistema de coordenadas cartesiana y se unen los puntos resultantes. Como el primer par tiene una coordenada y muy alejada del resto de los valores, no se considera para efectos gráficos.

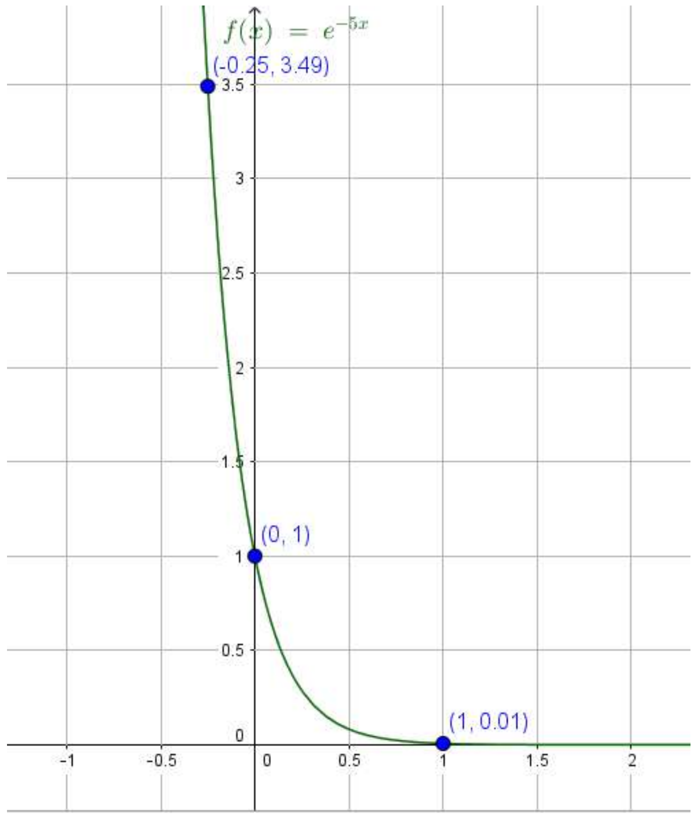


Figura 45: Gráfica de la función h(x)=e^(-5x)

Ejercicios

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = 4^{3x} \quad g(x) = 5 - 6^{x} \quad h(x) = 8 + 2^{-5x+1}$$

Calcular las imágenes siguientes:

d. $f(-1)$
e. $g(0)$
f. $h(-4)$
g. $f\left(\frac{1}{3}\right)$
h. $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. Calcule el dominio y el rango de cada función y construya la gráfica.

   d. $f(x) = -7^{3x}$
   e. $g(x) = 3x + e^{-x+1}$
   f. $h(x) = e^{\frac{x}{4}+2}$
   g. $I(x) = 2x + 5^{3x}$
   h. $J(x) = 4^{-x} + 10$

Funciones logarítmicas

En la regla que define a este tipo de funciones se encuentra presente un logaritmo, cualquiera sea su base.

Se hace un recorrido breve por la idea de logaritmo.

Se define a un logaritmo de un número, como el exponente al que se debe elevar la base para que el resultado sea dicho número.

$$\log_a b = c$$

El logaritmo en base a de b es igual a c. Es equivalente a:

$$a^c = b$$

En esta última expresión c es el exponente al cual está elevada la base b. El resultado de la operación es b.

Por ejemplo, el logaritmo en base 10 de 100 es 2, ya que:

$$10^2 = 100$$

Se escribe $\log_{10} 100 = 2$

Se lee: logaritmo en base diez de cien es igual a dos.

El logaritmo en base 2 de 32 es 6, ya que

$$2^6 = 32$$

Se escribe $\log_2 36 = 6$

Se lee: logaritmo en base dos de treinta y seis es igual a seis.

El logaritmo en base 5 de 125 es 3, ya que

$$5^3 = 125$$

Se escribe $\log_5 125 = 3$

Se lee: logaritmo en base cinco de ciento veinticinco es igual a tres.

El logaritmo en base *e* de 148,41 es aproximadamente 5, ya que

$$e^5 \cong 148{,}41$$

De acuerdo a la escritura normal para logartimos su expresión es $\log_e 148{,}41 \cong 5$, pero este tipo de logaritmos tiene una forma especial de notación:

$$\ln 148{,}41 \cong 5$$

Se lee: logaritmo natural de ciento cuarenta y ocho coma cuarenta y uno es aproximadamente igual a cinco.

Este tipo de logaritmo también se conoce con el nombre de logaritmo neperiano.

El logaritmo en base 10 de 10000 es igual a 4, ya que

$$10^4 = 10000$$

De acuerdo a la manera normal de escribir logaritmos su expresión es $\log_{10} 10000 = 4$, pero este tipo de logaritmo también tiene una forma especial de notación.

$$\log 10000 = 4$$

Se lee: logaritmo decimal de mil es igual a cuatro.

Este tipo de logaritmo tiene varias denominaciones: logaritmo común, logaritmo decimal, logaritmo vulgar, logaritmo de Briggs.

Algunas propiedades importantes de los logaritmos son:

- Logaritmo de cero: $log_a(0) = No\ existe$
- Logaritmo de la unidad: $log_a(1) = 0$
- Logaritmo de la base: $log_a a = 1$
- Logaritmo de un producto: $log_a(xy) = log_a x + log_a y$
- Logaritmo de un cociente: $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
- Logaritmo de una potencia: $log_a(x^y) = ylog_a x$
- Logaritmo de una raíz: $log_a\left(\sqrt[y]{x}\right) = \frac{1}{y} log_a(x)$

Las funciones logarítmicas tienen como regla que las define a un logaritmo de cualquier base, tal como las siguientes:

$f(x) = \log(4x)$ $\qquad g(x) = \ln(x+2)$ $\qquad h(x) = \log_3(x^2 - 5)$

Hay que tener en cuenta que si usted eleva un número real a un exponente negativo el resultado es un número positivo; por lo tanto el logaritmo de un número negativo o de cero no existe, en consecuencia el dominio de estas funciones se obtiene a partir de la consideración que la regla que la define es mayor que cero.

Ejemplo

Dada la función función

$$f(x) = \log(4x)$$

Calcular:

a. Dominio
b. Rango
c. Construir la gráfica

Respuestas

a. Para la determinación del dominio de este logaritmo común se hace

$$4x > 0$$

Aspecto que conduce a $x > 0$

$$Dom(f) = \mathbb{R}^+$$

b. El rango de esta función es

$$Rgo(f) = \mathbb{R}$$

c. Para construir la gráfica se calculan imágenes de la función para conformar así pares ordenados.

$$Si\ x = 0{,}5 \Rightarrow y = log\big(4(0{,}5)\big) = log(2) = 0{,}30$$
$$Si\ x = 1 \Rightarrow y = log\big(4(1)\big) = log(4) = 0{,}60$$
$$Si\ x = 2 \Rightarrow y = log\big(4(2)\big) = log(8) = 0{,}90$$
$$Si\ x = 5 \Rightarrow y = log\big(4(5)\big) = log(20) = 1{,}30$$

x	**y**
0,5	0,30
1	0,60
2	0,90
5	1,30

Con los pares ordenados conformados, se construye un sistema de coordenadas cartesianas y se ubican los puntos correspondientes, al unirlos se tiene la gráfica de la función en el intervalo definido por los valores de x.

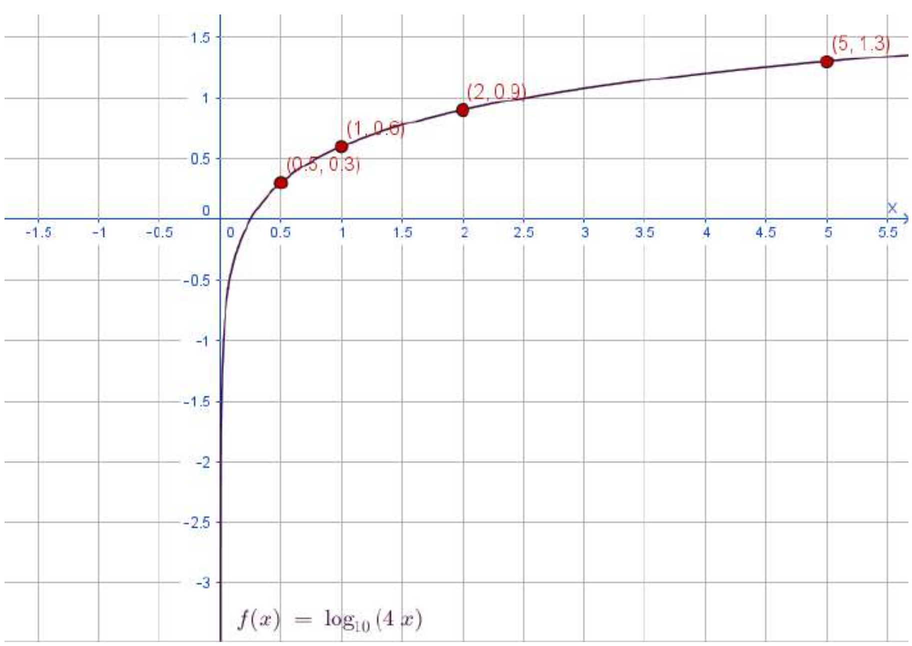


Figura 46: Gráfica de la función f(x)=log(4x)

Ejemplo

Dada la función

$$g(x) = \ln(x + 2)$$

Calcular:

a. Dominio
b. Rango
c. Puntos de corte con los ejes
d. Construir la gráfica.

Respuestas

a. Para calcular el dominio de este logaritmo natura se hace

$$x + 2 > 0$$

Aspecto que conduce a $x > -2$

$$Dom(g) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > -2\}$$

b. El rango de la función es

$$Rgo(g) = \mathbb{R}$$

c. Puntos de corte con los ejes
Cortes eje x:
Se resuelve la ecuación

$$ln(x + 2) = 0$$
$$e^{ln(x+2)} = e^0$$
$$x + 2 = 1$$
$$x = -1$$

Cortes eje y:
Se resuelve la ecuación

$$y = ln(0 + 2)$$
$$y = ln2$$
$$y \cong 0{,}69$$

d. Se deben calcular imágenes para valores arbitrarios de x para de esa forma conformar puntos por donde se traza la gráfica de la función.

$$Si\ x = -1{,}25 \Rightarrow y = ln(-1{,}25 + 2) = ln(0{,}75) = -0{,}29$$
$$Si\ x = 0{,}75 \Rightarrow y = ln(0{,}75 + 2) = ln(2{,}75) = 1{,}01$$
$$Si\ x = 2 \Rightarrow y = ln(2 + 2) = ln(4) = 1{,}39$$
$$Si\ x = 10 \Rightarrow y = ln(10 + 2) = ln(12) = 2{,}48$$

x	**y**
-1,25	-0,29
0,75	1,01
2	1,39
10	2,48

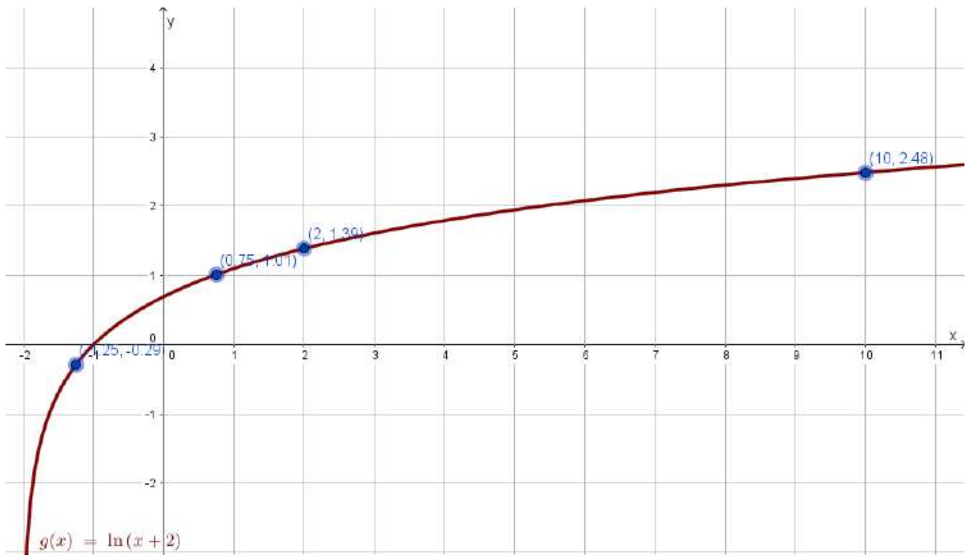


Figura 47: Gráfica de la función g(x)=ln(x+2)

Ejemplo

Dada la función

$$h(x) = \log_3(x^2 - 5)$$

Calcular:

a. Dominio
b. Rango
c. Construir la gráfica

Respuestas

a. Para calcular el dominio de $h(x)$ se hace $x^2 - 5 \geq 0$, la cual es una inecuación de segundo grado que se resuelve aplicando factorización suma por diferencia.

$$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{5} \wedge x = \sqrt{5}$$

Intervalo $(-\infty, -\sqrt{5})$

Valor de prueba: $x = -10 \Longrightarrow (-10)^2 - 5 = 100 - 5 = 95$
Signo del intervalo: positivo

Intervalo $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$
Valor de prueba: $x = 0 \Rightarrow (0)^2 - 5 = -5$
Signo del intervalo: negativo

Intervalo $\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
Valor de prueba: $x = 10 \Rightarrow (10)^2 - 5 = 100 - 5 = 95$
Signo del intervalo: positivo

$$Dom(h) = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}\right\}$$

b. Se trata de una función logarítmica, por lo tanto el rango es el conjunto de los números reales.

$$Rgo(h) = \mathbb{R}$$

c. La construcción de la gráfica de forma manual requiere del cálculo de varios puntos distribuidos antes y después de los puntos de separación que definen a los intervalos que conforman el dominio.

$$Si\ \ x = -10 \Rightarrow y = \log_3((-10)^2 - 5) = \log_3(95) = 4{,}15$$
$$Si\ x = -5 \Rightarrow y = \log_3((-5)^2 - 5) = \log_3(20) = 2{,}73$$
$$Si\ x = -3 \Rightarrow y = \log_3((-3)^2 - 5) = \log_3(4) = 1{,}26$$
$$Si\ x = -2{,}5 \Rightarrow y = \log_3((-2{,}5)^2 - 5) = \log_3(1{,}25) = 0{,}20$$
$$Si\ x = 2{,}25 \Rightarrow y = \log_3((2{,}25)^2 - 5) = \log_3(0{,}06) = -2{,}56$$
$$Si\ x = 4 \Rightarrow y = \log_3((4)^2 - 5) = \log_3(11) = 2\,,18$$
$$Si\ x = 9 \Rightarrow y = \log_3((9)^2 - 5) = \log_3(76) = 3{,}94$$

x	**y**
-10	4,15
-5	2,73
-3	1,26
-2,5	0,20
2,25	-2,56
4	2,18
9	3,94

En un sistema de coordenadas cartesianas se ubican esos pares ordenados y se traza la curva de la función. En la Figura 48, se muestra el resultado elaborado con la ayuda del programa Geogebra.

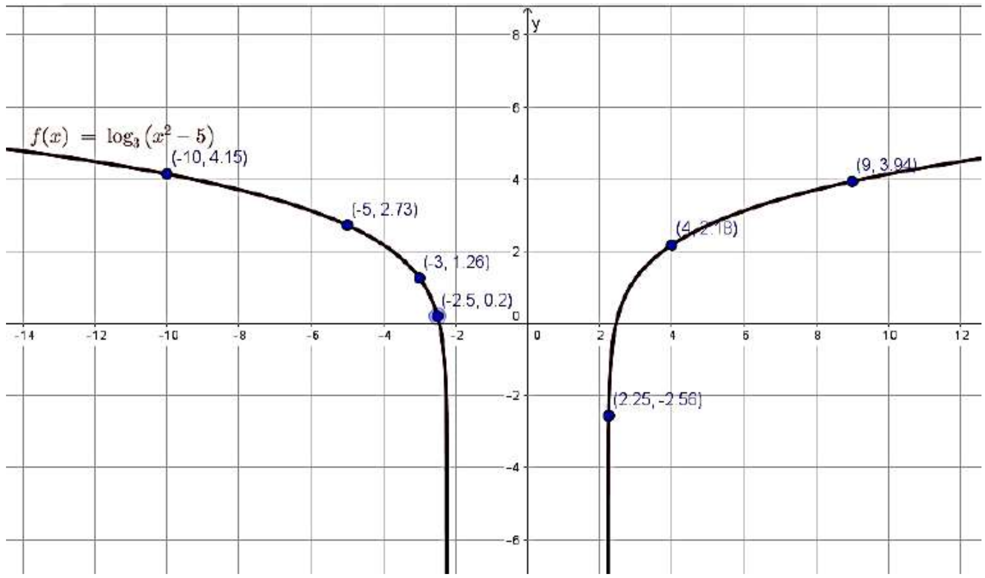


Figura 48: Gráfica de la función h(x)= $log_3(x^2 - 5)$

Ejercicios

1. Dadas las funciones siguientes:

   $f(x) = 5 + ln(3x)$ $\quad g(x) = \log_5(10x - 4)$ $\quad h(x) = log(3x - 2)$

   Calcular:
   a. $f\left(\frac{1}{3}\right)$
   b. $g(1)$
   c. $h(1)$
   d. $h(4)$
   e. $g\left(\frac{1}{2}\right)$
2. Los puntos de corte de una función con el eje *x* se obtienen haciendo *y=0*; los puntos de corte de una función con el eje *y* se obtienen haciendo *x=0*. Calcule los puntos de corte con los ejes de las funciones.
   a. $f(x) = ln(x + 5)$
   b. $h(x) = log(3x + 2)$
   c. $j(x) = log(1 - 3x)$
   d. $k(x) = ln(4 - x)$
   e. $m(x) = log(x - 4)$
3. Calcula el dominio de cada función y construya la gráfica.
   a. $f(x) = \log_3(x + 3)$
   b. $g(x) = \log_5(4 - 2x)$
   c. $h(x) = ln\left(\frac{10x-7}{3}\right)$
   d. $I(x) = \log_7(5x^3 + 6)$
   e. $J(x) = log(x^2 + 5x - 4)$

Funciones trigonométricas

Son funciones muy importantes en las ciencias, sobre todo en las físicas ya que son la base para el estudio de movimientos circulares, periódicos y ondulatorios.

Las definiciones más comunes de este tipo de funciones involucran al triángulo rectángulo y a un círculo de radio igual a la unidad, existiendo la limitante en el primer caso de tener un dominio comprendido solamente entre los cero grados y los noventa grados.

Funciones trigonométricas a partir del triángulo rectángulo.

Se toma en cuenta los catetos, la hipotenusa y los ángulos internos de este tipo de triángulos, uno de los cuales mide siempre 90° y es el que está opuesto al lado más largo que se denomina hipotenusa.

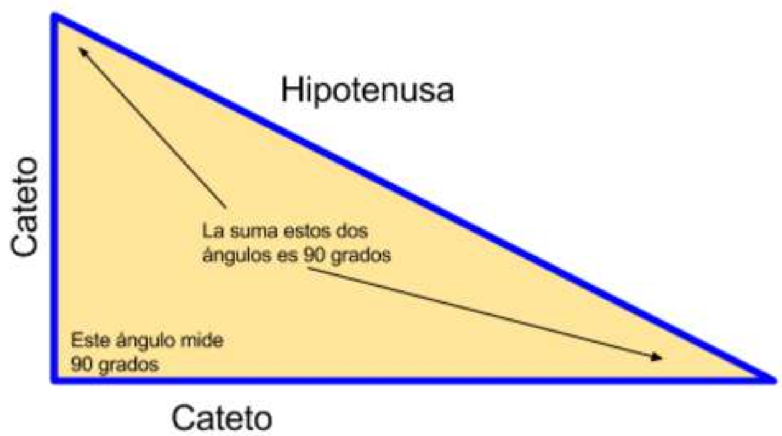


Figura 49: Denominación de los lados de un triángulo rectángulo.

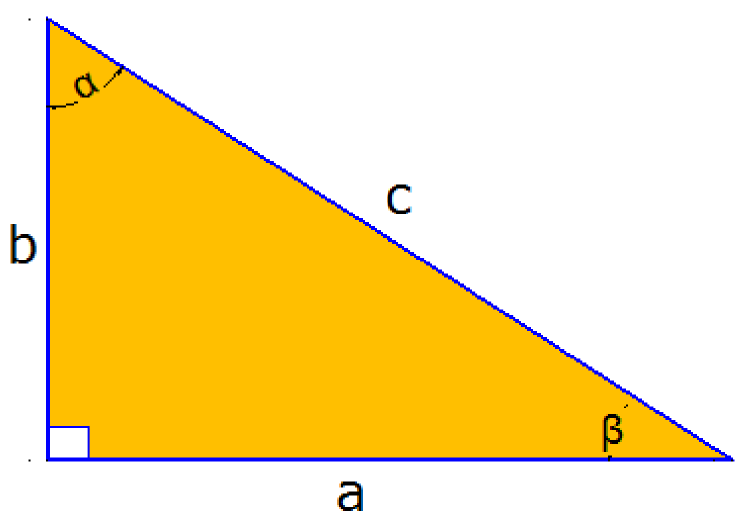


Figura 50: Lados y ángulos en un triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo como el de la Figura 50 las funciones trigonométricas están definidas por la relación entre los lados de la siguiente manera:

$$sen\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad cot\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad sec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$tan\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{a}{b} \qquad csc\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto} = \frac{c}{a}$$

Dichas funciones trigonométricas se leen así:

$$sen\alpha = seno\ de\ alfa$$
$$cos\alpha = coseno\ de\ alfa$$
$$tan\alpha = tangente\ de\ alfa$$
$$cot\alpha = cotangente\ de\ alfa$$
$$sec\alpha = secante\ de\ alfa$$
$$csc\alpha = cosecante\ de\ alfa$$

Se observa que existen funciones inversas entre sí:

$$sen\alpha = \frac{1}{csc\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha}$$

$$tan\alpha = \frac{1}{cot\alpha}$$

El inconveniente para esta concepción de las funciones trigonométricas es que los ángulos α y β del triángulo rectángulo nunca son mayores que 90°, de tal forma que el dominio está comprendido entre 0° y 90°.

Funciones trigonométricas a partir de un círculo de radio igual a la unidad. Para superar la limitación del dominio de las funciones trigonométricas definidas a partir del triángulo rectángulo, se considera que la recta real “gira” de forma indefinida conformando un círculo de radio 1 y centro en un sistema de coordenadas cartesianas.

Cualquier punto que pertenece al círculo tiene una coordenada en el eje x y otra en el eje y; también ese punto que llamaremos P conforma un ángulo α a partir de la parte positiva del eje x en el sentido contrario a la agujas de un reloj. Dicho ángulo generalmente se expresa en radianes.

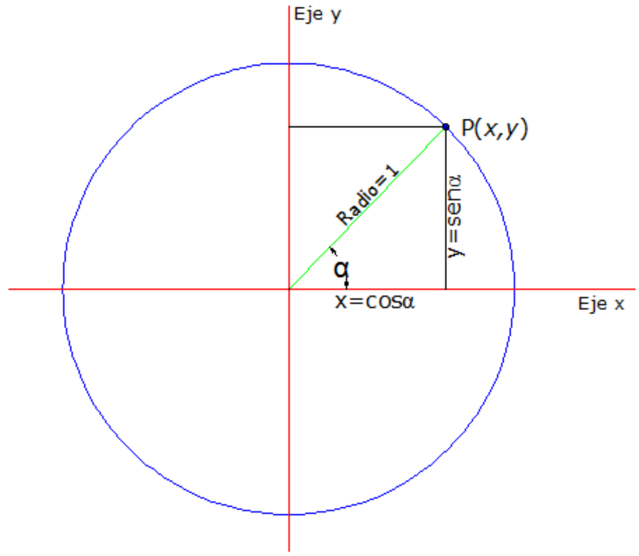


Figura 51: Circunferencia de radio unitario a partir de la cual se pueden formar las funciones trigonométricas.

Se observa en la Figura 51 que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

La cual es una identidad trigonométrica fundamental.

Un radián es el cociente entre el arco que describe la longitud del radio de una circunferencia y su radio. Es la unidad básica para ángulos planos en el sistema internacional de unidades, se abrevia rad.

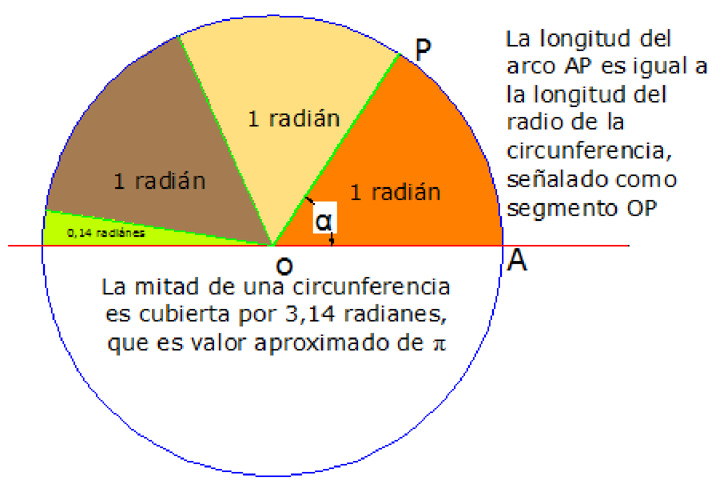


Figura 52: La mitad de una circunferencia cubre aproximadamente 3,14 radianes.

Según lo señalado en la Figura, $\pi\ rad = 180°$, de allí que $1\ rad = \frac{180°}{\pi} \cong 57{,}3°$.
Algunos ángulos usados frecuentemente son:

Angulo en radianes	**Angulo en grados**
$\pi/6$	$30°$
$\pi/4$	$45°$
$\pi/3$	$60°$
$\pi/2$	$90°$
$3/4\,\pi$	$135°$
π	$180°$
$3/2\,\pi$	$270°$
2π	360

Un giro completo equivale a 2π radianes; 6π radianes equivalen a tres giros completos a la circunferencia y en general *n* cantidad de giros es $2\pi n$.

Para convertir un ángulo expresado en radianes a grados sexagesimales se multiplica por 57,3. Por ejemplo 1,45 radianes a grados es:

$$1{,}45\,rad * \frac{57{,}3°}{1\,rad} = 83{,}09° = 83°5'6"$$

Se lee: ochenta y tres grados, cinco minutos, seis segundos.

Para convertir un ángulo expresado en grados sexagesimales a radianes, se divide entre 57,3. Por ejemplo $122°$ expresados en radianes.

$$122° * \frac{1\,rad}{57{,}3°} = 2{,}13\,radianes$$

Función seno. Esta función se denota como:

$$f(x) = sen(x)$$

Donde *x* es el ángulo, el cual a menos que se diga lo contrario está expresado en radianes. El dominio de esta función son todos los números reales. El rango, con la estructura básica está comprendido entre -1 y 1.

La gráfica de esta función se puede construir manualmente o con software. Construiremos en primer lugar una tabla con algunos pares ordenados; luego se trabajará con Geogebra.

El eje de las *x* corresponde al ángulo y el eje de las *y* al valor de la función.

Para la conformación de los pares ordenados lo normal es que se utilice una calculadora científica, con la cual se debe tener el cuidado de que esté configurada para trabajar en el modo RAD (radián) o en el modo DEG (grados sexagesimales), dependiendo si el ángulo está expresado en una o en otra unidad. Otro modo presente en la mayoría de las calculadoras científicas es GRA (Grado centesimal o gon, también llamado gradián), este último modo no se usa en las ciencias sociales y el estudiante debe tener el cuidado de no confundirlo con los grados sexagesimales.

Para trabajar en modo radianes:

Se presiona 

+ 

Se presiona 

Una vez en modo RAD se calcula el valor del seno de la función, por ejemplo:

Para obtener el valor de $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$ la secuencia de pulsaciones de teclas en la calculadora es:

*+cursor en el denominador+**+cursor en parte derecha de la fracción+*

La respuesta es: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o en decimal: 0,707

Otros valores muy comunes usados en la función $seno(x)$ son los que se dan a continuación.

x	$\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
2π	0

Se observa en la tabla que el valor de la función $senx$ tiene un mínimo de 0 y un máximo de 1. Una vuelta completa a la circunferencia equivale a 2π posición donde la función toma de nuevo el valor inicial, a partir de allí comienza un nuevo ciclo. Veamos esto en la gráfica de la función construida con Geogebra.

Construcción de la gráfica de la función seno con Geogebra.

- Seleccionar la opción vista gráfica
- En el menú Vista, activar la barra de entrada si no está activa
- En la barra de entrada (ubicada al final de la ventana) escribir la estructura de la función de esta forma: $f(x) \coloneqq sen(x)$. Observar que Geogebra construye la función en la vista gráfica

- Clic con el botón derecho del ratón en cualquier espacio vacío de la vista gráfica. En el menú emergente hacer clic en "vista gráfica" ubicado al final de esa ventana.
- Asegurar que la ventana preferencias tenga la forma que se muestra en la Figura 53 y luego cerrar esa ventana.

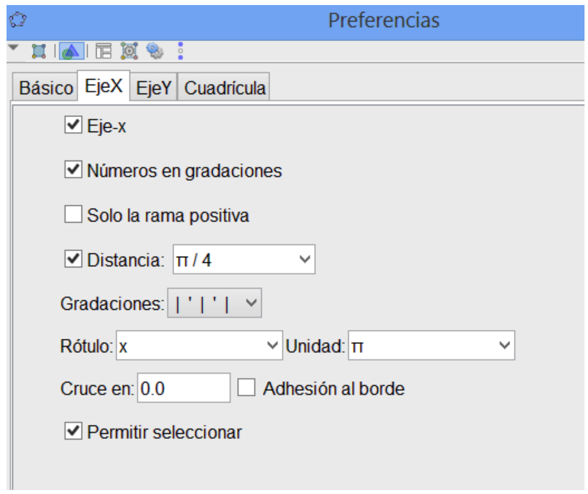


Figura 53: Configuración de los ejes para la representación gráfica de la función sen(x).

- Desplazar la vista gráfica, haciendo clic en el botón"Desplaza vista gráfica" ubicado en la parte superior de la ventana.
- Ya se tiene la gráfica de la función, con el eje x dividido en cuartas partes de π.

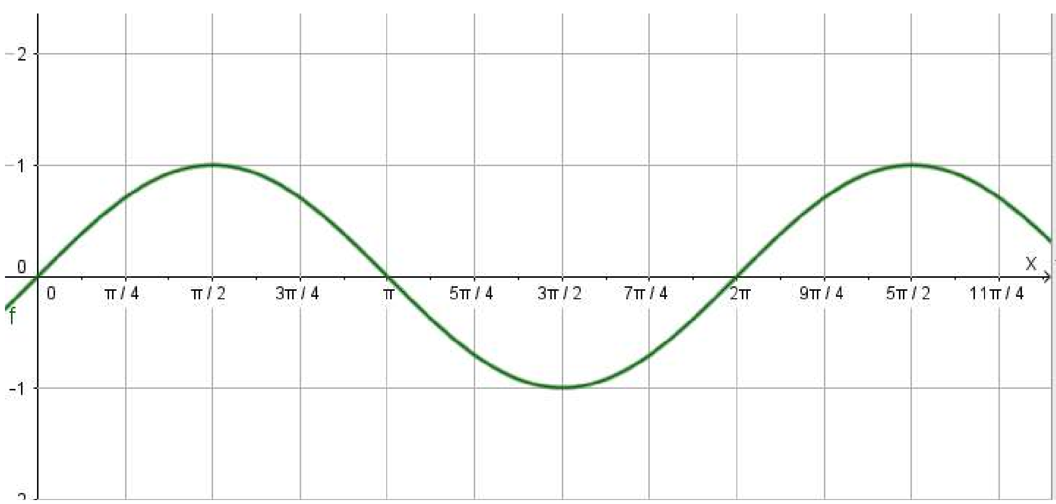
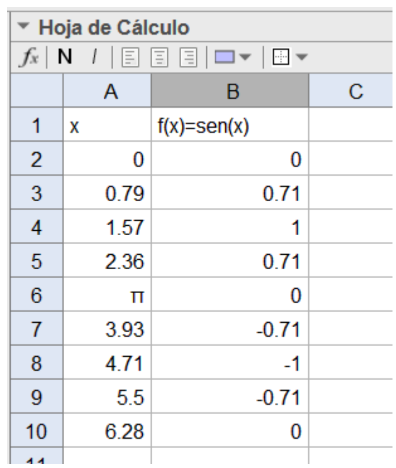


Figura 54: Gráfica de la función seno(x).

- Es posible ubicar puntos de la gráfica. En el menú Vista hacer clic en Hoja de cálculo, o arrastrar el margen izquierdo para tener acceso a por lo menos las tres primeras columnas de la hoja.

- En la celda A1 escribir "x" y en la celda B1 escribir "f(x)="+f. Luego de pulsar Enter. Se observa que el programa coloca la estructura de la función f(x) en vez de f.
- Comenzar con un punto característico de la gráfica, tal como el punto donde $x = 0$; para ello escribir en la celda A2 el valor 0.
- En la celda A3 escribir: $= A2 + (\pi/4)$, para hacer incrementos de un cuarto de Pi. La letra Pi se genera haciendo clic en el menú Vista y activando el teclado.
- Con el cursor en la celda A3 hacer clic en la esquina inferior derecha hasta que éste adopte la forma del signo más. Arrastrar hasta la celda A10.
- Colocar el cursor en la celda A2 y escribir $= f(A2)$. Pulsar Enter
- Con el cursor en A2 hacer clic en la esquina inferior derecha hasta que adopte la forma del signo más y arrastrar hasta la celda B10. Al finalizar se tienen estos resultados.



	A	B	C
1	x	f(x)=sen(x)	
2	0	0	
3	0.79	0.71	
4	1.57	1	
5	2.36	0.71	
6	π	0	
7	3.93	-0.71	
8	4.71	-1	
9	5.5	-0.71	
10	6.28	0	

Figura 55: Hoja de cálculo de *Geogebra aplicada a la tabulación de la función seno(x).*

- Para que esta tabla aparezca junto a la gráfica de la función, se debe hacer clic en la celda A1 y arrastrar hasta la celda B10, luego botón derecho del ratón y crea – tabla. La tabla se ubica en la vista gráfica y puede ser desplazada con el ratón.
- Con el mismo sombreado anterior, hacer clic con el botón derecho del ratón – crea – lista de puntos. El programa crea la lista en la vista algebraica y los ubica en la vista gráfica.
- Arrastrar la tabla de la vista gráfica hasta una zona donde no interfiera con la gráfica y cerrar o arrastrar hacia la izquierda la vista hoja de cálculo
- Clic sobre la curva con el botón derecho y en la ventana Preferencias, cambiar el color a azul, el grosor del trazo a 5 y hacer visible el nombre y el valor. El resultado se muestra en la Figura.

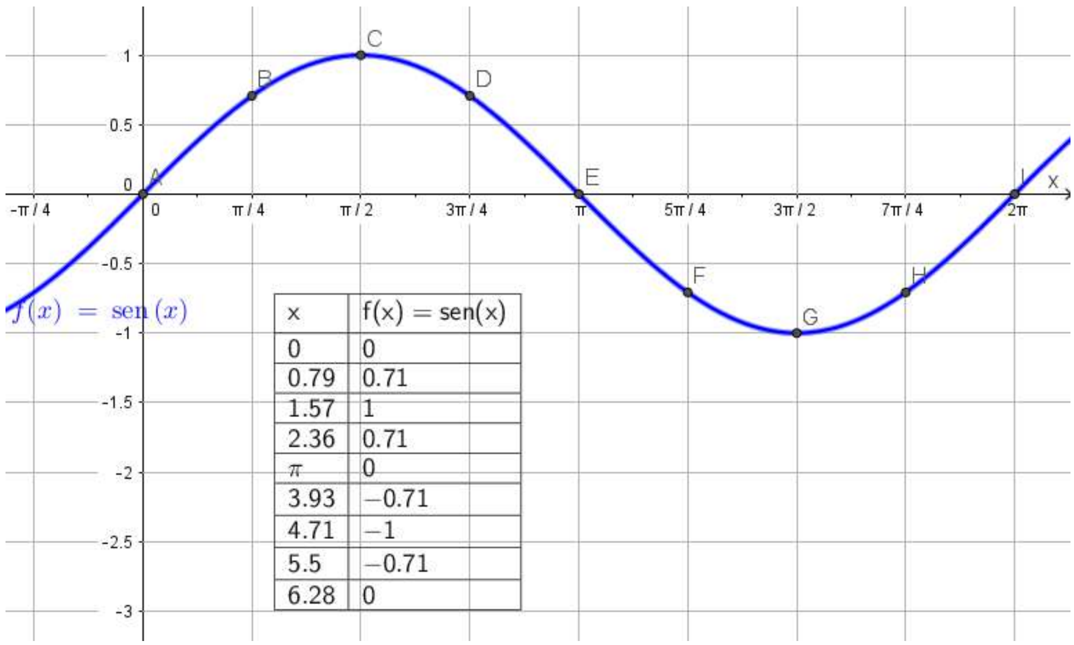


Figura 56: Gráfica de la función f(x)=seno(x), con tabla de pares ordenados.

Función coseno. Esta función se denota como:

$$f(x) = \cos(x)$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales y el rango de la estructura básica es el intervalo $[-1,1]$.

La tabla de los pares ordenados más comunes de esta función se puede construir con la calculadora, de acuerdo con las instrucciones indicadas para la función seno. A partir de esos pares ordenados, se elabora manualmente la gráfica de esta función.

x	$\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
2π	1

Construcción de la gráfica de la función coseno con Geogebra.

- Escribir en la barra de entrada $f(x) = \cos(x)$.

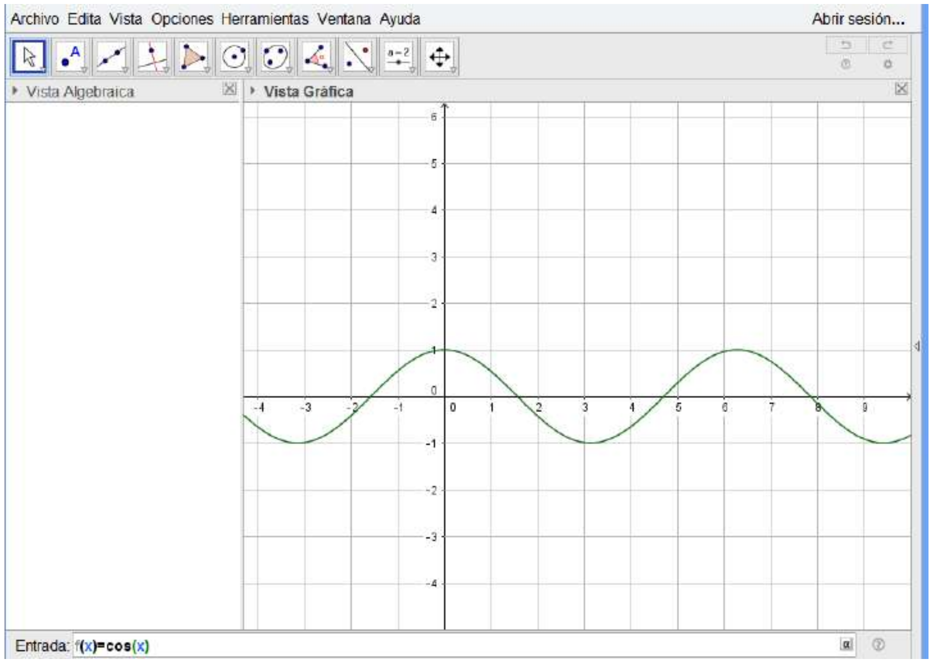


Figura 57: Gráfica de la función f(x)=cos(x)

El software genera la gráfica de la función coseno, en la cual aún es posible realizar cambios en su formato y añadirle puntos para que se asemeje a la forma en que se realiza la construcción manual de la gráfica.

- Clic en Vista – Hoja de cálculo.
- En la celda A1 escribir "x" y en la celda B1 escribir "f(x)="+f. Escribir las comillas tal como está acá, ya que de lo contrario el software asumirá que se está ingresando una nueva función.
- En la celda A2 escribir 0. En la celda A3 escribir la fórmula $= A2 + \pi/2$ con la idea de realizar incrementos de 90 grados.
- Arrastrar el cursor desde A3 hasta A10.
- En la celda B2 escribir $= f(A2)$ y arrastrar hasta la celda B10.
- Sombrear con el ratón las celdas A2:A10, clic con el botón derecho, en la ventana emergente clic en Propiedades, clic en la pestaña Algebra y activar la casilla Simbólico. Cerrar la ventana.
- Sombrear las celdas A1:B10, clic con el botón derecho sobre el sombreado y luego en la ventana emergente en crea – tabla. Acaba de crear una tabla que se ubica en la vista gráfica y que puede ser desplazada con el ratón. Clic sobre la tabla, botón derecho – propiedades – Algebra y activar la casilla Simbólico.
- Con el mismo sombreado, clic con el botón derecho del ratón, crea – lista de puntos. El programa genera los pares ordenados en la vista algebraica y coloca los puntos sobre la gráfica.

- Clic con el botón derecho del ratón en cualquier zona vacía de la vista gráfica, en la ventana emergente hacer clic en vista gráfica, tal como se muestra en la Figura 58.

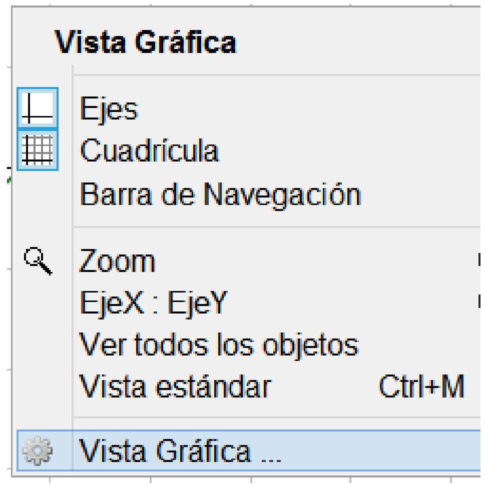


Figura 58: Mediante la ventana vista gráfica se configuran las preferencias básicas y de los ejes.

- Clic en la pestaña Eje x y asegurarse que los datos de la ventana se asemejen a los indicados en la figura.

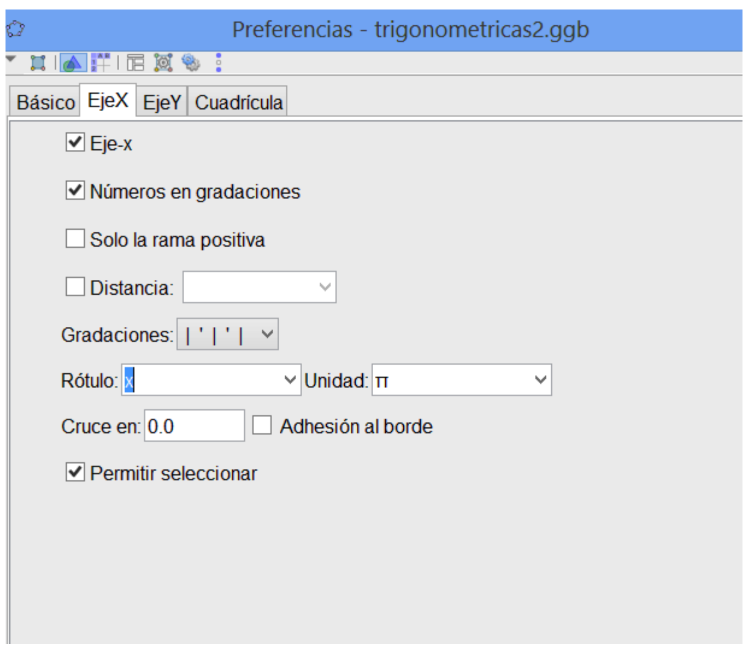


Figura 59: Opción para que la letra que identifica al eje se muestre en la gráfica.

De esa forma se tiene la gráfica mostrada en la Figura, donde se señalan además puntos que pertenecen a la función, los cuales representan los valores más altos o más bajos y los cortes tanto con el eje x como con el eje y. Observar que la función alterna entre la parte positiva y la parte negativa de y, un ciclo completo se logra desde el punto D al punto H.

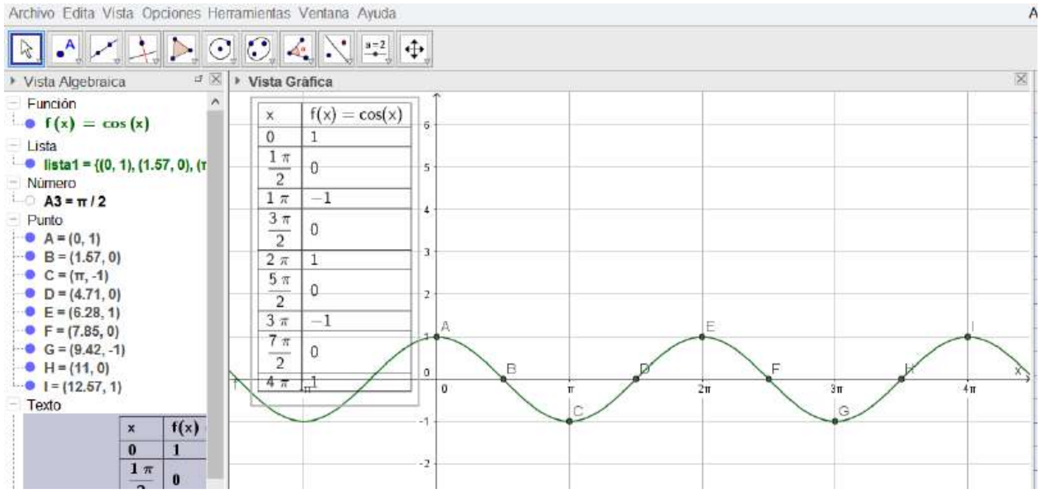


Figura 60: Gráfica de la función f(x)=cos(x) con su tabla de pares ordenados.

Función tangente.

Esta función se denota como:

$$\mathrm{f}(x) = \tan(x)$$

Al ser un cociente entre la función $sen(x)$ y la función $cos(x)$, se debe evitar la división entre cero, la cual se produce, para la estructura básica, en valores de $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ donde k es un número entero.

El rango de esta función es el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Previo a la presencia de los recursos informáticos actualmente disponibles, la construcción de la gráfica se hacía a partir del cálculo de algunos pares ordenados. En la tabla siguiente se realiza este proceso con la ayuda de la calculadora. La gráfica se construirá con la ayuda de software.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = tan(x)}$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	∞
$3\pi/4$	-1
π	0
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	∞
$7\pi/4$	-1
2π	0

Construcción de la gráfica de la función tangente con Geogebra.

El procedimiento ya ha sido explicado para la función seno y la función coseno. La gráfica que se genera puede ser editada en elementos relacionados con su formato.

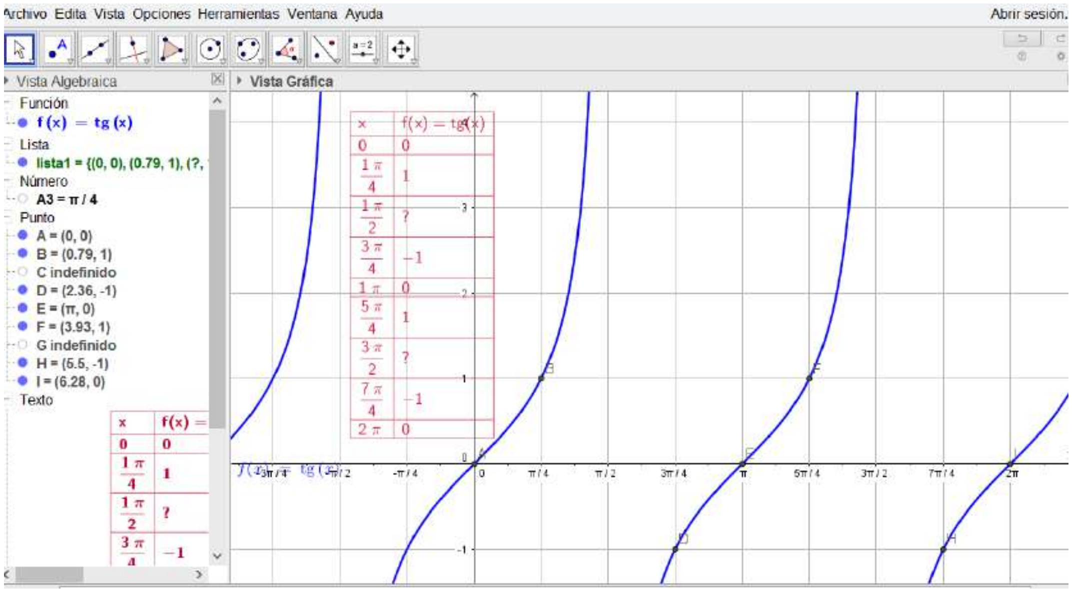


Figura 61: Gráfica de la función f(x)=tan(x)

Función cotangente.

Esta función se denota por:

$$f(x) = \cot(x)$$

Se define como el cociente de la función $sen(x)$ entre la función $sen(x)$ en consecuencia cuando $sen(x) = 0$ la expresión se torna indeterminada. En general, el dominio contiene a todos los números reales excepto $k\pi$ donde k es un número entero. El rango son todos los números reales.

Con la ayuda de la calculadora científica, se puede construir una tabla de pares ordenados, los cuales son el punto de partida para la construcción de la gráfica de función de forma manual.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = cot(x)}$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	∞
$3\pi/4$	-1
π	0
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	∞
$7\pi/4$	-1
2π	0

Gráfica de la función cotangente con Geogebra.

Tomando en cuenta lo explicado para las funciones trigonométricas previas, Geogebra genera una gráfica de la función la cual es rica en detalles y puede ser formateada a gusto del usuario.

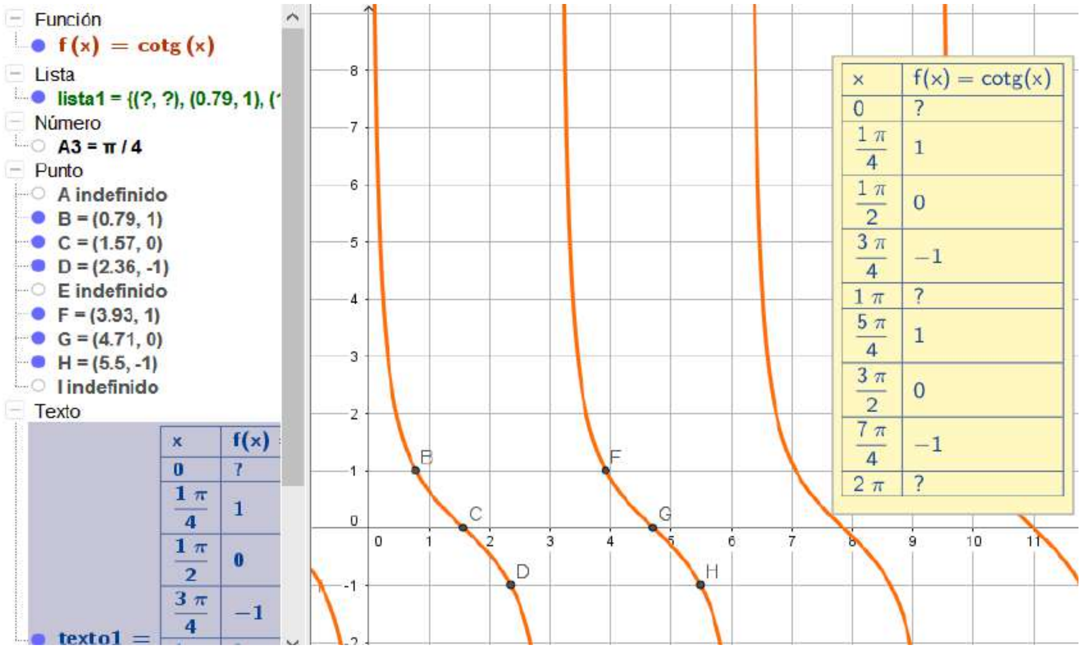


Figura 62: Gráfica de la función f(x)=ctg(x).

Función secante.

Esta función se denota mediante la expresión:

$$f(x) = csc(x)$$

Se define como $1/cos(x)$, en consecuencia el dominio son todos aquellos números reales en los cuales la función $f(x) = cos(x)$ es diferente de cero. Es decir todos los reales menos $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ donde k es un número entero. El rango son todos los números reales menos el intervalo $(-1,1)$.

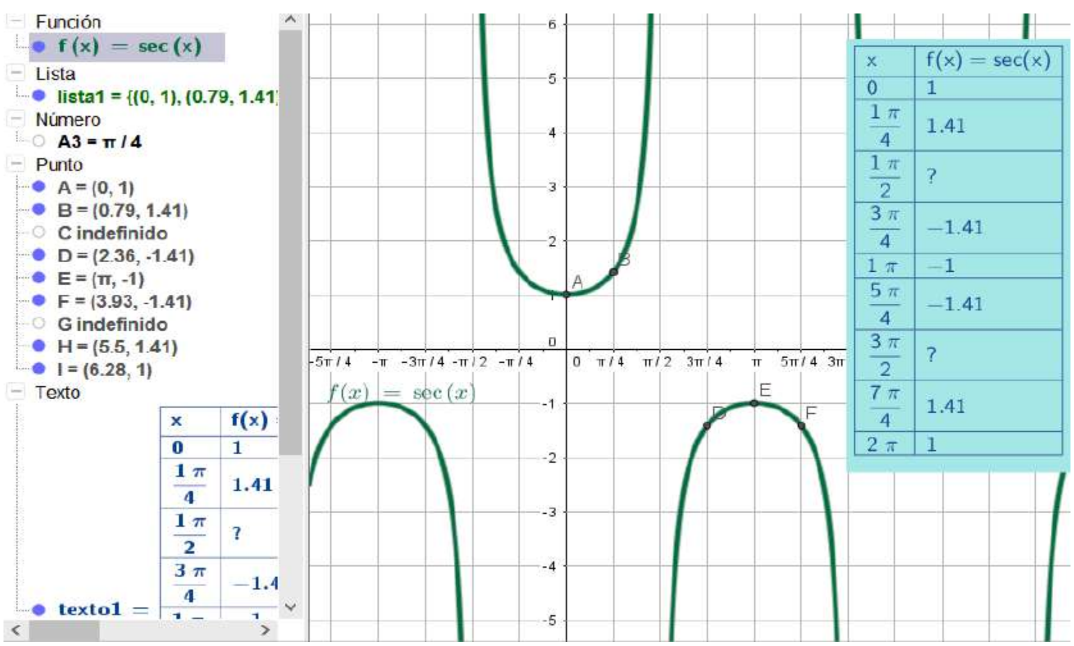


Figura 63: Gráfica de la función f(x)=sec(x).

Función cosecante. Esta función se denota por:

$$f(x) = csc(x)$$

Se define como $1/sen(x)$, por lo tanto el dominio de la función está conformado por todos los números reales excepto aquellos donde la función seno es igual a cero. Es decir todos los reales menos $k\pi$ donde k es un número entero. El rango son todos los números reales menos el intervalo $(-1,1)$.

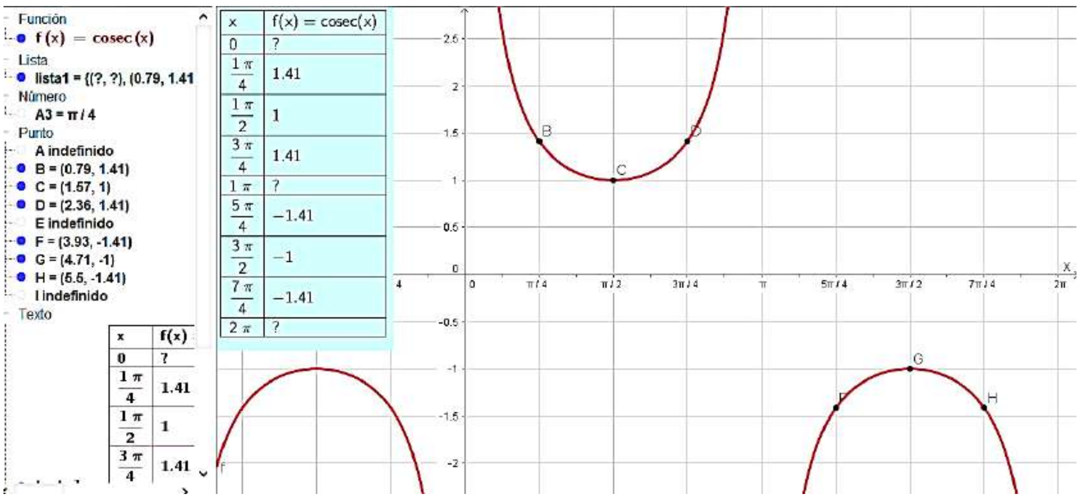


Figura 64: Gráfica de la función f(x)=csc(x).

Ejercicios

1. Utilizando la conversión $1\ rad = \frac{180°}{\pi}$ exprese en radianes los siguientes ángulos, por ejemplo 3° se convierten así: $3° = 3°\frac{1\ rad}{\frac{180°}{\pi}} = \frac{1}{60}\pi$
   a. $10°$
   b. $20°$
   c. $36°$
   d. $60°$
   e. $75°$
2. Utilice la calculadora científica o software para calcular las siguientes imágenes de las funciones dadas.

   $$f(x) = sen(2x+4) \quad g(x) = cos(x^2-2) \quad h(x) = tan(3x-2)$$

   a. $f(\pi)$
   b. $g(-2\pi)$
   c. $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   d. $f(-3)$

e. $g(-1)$

3. Construya la gráfica de las funciones
   a. $f(x) = ctg(3x - 5)$
   b. $g(x) = sen(2x^2 - 5x)$
   c. $h(x) = cos(10x - 6)$
   d. $I(x) = tan(x^3 - 1)$
   e. $J(x) = \frac{4}{5}sen(3 - x^2)$

Aplicaciones de las funciones en la vida real

La relación entre variables es una situación que se presenta con mucha frecuencia en todos los ámbitos del quehacer diario. Por ejemplo el área que ocupa un terreno rectangular es función de su largo y de su ancho; el costo de producción es función de los costos fijos y los costos variables; el rendimiento académico es función del tiempo dedicado al estudio.

En esta sección se resuelven ejercicios que contienen algunas de esas relaciones procurando siempre la conformación de estructuras que contengan solamente una variable independiente y por supuesto una variable dependiente, clasificadas bajo alguna de las denominaciones ya estudiadas.

Ejemplo

Una compañía ha determinado que el costo de producir x unidades (en miles de bolívares) de un producto por mes está dado por

$$C(x) = 2000 + 10x + 0{,}05x^2$$

Evalúe el costo de producir

a. 300 unidades por mes
b. 500 unidades por mes
c. Ninguna unidad

Respuestas

a. Se trata de calcular el valor de la función costo cuando la variable independiente tiene el valor de 300.

$$Si\ x = 300 \Rightarrow C(300) = 2000 + 10(300) + 0{,}05(300)^2$$
$$C(300) = 9500$$

El costo de producir 300 unidades al mes es de 9500000 bolívares.

b. En este caso la variable independiente tiene el valor de 500.

$$Si\ x = 500 \Rightarrow C(500) = 2000 + 10(500) + 0{,}05(500)^2$$
$$C(x) = 19500$$

El costo de producir 500 unidades al mes es de 19500000 bolívares.

c. El costo de no producir.

$$Si\ x = 0 \Rightarrow C(0) = 2000 + 10(0) + 0{,}05(0)^2$$
$$C(x) = 2000$$

El costo de producir 0 unidades es Bs. 2000000.

Ejemplo

El área de un terreno rectangular es igual al producto del largo por el ancho, si el largo del terreno es 20 metros.

a. Establezca una función cuya regla relacione el área con el ancho.
b. Calcule el área del terreno en metros cuadrados si el ancho es de 12 metros.

Respuestas

a. El área de un rectángulo es
$$A = l.a$$
Donde $l = largo, a = ancho.$
Si $l = 20$ entonces
$$A(a) = 20a$$
Donde la variable independiente es a.

b. Para un ancho de 12 metros.
$$Si\ \ a = 12 \Rightarrow A(12) = 20(12) = 240$$
$$Area = 240\ m^2$$

Ejemplo

Un transportista cobra por carga Bs. 1000000 hasta un máximo de 200 unidades de determinado producto. Si el cliente lo desea puede transportar hasta 300 unidades, sin embargo el recargo es de Bs 8500 por cada unidad adicional.

a. Establezca una función de costo del transporte del producto.
b. Si el cliente desea transportar 240 unidades, cuánto debe pagar al transportista.

Respuestas

a. Las unidades máximas de sobrecarga son 100. Por lo tanto la función costo del transporte es
$$C(x) = 1000000 + 8500x$$
Donde x es el número de unidades adicionales del producto.

b. Si el cliente desea transportar 240 unidades, entonces tiene una sobrecarga de 40 unidades.
$$C(40) = 1000000 + 8500(40)$$
$$C(40) = 1340000$$
El cliente debe cancelar Bs. 1340000.

Ejercicios

1. En época inflacionaria, los precios suben en un intervalo de tiempo muy corto. Si el precio de venta del kilogramo de azúcar el primero de junio fue de Bs 5000 y se incrementa Bs 60 por día.
    a. Establezca una función para el precio de venta del kilogramo de azúcar desde el primero de junio.
    b. ¿Cuál es el precio de venta del azúcar el 20 junio?
2. El costo mensual de elaborar un producto se puede expresar como
$$C(x) = 8000000 + 524x + 0{,}3x^3$$
Donde *x* el número de unidades producidas.
    a. Determine el costo de producir 100 unidades del producto.
    b. Si la empresa no produce durante un mes ¿cuál es el costo en que incurre?
3. Una cartulina se puede cortar para elaborar cajas abiertas. Dichas cajas tendrán un ancho: *a*; un largo: l y un alto: h. si se desea que el largo sea 20 cm. y el ancho 12 cm. y que exista variación solamente en el alto de las cajas; se pide:
    a. Construir una función que relacione el volumen de las cajas con el alto de las mismas.
    b. ¿Cuál es el volumen de una caja cuya altura es 8 cm.
4. La utilidad se define como el ingreso menos los costos. Si la función de ingresos mensuales de una empresa artesanal que elabora jabones de tocador es $I(x) = 3500x + 11x^2$ y la función de costos es $C(x) = 3000 + 250x$, donde x es el número de unidades producidas y vendidas. Calcule:
    a. La función utilidad mensual de la empresa.
    b. La utilidad de la empresa si se producen 300 unidades del producto.
    c. Los ingresos mensuales si la cantidad producida es 500 unidades
    d. El costo de producción de 400 unidades mensuales.
5. Si el precio de adquisición de una máquina es Bs. 20000000 y se deprecia de manera continua desde el momento mismo de su compra. Su valor luego de *t* años está dado por
$$V = 20000000e^{-0{,}02t}$$
    a. Calcular el valor de la máquina después de 5 años.
    b. Calcular el valor de la máquina luego de 10 años.

Resumen

- Se define a una función como una regla o ley que transforma un elemento perteneciente a un conjunto de entrada y genera un elemento que conforma un conjunto de resultados.
- El dominio de una función es el conjunto conformado por todos los elementos que actúan como entrada de la función, es decir se trata del conjunto de partida de la función.
- Se define el rango de una función como el conjunto conformado por los elementos que surgen como resultado de aplicar la regla o ley matemática que la define, es decir, es el conjunto de resultados de la función.
- Una función se encuentra definida cuando tiene un conjunto de partida llamado dominio, cuando tiene un conjunto de llegada llamado rango y cuando la regla que la define cumple con la ley de existencia y con la ley de unicidad.
- Todo punto en el plano es un par ordenado.
- De acuerdo a la relación entre los elementos del dominio y el rango, las funciones s clasifican en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.
- Una función es inyectiva si a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del rango. No hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen.
- Una función es sobreyectiva si el conjunto de todas sus imágenes es igual conjunto de llegada, es decir si coincide el rango con el codominio de la función. Todos los elementos del conjunto de llegada aparecen por lo menos una vez como imagen de algún elemento del conjunto de partida.
- Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.
- De acuerdo a las operaciones que las definen, las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes.
- Dentro de las funciones algebraicas se encuentran las funciones polinómicas, funciones racionales y funciones radicales.
- Dentro de las funciones trascendentes están las funciones exponenciales, funciones logarítmicas y funciones trigonométricas.
- La gráfica de una función lineal es una línea recta.
- La gráfica de una función cuadrática es una parábola.
- La gráfica de una función racional se caracteriza por la presencia de asíntotas
- Una asíntota es una recta hacia la cual se aproxima la curva pero nunca llega a tocarla en el lado donde se aproxima
- Las funciones exponenciales se distinguen porque la variable independiente actúa como exponente.
- Las funciones logarítmicas contienen a un logaritmo. Se define logaritmo de un número como el exponente al que se debe elevar la base para que el resultado sea dicho número.
- Las funciones trigonométricas son muy importantes en las ciencias, sobre todo en las físicas ya que son la base del estudio de movimientos circulares, periódicos y ondulatorios.
- Las funciones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
- En diferentes ámbitos de la vida real están presentes las funciones.

Términos Clave

- Función
- Dominio de una función
- Rango de una función
- Función lineal
- Función cuadrática
- Función racional
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Función trigonométrica
- Aplicaciones a la vida real de las funciones.

Ejercicios de Autoevaluación

1. Dadas las funciones siguientes:

$$f(x) = 4 - 7x \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \quad h(x) = \frac{x^2 + 11}{x - 3}$$

   Calcular las imágenes:
   a. $f(2)$
   b. $g(-3)$
   c. $h(-2)$
   d. $h(4)$
   e. $g(10)$
2. Represente a cada lista de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas
   a. $lista1 = \{(0,1), (2,1), (3,1), (4,1), (9,1)\}$
   b. $lista2 = \{(-8, 20), (-4, 8), (-2, 2), (3,10), (7,16)\}$
   c. $lista3 = \{(2,4), (3,5), (4,6), (8,9), (12,15)\}$
   d. $lista4 = \{(-3, -4), (-1, -2), (1,1), (3,3), (7,12)\}$
   e. $lista5 = \{(12,25), (22,50), (33,70), (42,85), (110,90)\}$
3. Dada la función $f(x) = x^2 + 11x + 30$, determine
   a. Dominio
   b. Cortes con el eje x
   c. Cortes con el eje y
   d. Gráfica de la función
4. Dada la función $g(x) = \frac{x^3+4x}{3-x}$ determine
   a. Dominio de la función
   b. Cortes con el eje x
   c. Cortes con el eje y
   d. Utilice software para hacer la gráfica e indique las asíntotas y el rango de la función.
5. Construya la gráfica de la función $f(t) = 45e^{-0,001t}$ y determine su dominio y su rango.
6. Construya la gráfica de la función $g(x) = tang(1 - 3x^2)$.
7. El valor futuro de una inversión V_f se determina así:

$$V_f = V_p(1 + i)^n$$

   Donde V_p es el valor presente, i es la tasa de interés expresada en decimales del cero al 1. n es el número de períodos.
   ¿Cuánto recibirá una persona que invierte Bs. 1000000 en depósito a plazo fijo por dos años, si se le reconoce una tasa de interés de 24% anual?
8. Una computadora se compra en Bs. 2000000 y desde el momento de su compra se empieza a depreciar según la función $V = 2000000e^{-0,0004t}$ con t expresado en días. Indique el valor de la computadora a los 2 años de su compra.
9. Se va a construir un depósito subterráneo para almacenar agua potable, el largo debe ser 1 metro y el ancho 0,8 metros; hay libertad para la profundidad siempre que sea entre 1 metro y 2 metros. Construya expresión para la función del volumen del depósito ¿Cuál es el dominio de la función?

10. La función de ingreso mensual de una empresa es $I(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x$ donde x son las unidades producidas y vendidas. Determine el ingreso mensual si se producen 100 unidades, construya la gráfica de la función.

Bibliografía Recomendada

- Becerra, J. (2004). *Matemáticas V: El placer de dominarlas sin complicaciones*. Unam: México.
- Ortiz, F., Ortiz, F., Ortiz, F. (2014). *Matemáticas 4*. Patria: México.
- Peters, M. y Schaaf, W. (2007). *Algebra y trigonometría*. Reverté: Caracas.
- Sánchez, M. y Solís, R. (2016). *Ambito científico y matemático: Programa de mejora del aprendizaje y del rendimiento*. Editex: Madrid.
- Santiago, A. (2011). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I: con notas históricas*. Visión libros: España.
- Silva, J. (2003). *Fundamentos de matemáticas: algebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo*. Limusa: México.
- Steiner, E. (2003). *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Reverté: Caracas.

Sitios web

- https://goo.gl/RmyZDG. Es el sitio web oficial de Geogebra, donde además de poder descargar de manera gratuita el software, también se puede revisar materiales diseñados para fines educativos matemáticos específicos y participar en foros previo registro mediante una cuenta gratuita.
- https://goo.gl/Mo7CkZ. Wiki de Geogebra donde se explica como trabajar con funciones en Geogebra.
- https://goo.gl/xqFsaN. Sitio web del software matemático Maxima, donde se puede descargar de manera gratuita wxMaxima, programa utilizado en este libro.
- https://goo.gl/fytE7T. Se explica en detalle como trabaja con wxMaxima, la versión para Windows del programa Maxima.

Apéndice A

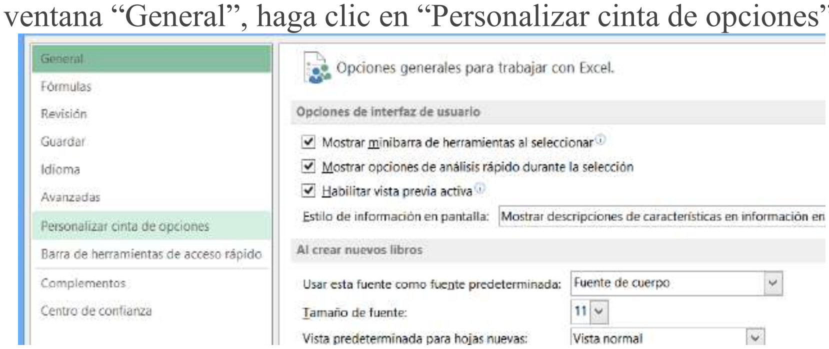
Operaciones entre conjuntos con la hoja de cálculo

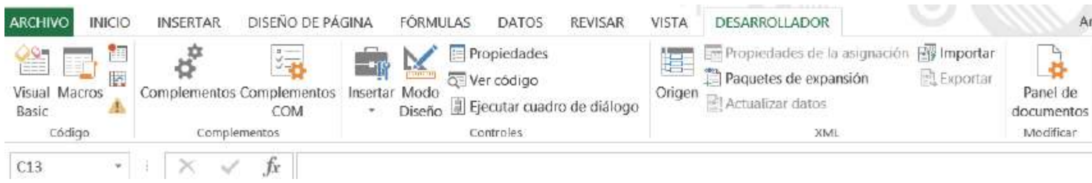
Es posible la realización de las operaciones básicas entre dos conjuntos mediante una hoja de cálculo. En este caso se explica la manera de hacerlo con MS Excel, versión 2013; sin embargo, el hecho que tengas una versión diferente no implica que debas limitarte en probar esta interesante faceta de las hojas de cálculo como es el uso de macros, mediante las cuales hacemos uso de conocimientos básicos relacionados con la programación, específicamente con el lenguaje Visual Basic orientado a Aplicaciones.

Un alto porcentaje de los códigos mostrados en este apéndice han sido creados por terceras personas quienes a su vez los han colocado en la web como parte de ese espíritu que envuelve al mundo del software libre, como es el intercambio sin limitaciones de la información que se considera importante compartir. En este sentido es de destacar el hecho que la estructura de la hoja de cálculo y gran parte del código que soporta esta explicación fue tomado de https://goo.gl/hTx1tF, de igual manera el ordenamiento dinámico de los elementos de los conjuntos fue tomado del sitio web https://goo.gl/lzzlxO y el código que permite bloquear las celdas que no se utilizan en la hoja es una copia del libro 101 Ready-To-Use Excel Macros, disponible en https://goo.gl/XBRPHF.

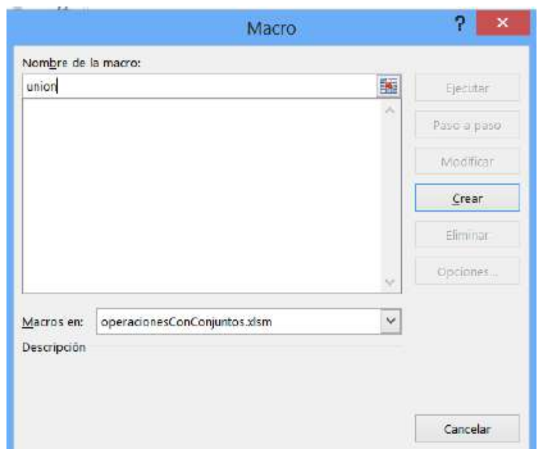
En primer lugar, para usar las macros de Excel 2013 es necesario activar el menú "Desarrollador", para ello hacer clic en "Archivo" y seleccionar "Opciones" ubicada al final de la columna en verde, lado izquierdo.

En la ventana "General", haga clic en "Personalizar cinta de opciones"

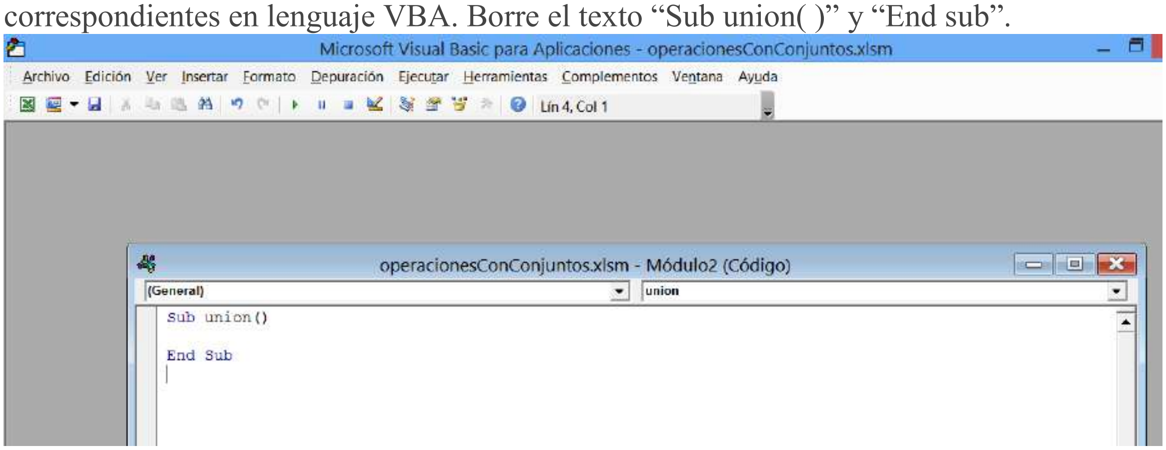




Haga clic en la opción "Macros", ubicada en el menú "Desarrollador", lado izquierdo. En la ventana emergente, asigne un nombre a la macro y pulse el botón "Crear"



La acción anterior conduce a la ventana de edición de macros o ventana VBA, la cual tiene el aspecto mostrado en la figura y donde ya se pueden escribir las instrucciones correspondientes en lenguaje VBA. Borre el texto "Sub union( )" y "End sub".



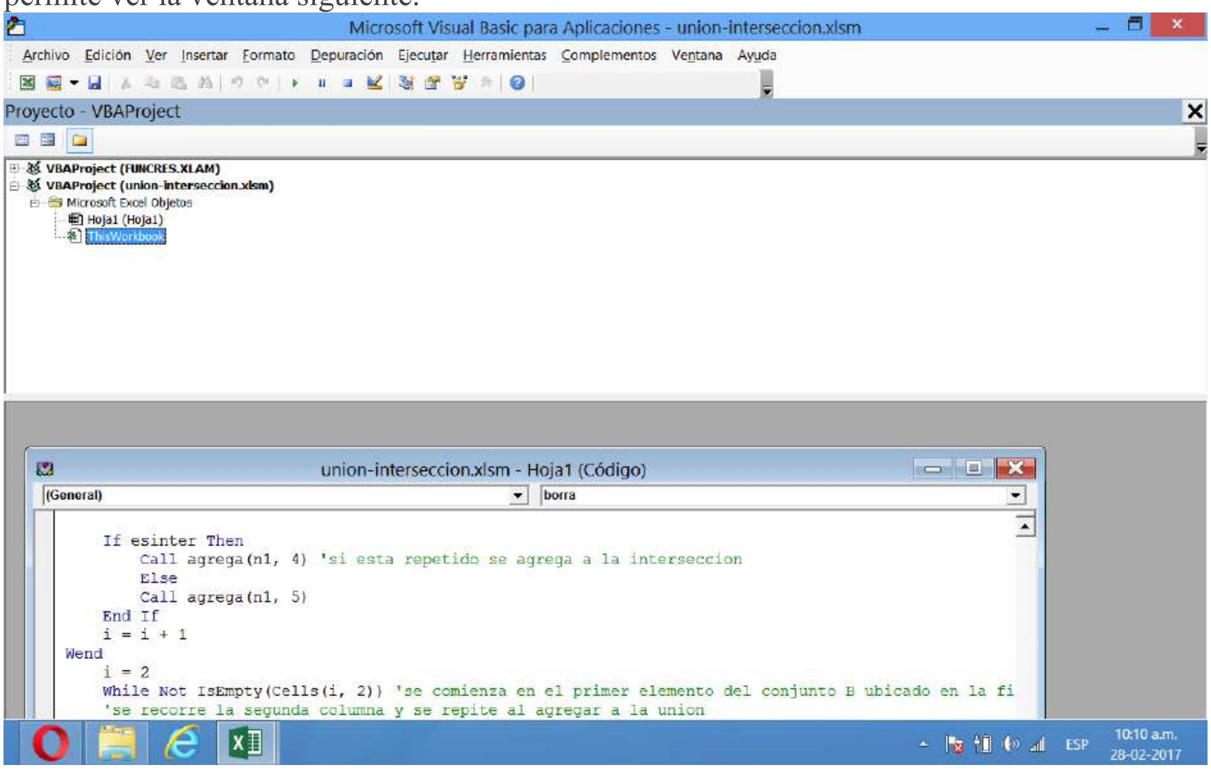
Borre el texto Sub union( ) y End sub. Escriba o copie y pegue las siguientes instrucciones:

```
Option Explicit 'Evita el uso de variables que no estan dimensionadas
Private Sub Worksheet_Change(ByVal Target As Range)
'Este proceso ordena dinámicamente los elementos del conjunto A y B
  If Target.Column = 1 Then
    With Columns(1)
      .Sort key1:=.Cells(1, 1), Header:=xlYes
    End With
  End If
  If Target.Column = 2 Then
    With Columns(2)
      .Sort key1:=.Cells(2, 1), Header:=xlYes
```

```
        End With
    End If
    If Target.Column = 3 Then
        With Columns(3)
            .Sort key1:=.Cells(3, 1), Header:=xlYes
        End With
    End If

End Sub
'Esta función determina si un elemento pertenece a un conjunto
Public Function esta(n, columna) As Boolean
Dim fila
Dim est As Boolean
est = False
fila = 2

While Not IsEmpty(Cells(fila, columna)) And Not est 'Este ciclo comienza en la fila 7 y funciona si la celda no está vacía
    If n = Cells(fila, columna).Value Then est = True 'Si el elemento n es igual al de la celda
    fila = fila + 1 'se incrementa el contador
Wend
esta = est  'si hubo coincidencia esta es true
End Function
Sub agrega(n, columna)
Dim i
i = 2
While Not IsEmpty(Cells(i, columna)) 'este ciclo comienza en la fila 7 y finaliza cuando haya fila vacía
    i = i + 1
Wend
If Not esta(n, columna) Then Cells(i, columna).Value = n


End Sub


Sub union() 'se inicia al pulsar el botón operacion
Dim i, j, n1, n2
Dim esinter As Boolean
i = 2

While Not IsEmpty(Cells(i, 1)) 'Recorre el conjunto A el cual comienza en la fila 2
    n1 = Cells(i, 1).Value 'n1 toma el valor de la celda 2,1  es decir se toma el primer elemento
    Call agrega(n1, 3) 'Agrega el elemento a la Unión la cual está en la columna 3
    j = 2 'Se comienza a buscar la intersección
    esinter = False  'es falso que es intersección
    While Not IsEmpty(Cells(j, 2)) And Not esinter 'se recorre el conjunto B comenzando en la fila 7
        n2 = Cells(j, 2).Value 'n2 toma el valor de la celda 7,4 es decir se toma el primer elemento
        If n1 = n2 Then esinter = True 'se compara n1 el cual está en memoria con n2 y si son iguales es intersección
        j = j + 1
    Wend

    If esinter Then
        Call agrega(n1, 4) 'si está repetido se agrega a la intersección
        Else
        Call agrega(n1, 5)
    End If
```

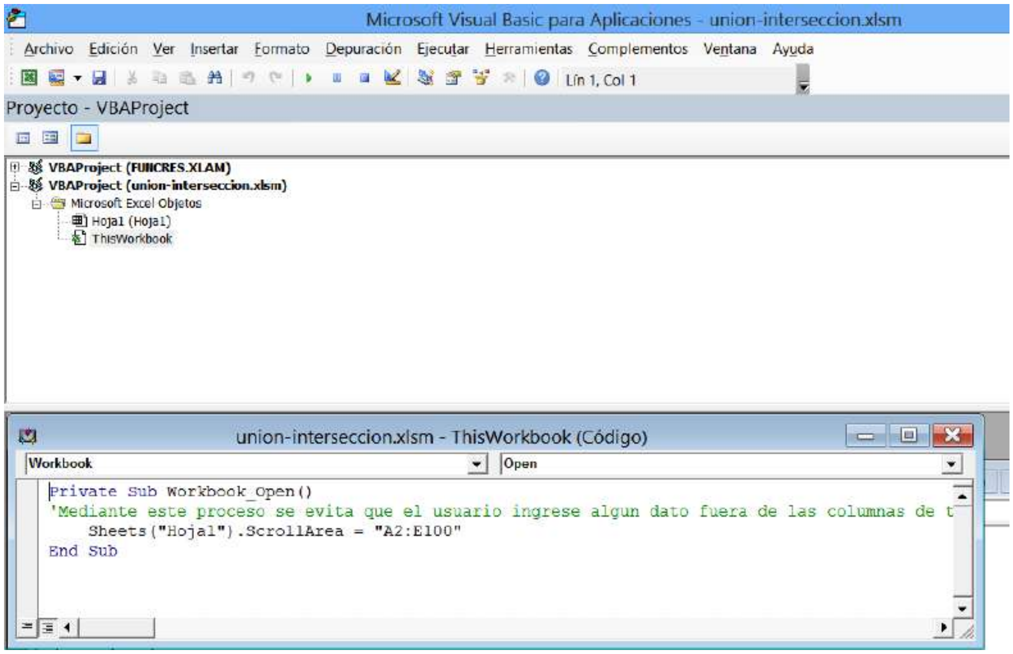
```
    i = i + 1
Wend
    i = 2
    While Not IsEmpty(Cells(i, 2)) 'se comienza en el primer elemento del conjunto B ubicado en la fila 7
    'se recorre la segunda columna y se repite al agregar a la unión
        n1 = Cells(i, 2).Value 'se toma el valor de esa celda
        Call agrega(n1, 3) 'se agrega a la unión
        i = i + 1
    Wend

End Sub

Sub borra()
Range("A2:E100").ClearContents
End Sub
```

Falta ahora ingresar el código para la macro que ordena dinámicamente los elementos de los conjuntos. En la misma ventana donde ingresó el texto anterior, parte superior, haga clic en "Explorador de proyectos" o presione la combinación de teclas Ctrl + R, lo cual le permite ver la ventana siguiente.

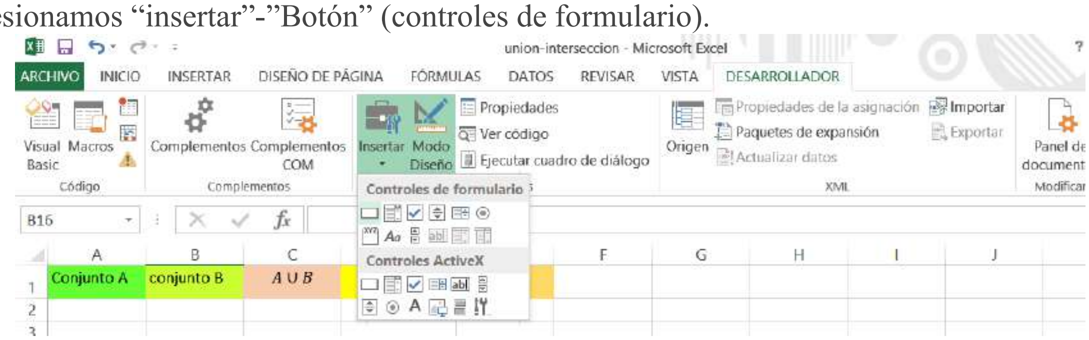


Haga doble clic en ThisWorkbook y en la ventana emergente escriba el código tal como se muestra en la figura. Haga zoom en esta imagen en caso de ser necesario. Guarde, presionando el botón ubicado en la parte superior del ventana (parecido a un diskette) o presionando la combinación de teclas Ctrl+S.

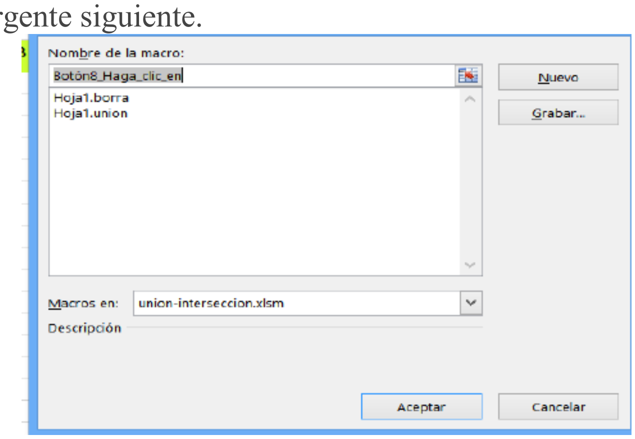
Cierre el editor de macros y guarde su trabajo en caso de que el sistema le muestre la ventana con la opción guardar.



Ya está listo el código de las macros, ahora solo faltan los botones que las activen, para ello, nos ubicamos en la hoja 1 del libro, con el menú desarrollador activado y presionamos "insertar"-"Botón" (controles de formulario).

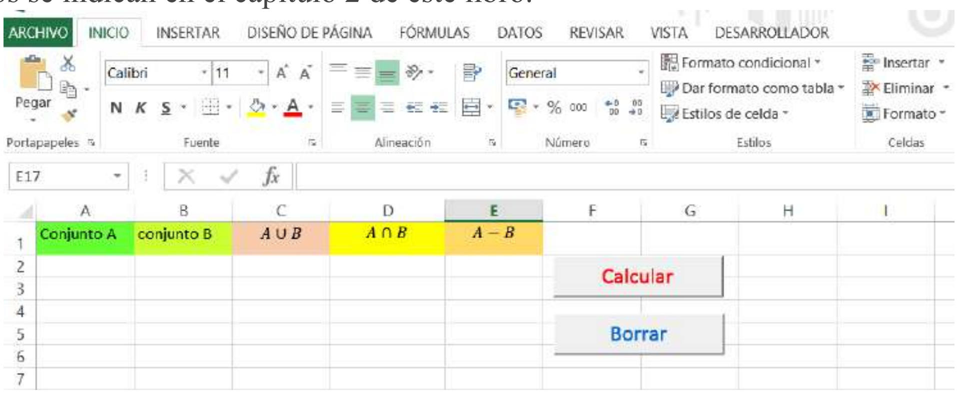


Seleccione el lado derecho de la fila E y arrastre el ratón de tal forma que cubra un rectángulo de de unos 3 centímetros de ancho por 1 centímetro de alto. Al soltar el ratón verá la ventana emergente siguiente.



En la ventana "Nombre de la macro" haga clic en Hoja1.union y pulse el botón aceptar. Esta acción permite que al presionar ese botón se activen las instrucciones presentes en esa macro. Siga el mismo procedimiento para hacer el botón "borrar", en ese caso seleccionando la opción Hoja1.borra.

El aspecto final se muestra en la figura, la explicación del ingreso de datos y los resultados se indican en el capítulo 2 de este libro.



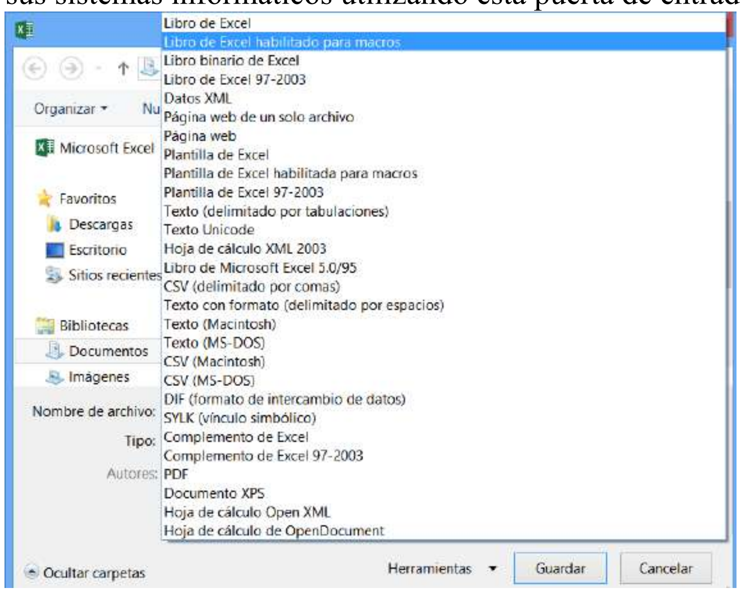
Apéndice B

Determinar si un número es primo con MS Excel

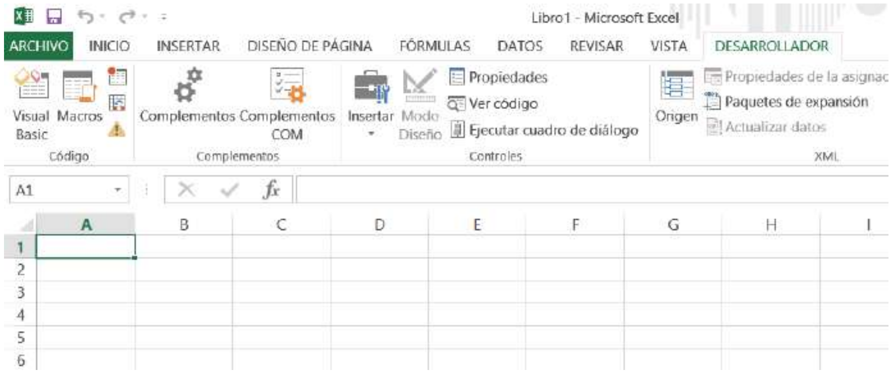
Es frecuente, en el mundo de las matemáticas, la necesidad de verificar si un número es primo o es compuesto, para ello existen muchos recursos disponibles en la web, la mayoría de ellos inspirados en la idea del software libre. De igual forma, mediante el uso de la hoja de cálculo de Microsoft también se puede, con un poco de conocimiento del lenguaje Visual Basic para Aplicaciones y de la programación mediante macros, diseñar una hoja mediante la cual se determine si un número es primo.

En primer lugar hay que abrir una hoja de cálculo en blanco y configurar MS Excel para que muestre el menú "Desarrollador", aspecto que se encuentra explicado en el apéndice A.

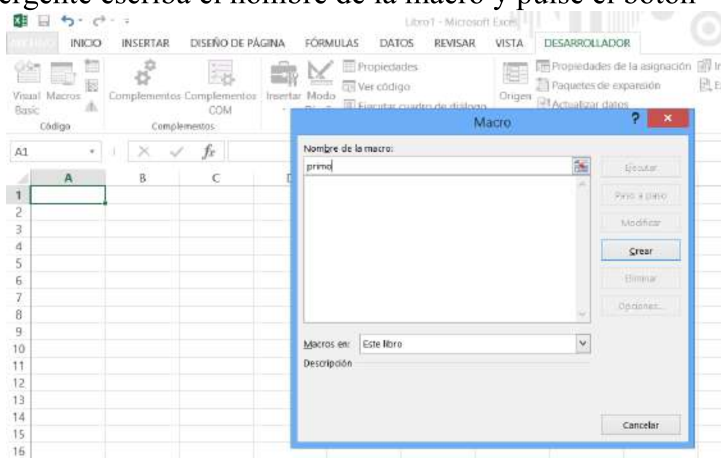
Guarde la el libro con el nombre "verificarsiesPrimo" y con el tipo "Libro de Excel habilitado para macros", opción que le permite abrir y ejecutar la macro en posteriores oportunidades. Recuerde que las macros han sido el medio utilizado para incluir código malicioso a los sistemas, motivo por el cual Microsoft ha diseñado estrategias con el fin de mitigar los ataques a sus sistemas informáticos utilizando esta puerta de entrada.



Haga clic en el menú "Desarrollador" para obtener la siguiente ventana, en la cual debe hacer clic en el ícono "Macros".



En la ventana emergente escriba el nombre de la macro y pulse el botón "Crear"



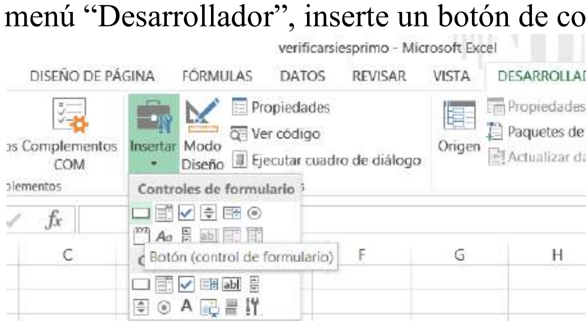
En la ventana de edición de la macro escriba lo siguiente, no olvide guardar el libro, presionando la combinación de teclas Ctrl+S.

```
Sub primo()
Dim n As Long
Dim i As Long
Dim cad As String
Dim esPrimo As Boolean
cad = ""
esPrimo = True

If IsNumeric(Cells(2, 1)) Then
   n = Cells(2, 1)
If n > 100000000 Or n < 1 Then
   MsgBox "No se puede procesar ese valor", vbCritical, "¿Es número primo?"
   Exit Sub
End If
Select Case n
   Case Is = 1
   MsgBox "El número 1 no se considera número primo", vbCritical, "¿Es número primo?"
   Case Is = 2
   MsgBox "El número 2 es un número primo", vbCritical, "¿Es número primo?"
```

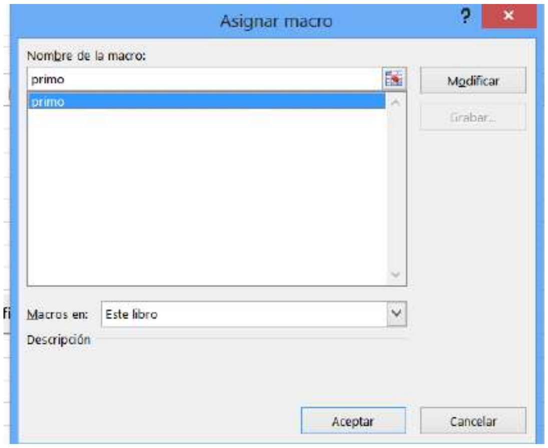
```
   Case Is > 2
      For i = 2 To Int(n / 2) + 1
         If n Mod i = 0 Then
            cad = cad & " " & i
            esPrimo = False
         End If
      Next i
      If esPrimo Then
         MsgBox "El número " & n & " Es primo", vbCritical, "¿Es número primo?"
      Else
         MsgBox "El número " & n & " No es primo 1" & cad & " " & n, vbCritical, "¿Es
número primo?"
      End If
End Select
Else
   MsgBox "Introduzca un valor numérico", vbOKOnly, "¿Es número primo?"
End If
End Sub
```

Guarde y cierre la ventana de edición de macros para regresar a la hoja de cálculo. En la celda A2, la cual se utilizará como vía de entrada de los números a determinar, haga un formato parecido al indicado, alternativa que se logra ubicando el cursor en A2 y haciendo clic al botón derecho opción "Formato de celdas" y en la ventana emergente presionar "Borde", seleccionar "contorno" y luego presionar "Relleno", seleccionar el color deseado y presionar el botón "Aceptar".

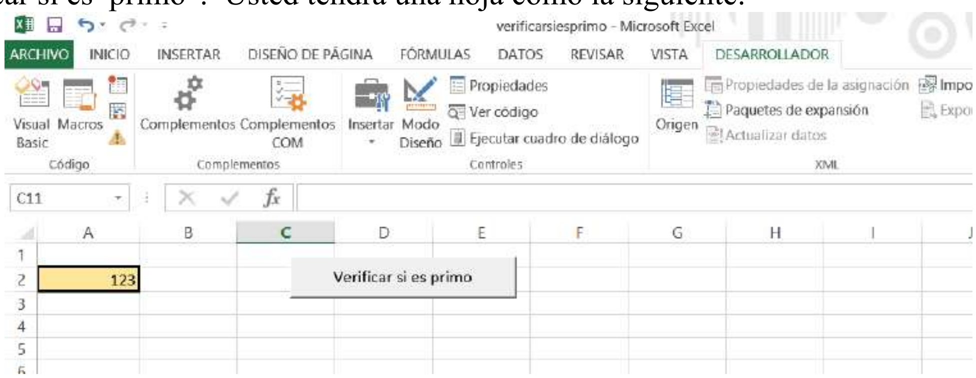
Haga clic en el menú "Desarrollador", inserte un botón de control de formulario.



Escoja una zona cercana a la celda A2 para insertar dicho botón, verifique que la macro asignada a este botón sea la que previamente se ha construido con los códigos ya escritos.



El botón puede ser modificado y cambiado de posición si hace clic con el botón derecho del ratón sobre el mismo, Aproveche esta opción y cambie la etiqueta por defecto a “Verificar si es primo”. Usted tendrá una hoja como la siguiente:



Introduzca cualquier número inferior a 100 millones y Excel le indicará si se trata o no de un número primo, en caso de ser compuesto también le dirá cuáles son los divisores.

Apéndice C

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación

PÁGINA 41

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones.
    a. El basquetbol venezolano clasificó a los juegos Olímpicos Rio 2016.
       Es una proposición.
    b. La multiplicación de dos números negativos es positiva.
       Es una proposición.
    c. ¿Cuándo finaliza el presente semestre?
       No es una proposición.
    d. Francisco de Miranda es un prócer de la independencia venezolana.
       Es una proposición.
    e. ¿En cuál liceo se graduó usted?
       No es una proposición.
    f. El agua es necesaria para la vida.
       Es una proposición.
    g. Vengan pronto por favor.
       No es una proposición.
    h. ¿cuál es tu nombre?
       No es una proposición.
    i. El fenómeno "El niño" afecta el clima mundial.
       Es una proposición.
    j. Plutón no es un planeta del sistema solar.
       Es una proposición.
    k. Esta frase tiene cinco palabras.
       Es una proposición.
    l. ¿Cuándo culminan tus estudios?
       No es una proposición .
2. Sean las proposiciones:
    p: Soy bachiller
    q: Estoy en la Universidad
    r: Vivo en una residencia estudiantil
    Traducir al lenguaje natural cada una de las siguientes proposiciones:
    a. $p \wedge r$
       $p \wedge r$: *Soy bachiller y vivo en una residencia estudiantil*
    b. $\sim p \vee q$
       $\sim p \vee q$: *No soy bachiller o estoy en la universidad*

c. $\sim(\sim q)$
$\sim(\sim q)$: $No\ es\ cierto\ que\ no\ estoy\ en\ la\ universidad$

d. $\sim(\sim p \rightarrow r)$
$\sim(\sim p \rightarrow r)$: $No\ es\ cierto\ que\ si\ no\ soy\ bachiller\ entonces$
$vivo\ en\ una\ residencia\ estudiantil$

e. $(p \wedge q) \rightarrow r$
$(p \wedge q) \rightarrow r$: $Si\ soy\ bachiller\ y\ estoy\ en\ la\ universidad\ entonces$
$vivo\ en\ una\ residencia\ estudiantil$

f. $(q \wedge r) \rightarrow p$
$(q \wedge r) \rightarrow p$: $Si\ estoy\ en\ la\ universidad\ y\ vivo\ en\ una\ residencia$
$estudiantil\ entonces\ soy\ bachiller$

3. Considere las proposiciones:

u: La lógica proposicional estudia las proposiciones.
v: Una proposición puede ser cierta o falsa.
w: La lógica se originó en Grecia.

Expresar en el lenguaje natural las proposiciones compuestas:

a. $q_1: u \wedge v$
q_1: $La\ lógica\ proposicional\ estudia\ las\ proposiciones\ y$
$una\ proposición\ puede\ ser\ cierta\ o\ falsa$

b. $q_2: (w \vee u) \longrightarrow v$
q_2: $Si\ la\ lógica\ se\ originó\ en\ Grecia\ o\ la\ lógica\ proposicional$
$estudia\ las\ proposiciones\ entonces\ una\ proposición$
$puede\ ser\ cierta\ o\ falsa$

c. $q_3: -w \wedge -u$
q_3: $No\ es\ cierto\ que\ la\ lógica\ se\ originó\ en\ Grecia$
$y\ la\ lógica\ proposicional\ no\ estudia\ las\ proposiciones$

d. $q_4: v \leftrightarrow u$
q_4: $Una\ proposición\ puede\ ser\ cierta\ o\ falsa\ si\ y\ solo\ si$
$la\ lógica\ proposicional\ estudia\ las\ proposiciones$

4. Dadas las proposiciones:

p: La Unellez es una universidad experimental.
q: la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma.
r: La licenciatura en educación es una carrera de pregrado.
t: El VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure.

Traducir al lenguaje formal las siguientes proposiciones compuestas:

a. p_1: *Si la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma o el VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure entonces no es cierto que la licenciatura en educación es una carrera de pregrado.*

$$p_1: (q \vee t) \rightarrow \neg r$$

b. p_2: *La licenciatura en educación es una carrera de pregrado si y solo si la Unellez es una universidad experimental y el VPDR tiene su sede en San Fernando de Apure.*

$$p_2: r \leftrightarrow (p \wedge t)$$

c. p_3: *No es verdad que la Unellez es una universidad experimental ni que la universidad de Carabobo es una universidad autónoma.*

$$p_3: \neg p \wedge \neg q$$

d. p_4: *La licenciatura en educación es una carrera de pregrado y la Unellez es una universidad experimental o la Universidad de Carabobo es una universidad autónoma.*

$$p_4: r \wedge p \vee q$$

5. Formalizar las siguientes proposiciones.

a. No es cierto que el río Apure se desborda durante el mes de marzo.

$$p\text{: No es cierto que } \underbrace{\text{el río Apure se desborda durante el mes de marzo}}_{r}$$

$$p: \neg r$$

b. Si compro azúcar entonces tomaré café.

$$p_1\text{: Si } \underbrace{\text{compro azúcar}}_{r} \text{ entonces } \underbrace{\text{tomaré café}}_{s}$$

$$p_1: r \rightarrow s$$

c. O me voy para la fiesta o me pongo a estudiar matemática.

$$p_2\text{: O } \underbrace{\text{me voy para la fiesta}}_{t} \text{ o } \underbrace{\text{me pongo a estudiar matemática}}_{u}$$

$$p_2: t \underline{\vee} u$$

d. Vas a la universidad en carro o en moto.

$$p_3\text{: } \underbrace{\text{Vas a la universidad en carro}}_{r} \text{ o } \underbrace{\text{en moto}}_{s}$$

$$p_3: r \vee s$$

e. Si hacemos ejercicio físico entonces nos distraemos y cuidamos nuestra salud

$$p_4\text{: Si } \underbrace{\text{hacemos ejercicio físico}}_{u} \text{ entonces } \underbrace{\text{nos distraemos}}_{v} \text{ y } \underbrace{\text{cuidamos nuestra salud}}_{w}$$

$$p_4: p \rightarrow (v \wedge w)$$

f. No es cierto que un vehículo nuevo cueste tan caro y que mi mamá trabaja.

$$p_5\text{: No es cierto que } \underbrace{\text{un vehículo nuevo cueste tan caro}}_{s} \text{ y que } \underbrace{\text{mi mamá trabaja}}_{t}$$

$$p_5: \neg s \wedge t$$

6. Elaborar la tabla de verdad para cada proposición e indicar si es una tautología, indeterminación o contradicción.

a. $p_1: (p \longrightarrow q) \leftrightarrow (-p \vee q)$

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \longrightarrow q) \leftrightarrow (-p \vee q)$
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V

La proposición es una tautología

b. $p_2: (p \wedge r) \vee p \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee q)$

p	q	r	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \vee p$	$p \vee q$	$r \vee q$	$(p \vee q) \wedge (r \vee q)$	$(p \wedge r) \vee p \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee q)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

La Proposición es una indeterminación.

PÁGINA 93

1. Represente por extensión los siguientes conjuntos
   a. $A = \{x/x \text{ es estado de Venezuela que comienza por la letra } a\}$
   $$A = \{Amazonas, Anzoátegui, Apure, Aragua\}$$
   b. $B = \{x/x \text{ es país latinoamericano que comienza por la letra } B\}$
   $$B = \{Bolivia, Brasil\}$$
   c. $C = \{x/x \text{ universidad que funciona en El Recreo, San Fernando}\}$
   $$C = \{Una, Unellez\}$$
   d. $D = \{x/x \text{ es número natural menor que } 5\}$
   $$D = \{1,2,3,4\}$$
   e. $E = \{x/x \in N \wedge x \leq 8\}$
   $$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
   f. $F = \{x/x \text{ es letra de la palabra } UNELLEZ\}$
   $$F = \{u, n, l, e, z\}$$
   g. $G = \{x/x \in N \wedge 2 \leq x \leq 12\}$
   $$G = \{2,3,4,5,6,7,8,910,11,12\}$$

2. Dado el conjunto:
   $$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$
   Se pide establecer 5 proposiciones verdaderas utilizando el cuantificador universal o el cuantificador existencial.
   $\forall x \in A: x \text{ es letra del alfabeto griego}$
   $\forall y \in A: y \notin N$
   $\forall z \in A: z \text{ es una letra griega minúscula}$
   $\exists x \in A: x = \alpha$
   $\exists t \in A: t \text{ es una de las tres primeras letras del alfabeto griego}$
3. Convertir al lenguaje formal las proposiciones:
   a. Para todo x que pertenezca al conjunto A, x es una letra del alfabeto.
   $$\forall x \in A: x \text{ es una letra del alfabeto}$$
   b. Para todo x que pertenezca al conjunto A, x es un número natural.
   $$\forall x \in A: x \in N$$

c. Existe al menos un x perteneciente al conjunto A tal que x es una potencia de 5.

$$\exists x \in A: y \in N \wedge x = y^5$$

d. Existe al menos un x perteneciente a A tal que x es menor que 100.

$$\exists x \in A: x < 100$$

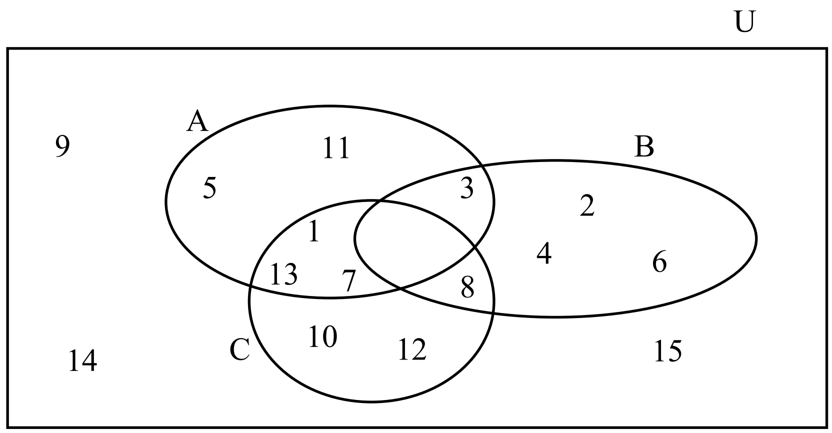
4. Dados los conjuntos

$$U = \{x/x \in N \ \wedge \ x \leq 15\}$$

$$A = \{1,3,5,7,11,13\} \ B = \{2,3,4,6,8,\} \ C = \{1,7,8,10,12,13\}$$

Se pide:

a. Representarlos mediante un diagrama de Venn.



b. Efectuar $A \cup B \cup C$.

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13\}$$

c. Efectuar $A \cap B$

$$A \cap B = \{3\}$$

d. Efectuar $A \cap C$

$$A \cap C = \{1,7,13\}$$

e. Efectuar $A \cap B \cap C$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

f. Efectuar $(A - B) \cup (A - C)$

$$A - B = \{1,5,7,11,13\}$$

$$A - C = \{3,5,11\}$$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{1,3,5,7,11,13\}$$

g. Efectuar $(B - C) \cap (A \cup B)$

$$B - C = \{2,3,4,6\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,11,13\}$$

h. $A^C - B^C$

$$A^C = \{2,4,6,8,10,12,14,15\}$$

$$B^C = \{1,5,7,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A^C - B^C = \{2,4,6,8\}$$

5. Durante 12 horas del día María estudia y realiza labores del hogar, para lo cual dedica 8 horas a estudiar y 7 horas a las labores del hogar. Se pregunta: a) ¿Durante cuántas horas del día María estudia exclusivamente?, b) ¿Durante cuántas horas del día María realiza exclusivamente labores del hogar?, c) ¿durante cuántas horas del día María realiza labores del hogar y estudia?

$$U = \{x/x = tiempo\ diario\ de\ ocupaciones\ de\ María\}$$
$$A = \{x/x = Tiempo\ para\ estudiar\}$$
$$B = \{x/x = Tiempo\ para\ labores\ del\ hogar\}$$
$$n(U) = 12$$
$$n(A) = 8$$
$$n(B) = 7$$

a. Horas del día cuando María estudia exclusivamente.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(U) = n(A \cup B) = 12$$
$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$n(A \cap B) = 8 + 7 - 12 = 3$$
$$n(A \cap B) = 3$$
$$n(A\ exclusivamente) = n(A) - n(A \cap B) = 8 - 3 = 5$$
$$n(A\ exclusivamente) = 5$$

b. Horas del día cuando María realiza exclusivamente labores del hogar.

$$n(B\ exclusivamente) = n(B) - n(A \cap B) = 7 - 3 = 4$$
$$n(B\ exclusivamente) = 4$$

c. Horas del día cuando María realiza labores del hogar y estudia.

$$n(A \cap B) = 3$$

6. Dados los conjuntos $A = \{1,2,4,6\}$ $B = \{2,4,8\}$

Se pide

a. efectuar AxB y hacer la representación cartesiana.

$$AxB = \begin{Bmatrix} (1,2), (1,4), (1,8), (2,2), (2,4), (2,8), (4,2), \\ (4,4), (4,8), (6,2), (6,4), (6,8) \end{Bmatrix}$$

B								
8		(1,8)	(2,8)		(4,8)		(6,8)	
4		(1,4)	(2,4)		(4,4)		(6,4)	
2		(1,2)	(2,2)		(4,2)		(6,2)	
		1	2		4		6	A

b. Conjunto de partes del conjunto A.

$$p(A) = \left\{ \begin{matrix} \{1\},\{2\},\{4\},\{6\},\{1,2\},\{1.4\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{1,2,4\}, \\ \{1,2,6\},\{1,4,6\},\{2,4,6\},\{1,2,4,6\},\emptyset \end{matrix} \right\}$$

c. Conjunto de partes del conjunto B.

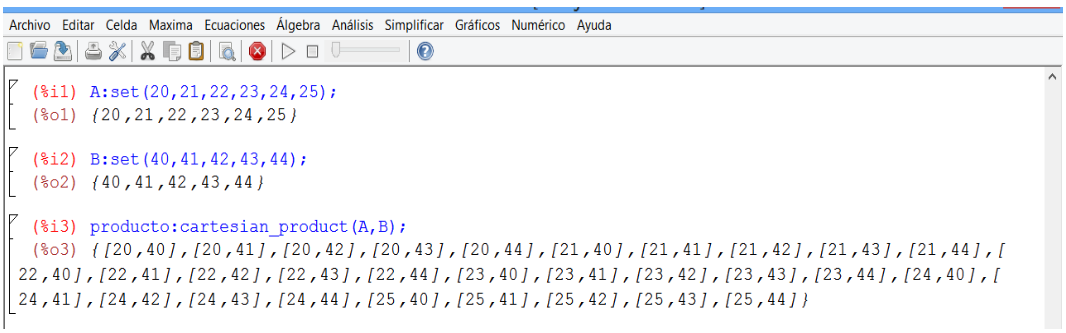
$$p(B) = \{\{2\},\{4\},\{8\},\{2,4\},\{2,8\},\{4,8\},\{2,4,8\},\emptyset\}$$

7. Dados los conjuntos

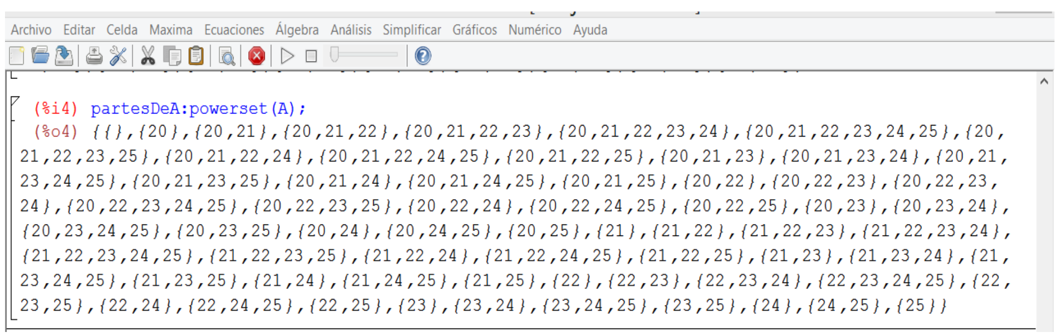
$$A = \{x/x \in N \wedge 20 \leq x \leq 25\}$$
$$B = \{x/x \in N \wedge 40 \leq x \leq 44\}$$

Se pide efectuar con wxMaxima:

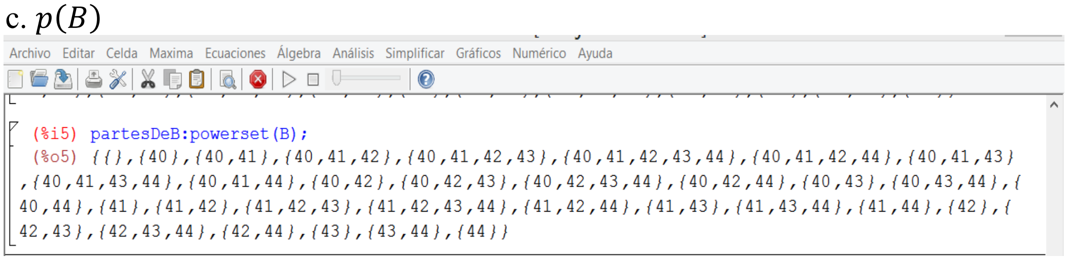
a. AxB



b. $p(A)$



c. $p(B)$



PÁGINA 187

1. Escribir en lenguaje natural cada cifra
   a. 45722

   $$Cuarenta\ y\ cinco\ mil\ setecientos\ veintidos$$

   b. 0.090002

   $$Noventa\ mil\ dos\ centésimas$$

   c. 854284.87

   $$Ochocientos\ cincuenta\ y\ cuatro\ mil\ doscientos\ ochenta\ y\ cuatro$$
   $$con\ ochenta\ y\ siete\ centésimas$$

   d. 60000032

   $$Sesenta\ millones\ treinta\ y\ dos$$

   e. 5.000026

   $$Cinco\ con\ veintiseis\ cien\ milésimas$$

2. Dados los números siguientes en el sistema decimal, realizar la conversión a: (a) sistema binario, (b) Sistema octal, (c) sistema hexadecimal.
   a. 45

   $$45 = 1x2^5 + 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^0$$
   $$45_{10} = 101101_2$$
   $$45 = 5x8^1 + 5x8^0$$
   $$45_{10} = 55_8$$
   $$45 = 2x16^1 + 13x16^0$$
   $$45_{10} = 2D$$

   b. 1283

   $$1283 = 1x2^{10} + 1x2^8 + 1x2^1 + 1x2^0$$
   $$1283_{10} = 10100000011_2$$
   $$1283 = 2x8^3 + 4x8^2 + 3x8^0$$
   $$1283_{10} = 2403_8$$
   $$1283 = 5x16^2 + 3x16^0$$
   $$1283_{10} = 503_{16}$$

   c. 1025

   $$1025 = 1x2^{10} + 1x2^0$$
   $$1025_{10} = 10000000001$$
   $$1025 = 2x8^3 + 1x8^0$$
   $$1025_{10} = 2001_8$$
   $$1025 = 4x16^2 + 1x16^0$$
   $$1025_{10} = 401_{16}$$

   d. 38999

   $$38999 = 1x2^{15} + 1x2^{12} + 1x2^{11} + 1x2^6 + 1x2^4 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$$
   $$38999_{10} = 1001100001010111_2$$
   $$38999 = 1x8^5 + 1x8^4 + 4x8^3 + 1x8^2 + 2x8^1 + 7x8^0$$
   $$38999_{10} = 114127_8$$
   $$38999 = 9x16^3 + 8x16^2 + 5x16^1 + 7x16^0$$
   $$38999_{10} = 9857_{16}$$

e. 7992067

$$7992067 = 1x2^{22} + 1x2^{21} + 1x2^{20} + 1x2^{19} + 1x2^{16} + 1x2^{15} + 1x2^{14} + 1x2^{13} + 1x2^{12} + 1x2^{9} + 1x2^{8} + 1x2^{1} + 1x2^{0}$$

$$7992067_{10} = 11110011111001100000011_{2}$$

$$7992067 = 3x8^{7} + 6x8^{6} + 3x8^{5} + 7x8^{4} + 1x8^{3} + 4x8^{2} + 3x8^{0}$$

$$7992067_{10} = 36371403_{8}$$

$$7992067 = 7x16^{5} + 9x16^{4} + 15x16^{3} + 3x16^{2} + 3x16^{0}$$

$$7992067_{10} = 79F303_{16}$$

3. Convertir a números romanos o a números decimal según convenga
   a. 45

$$XLV$$

   b. $DXLIII$

$$543$$

   c. 600563

$$\overline{DC}DXLIII$$

   d. $\overline{\overline{\overline{VII}}}\overline{CCXXIV}III$

$$7224003$$

   e. 999000901

$$\overline{\overline{CMXCIX}}CMI$$

4. Descomponer los números en factores primos
   a. 780

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

$$780 = 2^{2}x3x5x13$$

   b. 2468

2468	2
1234	2
617	617
1	

$$2468 = 2^{2}x617$$

   c. 12986

12986	2
6493	43
151	151
1	

d. 295540

295540	2
147770	2
73885	5
14777	7
2111	2111
1	

$$295540 = 2^2 x 5 x 7 x 2111$$

e. 4670954

4670954	2
2335477	17
137381	37
3713	47
79	79
1	

$$4670954 = 2 x 17 x 37 x 47 x 79$$

5. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo

a. 472; 12840

472	2
236	2
118	2
59	59
1	

12840	2
6420	2
3210	2
1605	3
535	5
107	107
2	

$472 = 2^3 x 59$ $\quad$ $12840 = 2^3 x 3 x 5 x 107$

$$MCD(472,12840) = 2^3 = 8$$

$$mcm(472,12840) = 2^3 x 3 x 5 x 59 x 107 = 757560$$

b. 546; 248

546	2
273	3
91	7
13	13
1	

248	2
124	2
62	2
31	31
1	

$546 = 2x3x7x13 \quad 248 = 2^3x31$

$$MCD(546{,}248) = 2$$

$$mcm(546{,}248) = 2^3x3x7x13x31 = 67704$$

c. 924; 480

924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$924 = 2^2x3x7x11 \quad 480 = 2^5x3x5$

$$MCD(924{,}480) = 2^2x3 = 12$$

$$mcm(924{,}480) = 2^5x3x5x7x11 = 36960$$

d. 4694; 10482

4694	2
2347	2347
1	

10482	2
5241	3
1747	1747
1	

$4694 = 2x2347 \quad 10482 = 2x3x1747$

$$MCD(4694{,}10482) = 2$$

$$mcm(4694{,}10482) = 2x3x2347x1747 = 24601254$$

e. 124950; 240755

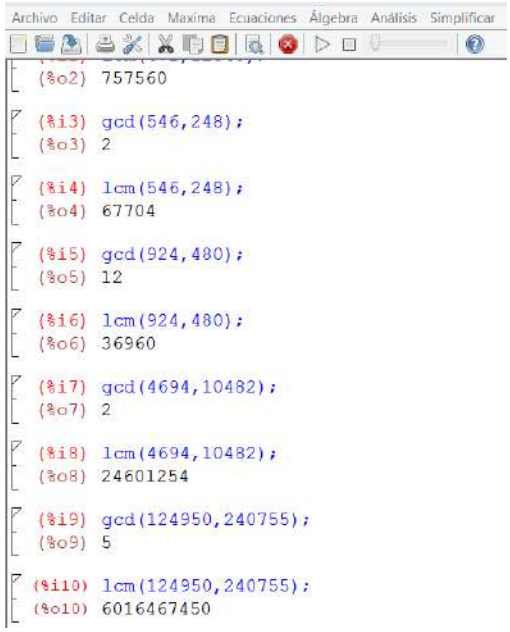
124950	2
62475	3
20825	5
4165	5
833	7
119	7
17	17
1	

240755	5
48151	179
269	269
1	

$124950 = 2x3x5^2x7^2x17 \quad 240755 = 5x179x269$

$$MCD(124950{,}240755) = 5$$

$$mcm(124950{,}240755) = 2x3x5^2x7^2x17x179x269$$
$$= 6016467450$$

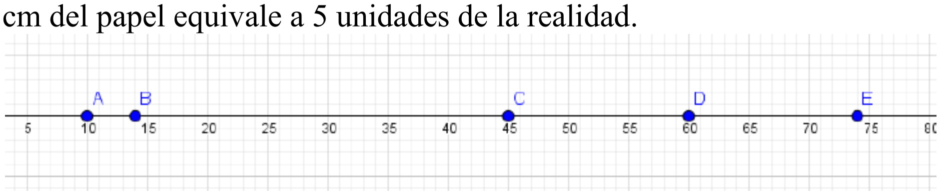


6. Representar en la recta a los conjuntos

a. $A = \{10, 14, 45, 60, 74\}$

$$Número\ Menor\ (Nm) = 10$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 74$$
$$Amplitud = NM - Nm = 74 - 10 = 64$$
$$64 \div 15 \cong 4.27$$

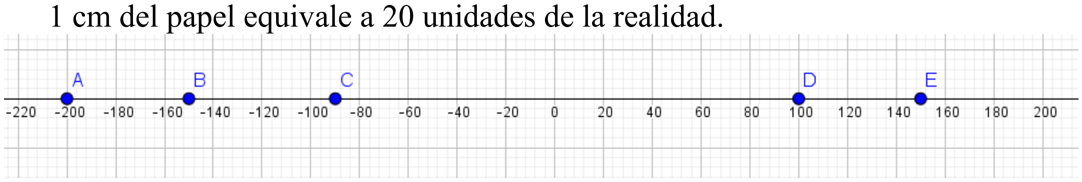
1 cm del papel equivale a 5 unidades de la realidad.



b. $B = \{-200, -150, -90, 100, 150\}$

$$Número\ Menor\ (Nm) = -200$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 150$$
$$Amplitud = NM - Nm = 150 - (-200) = 350$$
$$350 \div 15 \cong 23.33$$

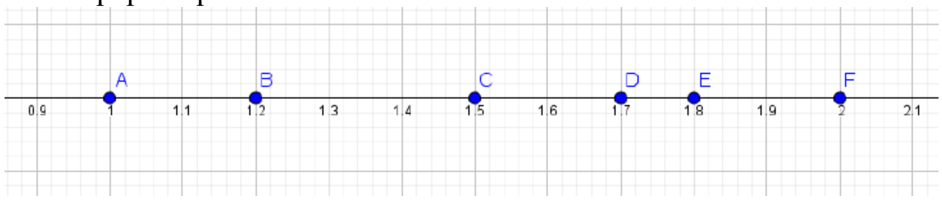
1 cm del papel equivale a 20 unidades de la realidad.



c. $C = \{1.0; 1.2; 1.5; 1.7; 1.8; 2.0\}$

$$Número\ Menor\ (Nm) = 1.0$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 2.0$$
$$Amplitud = NM - Nm = 2.0 - 1.0 = 1$$
$$1 \div 15 \cong 0.07$$

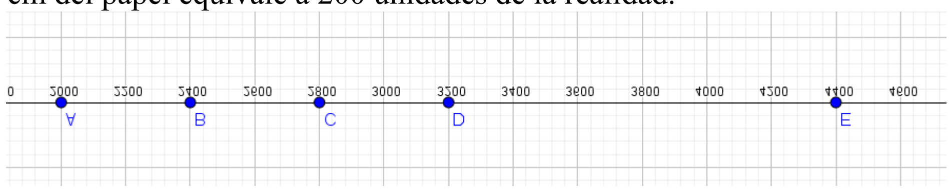
1 cm del papel equivale a 0.10 unidades de la realidad.



d. $D = \{2000, 2400, 2800, 3200, 4400\}$

$$Número\ Menor\ (Nm) = 2000$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 4400$$
$$Amplitud = NM - Nm = 4400 - 2000 = 2400$$
$$2400 \div 15 = 160$$

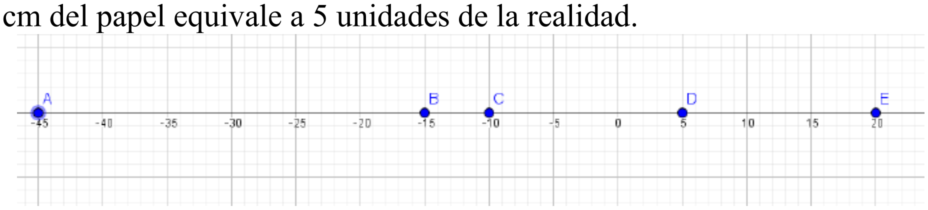
1 cm del papel equivale a 200 unidades de la realidad.



e. $E = \left\{-45, -\frac{30}{2}, -\frac{50}{5}, \sqrt{25}, 20\right\}$

$$Número\ Menor\ (Nm) = -45$$
$$Número\ Mayor\ (NM) = 20$$
$$Amplitud = NM - Nm = 20 - (-45) = 65$$
$$65 \div 1 \cong 4.33$$

1 cm del papel equivale a 5 unidades de la realidad.



7. Resolver

a. $(-10-3)(5-7)$

$$(-10-3)(5-7) = (-13)(-2) = 26$$
$$(-10-3)(5-7) = 26$$

b. $\left[\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[20 + \left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)\right]$

$$\left[\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[20 + \left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)\right] =$$
$$\left[\left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\right] + \left[20 + \left(\frac{11}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{110}{6} + \left(20 + \frac{22}{12}\right) =$$
$$\frac{55}{3} + \left(20 + \frac{11}{6}\right) = \frac{55}{3} + \frac{131}{6} = \frac{110+131}{6} = \frac{241}{6}$$
$$\left[\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[20 + \left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)\right] = \frac{241}{6}$$

c. $(2^5+1)(3^4+2)$

$$(2^5+1)(3^4+2)=(32+1)(81+2)=(33)(83)=2739$$
$$(2^5+1)(3^4+2)=2739$$

d. $\left(\frac{7}{9}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^4$

$$\left(\frac{7}{9}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{343}{729}+\frac{4}{25}-\frac{1}{625}$$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

25	5
5	5
1	

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$729=3^6$ $\quad 25=5^2$ $\quad 625=5^4$

$$mcm(729{,}25{,}625)=3^6x5^4=455625$$
$$\frac{343}{729}+\frac{4}{25}-\frac{1}{625}=\frac{214375+72900-729}{455625}=\frac{286546}{455625}$$
$$\left(\frac{7}{9}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{286546}{455625}$$

e. $\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{10}{3}+\frac{8}{5}\right)$

$$\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{10}{3}+\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{28-45}{63}\right)\left(\frac{50+24}{15}\right)=\left(-\frac{17}{63}\right)\left(\frac{74}{15}\right)=-\frac{1258}{945}$$

$$\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{10}{3}+\frac{8}{5}\right)=-\frac{1258}{945}$$

8. Una caja contiene 50 lápices color azul y 30 lápices color negro, calcular (a) razón de lápices negros a lápices azul, (b) razón de lápices azul a lápices negros.

$$Lápices\ negro\ a\ azul=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

Hay 3 lápices negro por cada 5 lápices azul.

$$Lápices\ azul\ a\ negro=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$$

Hay 5 lápices azul por cada 3 lápices negro.

9. Calcular el valor de x en las proporciones siguientes.

a. $\frac{x}{10}=\frac{3}{4}$

$$x=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$$

b. $\frac{-1}{4} = \frac{x}{5}$

$$x = -\frac{5}{4}$$

c. $\frac{10}{x} = \frac{50}{3}$

$$x = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

d. $\frac{6}{7} = \frac{8}{x}$

$$x = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

e. $-\frac{12}{5} = \frac{4}{x}$

$$x = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$$

10. Efectuar

a. $\left(\sqrt[5]{4}\right)\left(\sqrt[7]{4}\right)$

$$\left(\sqrt[5]{4}\right)\left(\sqrt[7]{4}\right) = \left(\sqrt[35]{4^7}\right)\left(\sqrt[35]{4^5}\right) = \sqrt[35]{4^{12}}$$

$$\left(\sqrt[5]{4}\right)\left(\sqrt[7]{4}\right) = \sqrt[35]{4^{12}}$$

b. $\frac{5}{12} + \frac{9}{25} + \frac{7}{36} - \frac{2}{9}$

$$12 = 2^2 x 3$$

$$25 = 5^2$$

$$36 = 2^2 x 3^2$$

$$9 = 3^2$$

$$mcm(12{,}25{,}36{,}9) = 2^2 x 3^2 x 5^2 = 900$$

$$\frac{5}{12} + \frac{9}{25} + \frac{7}{36} - \frac{2}{9} = \frac{375 + 324 + 175 - 200}{900} = \frac{674}{900} = \frac{337}{450}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{9}{25} + \frac{7}{36} - \frac{2}{9} = \frac{337}{450}$$

c. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\left(\sqrt[7]{625}\right)$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\left(\sqrt[7]{625}\right) = \left(\sqrt[3]{5^2}\right)\left(\sqrt[7]{5^4}\right) = \left(\sqrt[21]{5^{14}}\right)\left(\sqrt[21]{5^{12}}\right) =$$

$$= \sqrt[21]{5^{26}} = 5\sqrt[21]{5^5} = 5\sqrt[21]{3125}$$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\left(\sqrt[7]{625}\right) = 5\sqrt[21]{3125}$$

d. $\left(\frac{8}{9}\right)^3\left[\frac{4}{5} + 7\left(\frac{1}{3} - 2\right)\right]$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3\left[\frac{4}{5} + 7\left(\frac{1}{3} - 2\right)\right] = \frac{512}{729}\left[\frac{4}{5} + 7\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$\frac{512}{729}\left[\frac{4}{5} - \frac{35}{3}\right] = \frac{512}{729}\left(\frac{12 - 175}{15}\right) = \frac{512}{729}\left(-\frac{163}{15}\right) = -\frac{83456}{10935}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3\left[\frac{4}{5} + 7\left(\frac{1}{3} - 2\right)\right] = -\frac{83456}{10935}$$

e. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}+4\right)\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}-2\right)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}+4\right)\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}-2\right)=\left(3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}+4\right)\left(3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-2\right)=$$

$$\left(3^{\frac{3}{10}}+4\right)\left(3^{-\frac{1}{6}}-2\right)=3^{\frac{8}{60}}-2\left(3^{\frac{3}{10}}\right)+4\left(3^{-\frac{1}{6}}\right)-8$$

$$=3^{\frac{2}{15}}-2\left(3^{\frac{3}{10}}\right)+\frac{4}{\sqrt[6]{3}}\left(\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3^5}}\right)-8$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}+4\right)\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}-2\right)=\sqrt[15]{3^2}-2\sqrt[10]{3^3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^5}-8$$

PÁGINA 263

1. Para cada expresión algebraica indique el grado y clasifíquela como monomio, binomio o trinomio.
   a. $4x^2y+3$
      Tercer grado. Binomio.
   b. $\frac{3}{x}+x^3+4$
      Tercer grado. Binomio.
   c. $\frac{5}{6}x$
      Primer grado. Monomio.
   d. x^2+5x+6
      Segundo grado. Trinomio.
   e. $\frac{3}{5}xy+x^3y^2$
      Quinto grado. Binomio.
2. Calcule el valor numérico de cada expresión algebraica para $x=-2; y=3; z=-1$ según aparezcan estas variables en la estructura.
   a. $\sqrt{-4x-1}$

$$\sqrt{-4(-2)-1}$$
$$\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$$
$$\sqrt{-4x-1}=\sqrt{7}\ si\ x=-2$$

   b. $\frac{x^3y}{3z}-5xz$

$$\frac{(-2)^3(3)}{3(-1)}-5(-2)(-1)=\frac{-24}{-3}-10=8-10=-2$$
$$\frac{x^3y}{3z}-5xz=-2\ si\ x=-2, y=3, z=-1$$

   c. $3x^2-4xy+2yz$

$$3(-2)^2-4(-2)(3)+2(3)(-1)=12+24-6=30$$
$$3x^2-4xy+2yz=30\ si\ x=-2, y=3, z=-1$$

   d. $\frac{4}{7}-\frac{x}{y}$

$$\frac{4}{7}-\frac{(-2)}{(3)}=\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=\frac{26}{21}$$

$$\frac{4}{7}-\frac{x}{y}=\frac{26}{21}\ si\ x=-2, y=3, z=-1$$

e. $\sqrt[3]{\frac{5x+1}{4xy}}$

$$\sqrt[3]{\frac{5(-2)+1}{4(-2)(3)}}=\sqrt[3]{\frac{-9}{-24}}=\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{5x+1}{4xy}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\ \ si\ x=-2, y=3, z=-1$$

3. Convierta al lenguaje simbólico matemático las expresiones siguientes
   a. La edad de Leonor es el décuplo de la edad de Valentina.
   $$x = Edad\ de\ Leonor$$
   $$y = Edad\ de\ Valentina$$
   $$x = 10y$$
   b. Las ganancias esta semana fueron cuatro quintas partes de las de la semana pasada.
   $$x = Ganancias\ esta\ semana$$
   $$y = Ganancias\ de\ la\ pasada\ semana$$
   $$x=\frac{4}{5}y$$
   c. Mi nota en el examen fue el cuádruple de la nota del último examen.
   $$x = mi\ nota\ en\ este\ exaen$$
   $$y = mi\ nota\ en\ el\ \text{ú}ltimo\ examen$$
   $$x = 4y$$
   d. El precio del producto se triplicó esta semana.
   $$p = Precio\ normal\ del\ producto$$
   $$y = Precio\ del\ producto\ esta\ semana$$
   $$y = 3p$$
   e. La onceava parte de quince.
   $$\frac{1}{11}(15)$$
4. Identifique los términos que conforman cada expresión algebraica
   a. $12x^3-5x+7$
   Tres términos:
   $$12x^3$$
   $$-5x$$
   $$+7$$
   b. $\sqrt[5]{x^3+4x}$
   Un término:
   $$\sqrt[5]{x^3+4x}$$
   c. $-\frac{x^4y}{z^3}$
   Un término:
   $$-\frac{x^4y}{z^3}$$

d. $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}xy$

Dos términos:

$$\frac{3}{5}$$
$$-\frac{1}{2}xy$$

e. $\frac{4}{x+y}$

Un término:

$$\frac{4}{x+y}$$

5. Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \quad q(x) = -4x^2 + 5 \quad r(x) = 2 - x$

Calcule:

a. $p(2)$
$$p(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 1$$
$$= 8 - 20 + 1 = -11$$
$$p(2) = -11$$

b. $q(-3)$
$$q(-3) = -4(-3)^2 + 5$$
$$= -36 + 5 = -31$$
$$q(-3) = -31$$

c. $r(-4)$
$$r(-4) = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$$
$$r(-4) = 6$$

d. $p(-1) + q(-5)$
$$p(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 1 = -1 - 5 + 1 = -5$$
$$q(-5) = -4(-5)^2 + 5 = -100 + 5 = -95$$
$$p(-1) + q(-5) = -5 + (-95) = -100$$
$$p(-1) + q(-5) = -100$$

e. $q(2) + r(3)$
$$q(2) = -4(2)^2 + 5 = -16 + 5 = -11$$
$$r(3) = 2 - (3) = -1$$
$$q(2) + r(3) = -11 + (-1) = -12$$
$$q(2) + r(3) = -12$$

6. Dados los polinomios $p(x) = -10x^2 + 2x + 4 \quad q(x) = x^2 - 3x \quad r(x) = x^2 - 7$

Efectuar:

a. $p(x) + q(x) + r(x)$
$$(-10x^2 + 2x + 4) + (x^2 - 3x) + (x^2 - 7)$$
$$= -10x^2 + 2x + 4 + x^2 - 3x + x^2 - 7$$
$$= -8x^2 - x - 3$$
$$p(x) + q(x) + r(x) = -8x^2 - x - 3$$

b. $4p(x) + 3q(x)$
$$4p(x) = 4(-10x^2 + 2x + 4) = -40x^2 + 8x + 16$$
$$3q(x) = 3(x^2 - 3x) = 3x^2 - 9x$$
$$4p(x) + 3q(x) = (-40x^2 + 8x + 16) + (3x^2 - 9x)$$

$$= -40x^2 + 8x + 16 + 3x^2 - 9x = -39x^2 - x + 16$$
$$4p(x) + 3q(x) = -39x^2 - x + 16$$

c. $p(x) - q(x)$
$$(-10x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 3x)$$
$$= -10x^2 + 2x + 4 - x^2 + 3x = -11x^2 + 5x + 4$$
$$p(x) - q(x) = -11x^2 + 5x + 4$$

d. $p(x).q(x)$
$$(-10x^2 + 2x + 4)(x^2 - 3x)$$
$$= -10x^4 + 30x^3 + 2x^3 - 6x^2 + 4x^2 - 12x$$
$$p(x).q(x) = -10x^4 + 32x^3 - 2x^2 - 12x$$

e. $p(x).r(x)$
$$(-10x^2 + 2x + 4)(x^2 - 7) = -10x^4 + 70x^2 + 2x^3 - 14x + 4x^2 - 28$$
$$p(x).r(x) = -10x^4 + 2x^3 + 74x^2 - 14x - 28$$

7. Efectúe los siguientes productos

a. $(4x^3 + 3)(4x^3 + 3)$
$$= 16x^6 + 12x^3 + 12x^3 + 9$$
$$(4x^3 + 3)(4x^3 + 3) = 16x^6 + 24x^3 + 9$$

b. $(y^2 - z)(y^2 + z)$
$$= (y^2)^2 - (z)^2 = y^4 - z^2$$
$$(y^2 - z)(y^2 + z) = y^4 - z^2$$

c. $(xy + 3)(xy - 3)$
$$= (xy)^2 - (3)^2 = x^2y^2 - 9$$
$$(xy + 3)(xy - 3) = x^2y^2 - 9$$

d. $(3x + 2)(3x + 2)(3x + 2)$
$$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 + (2)^3$$
$$(3x + 2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

e. $(12x + 5)(3x + 1)$
$$= 36x^2 + 12x + 15x + 5 = 36x^2 + 27x + 5$$
$$(12x + 5)(3x + 1) = 36x^2 + 27x + 5$$

8. Factorice los polinomios

a. $5x^3 + 10x^2$
$$= 5x^2(x + 2)$$
$$5x^3 + 10x^2 = 5x^2(x + 2)$$

b. $32x^2y^3 - 16x^3y^3 + 64x^2y^4$
$$= 16x^2y^3(2 - x + 4y)$$
$$32x^2y^3 - 16x^3y^3 + 64x^2y^4 = 16x^2y^3(2 - x + 4y)$$

c. $x^2 - 8x - 33$
$$x^2 - 8x - 33 = (x - 11)(x + 3)$$

d. $x^2 - 81$
$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

e. $125x^3y + 45x^2y^2 - 625x^4y^5$
$$= 5x^2y(25x + 9y - 125x^2y^4)$$
$$125x^3y + 45x^2y^2 - 625x^4y^5 = 5x^2y(25x + 9y - 125x^2y^4)$$

9. Resuelva las ecuaciones

a. $\frac{10x-7}{3} = 12$

$$10x - 7 = 36$$
$$10x = 43$$
$$x = \frac{43}{10}$$

b. $x^2 - 9x = -20$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$
$$(x-4)(x-5) = 0$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 5$$

c. $32 - 4x = 12 + 2x$

$$-4x - 2x = 12 - 32$$
$$-6x = -20$$
$$6x = 20$$
$$x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

d. $x^2 + 10x + 24 = 0$

$$(x+6)(x+4) = 0$$
$$x_1 = -6$$
$$x_2 = -4$$

e. $-\frac{3}{x} + x = 0$

$$-3 + x^2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$
$$x_1 = \sqrt{3}$$
$$x_2 = -\sqrt{3}$$

10. Hace 15 años la edad de Mario era el triple de la edad de Leandro, dentro de 10 años la edad de Mario será solamente el doble de la edad de Leandro ¿Cuál es la edad actual de Mario y de Leandro?

$$x = Edad\ actual\ de\ Mario$$
$$y = Edad\ actual\ de\ Leandro$$
$$(x - 15) = 3(y - 15)$$
$$(x + 10) = 2(y + 10)$$

$$x - 15 = 3y - 45$$
$$x - 3y = -30$$

$$x + 10 = 2y + 20$$
$$x - 2y = 10 \rightarrow x = 10 + 2y$$
$$10 + 2y - 3y = -30$$
$$-y = -40$$
$$y = 40$$
$$x = 10 + 2(40)$$

$$x = 90$$

La edad actual de Mario es 90 años y la de Leandro 40 años

11. Un salto largo se ejecuta según la ecuación $y = \frac{5}{4} - \frac{x^2}{11}$ donde y (metros) es la altura del salto y x (metros) es la distancia horizontal recorrida. Si el atleta alcanza una altura de 0,25 metros ¿qué distancia horizontal recorrió?

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{x^2}{11}$$
$$11 = 55 - 4x^2$$
$$4x^2 = 55 - 11$$
$$x = \sqrt{\frac{44}{4}} = \sqrt{11}$$

El atleta saltó $\sqrt{11}$ metros

12. La longitud l de una circunferencia de radio r es $l = 2\pi r$, si la rueda de una bicicleta tiene un radio de 0,30 metros ¿cuántos giros de la rueda son necesarios para recorrer 5014 metros?

$$l = 2\pi(0{,}30)$$
$$n = \frac{5014}{0{,}60\pi} = \frac{501400}{60\pi} = \frac{50140}{6\pi} = \frac{25070}{3\pi} \cong 2660$$

Se requieren aproximadamente 2660 giros

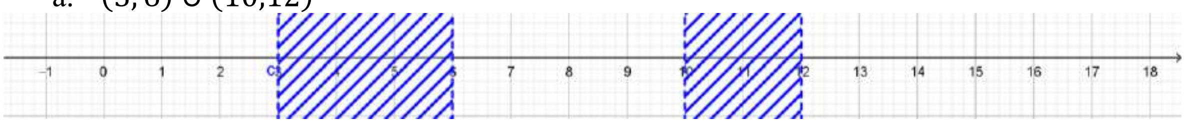
PÁGINA 330

1. Exprese simbólicamente las proposiciones
   a. Cuarenta y cinco es menor que cien.
   $$45 < 100$$
   b. Diez es mayor que ocho
   $$10 > 8$$
   c. Menos cuatro es mayor que menos 5
   $$-4 > -5$$
   d. Cero es mayor que menos dos
   $$0 > -2$$
   e. Menos tres es menor que siete.
   $$-3 < 7$$
2. Represente cada proposición desde el punto de vista del otro número
   a. $3 < 5$
   $$5 > 3$$
   b. $12 \geq 11$
   $$11 \leq 12$$
   c. $-1 > -5$
   $$-5 < -1$$
   d. $11 < 20$
   $$20 > 11$$

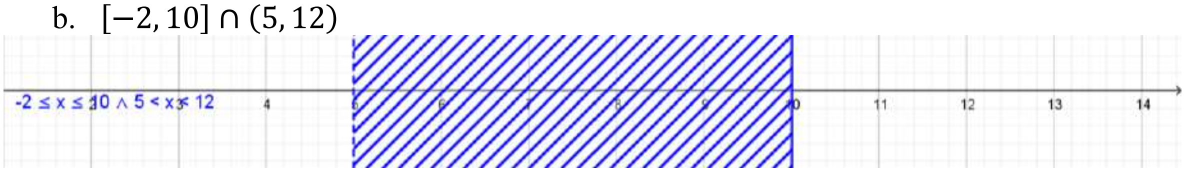
e. $0{,}5 < 0{,}7$

$$0{,}7 > 0{,}5$$

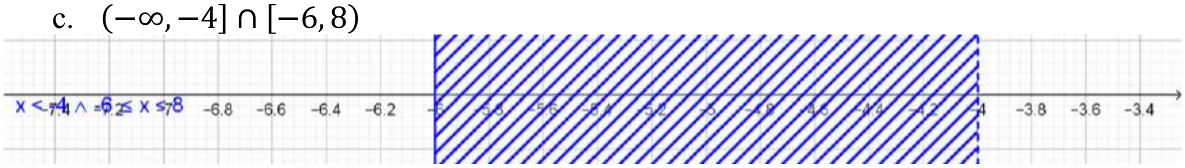
3. Los siguientes intervalos están conformados por números reales, expréselos mediante el lenguaje normal.
   a. $[4, 9]$
   Números reales mayores o iguales que cuatro y menores o iguales que nueve
   b. $(-\infty, 3]$
   Números reales menores o iguales que tres
   c. $(1, 5)$
   Números reales mayores que uno y menores que cinco
   d. $[-5, 8)$
   Números reales mayores o iguales que menos cinco y menores que ocho
   e. $(3, 10]$
   Números reales mayores que tres y menores o iguales que diez
4. Represente gráficamente las operaciones entre intervalos
   Se representa solamente el conjunto solución el cual fue elaborado con Geogebra.
   a. Con la ayuda del teclado virtual de Geogebra se escribe cada intervalo en notación de inecuación por separado, por ejemplo (3,6) se escribe: 3<x<6.
   b. Geogebra asigna una letra a cada inecuación. Utilice esas letras para escribir en la barra de entrada la unión o la intersección usando los símbolos de la lógica proposicional.
   a. $(3, 6) \cup (10{,}12)$



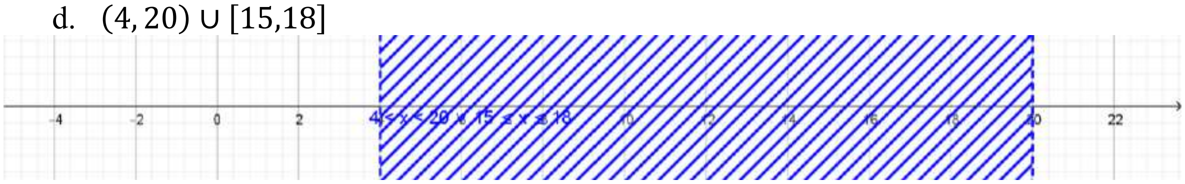
   b. $[-2, 10] \cap (5, 12)$



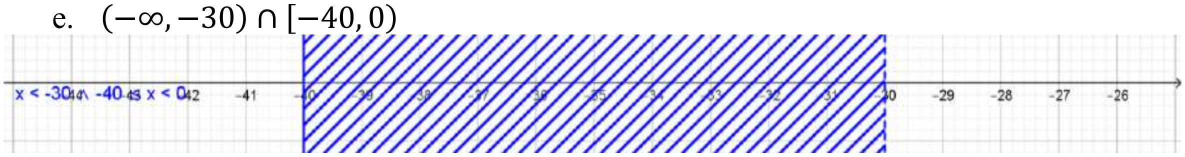
   c. $(-\infty, -4] \cap [-6, 8)$



   d. $(4, 20) \cup [15{,}18]$



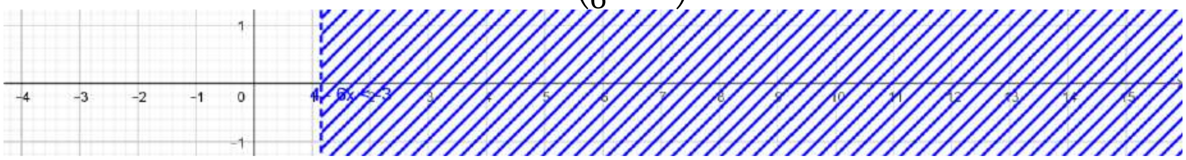
   e. $(-\infty, -30) \cap [-40, 0)$



5. Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese su respuesta en notación de conjunto, notación de intervalo en forma gráfica.

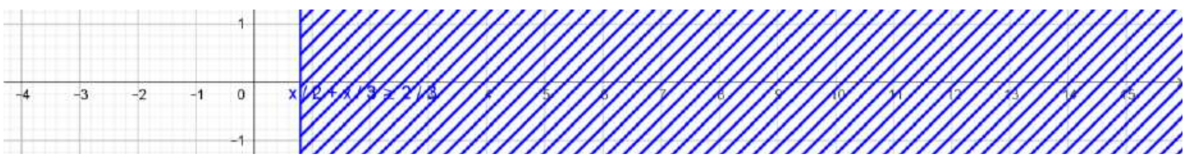
a. $4 - 6x < -3$

$$-6x < -7$$
$$6x > 7$$
$$x > \frac{7}{6}$$
$$CS = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x > \frac{7}{6}\right\}$$
$$CS = \left(\frac{7}{6}, +\infty\right)$$



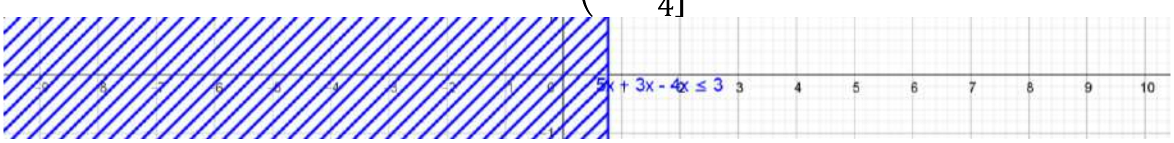
b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{2}{3}$

$$\frac{5x}{6} \geq \frac{2}{3} \rightarrow x \geq \frac{12}{15} \rightarrow x \geq \frac{4}{5}$$
$$CS = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq \frac{4}{5}\right\}$$
$$CS = \left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$$



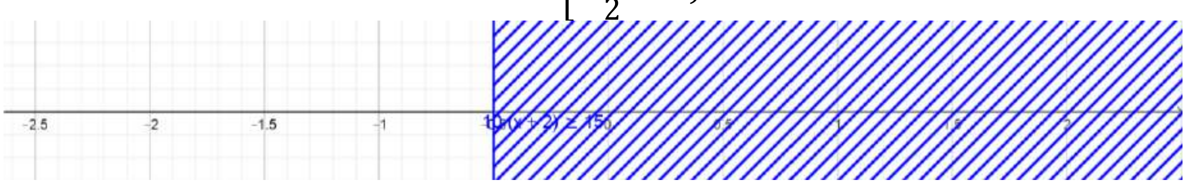
c. $5x + 3x - 4x \leq 3$

$$4x \leq 3 \rightarrow x \leq \frac{3}{4}$$
$$CS = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq \frac{3}{4}\right\}$$
$$CS = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$$



d. $10(x + 2) \geq 15$

$$10x + 20 \geq 15 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$
$$CS = \left\{x \in \mathbb{R}/x \geq -\frac{1}{2}\right\}$$
$$CS = \left[-\frac{1}{2} . +\infty\right)$$



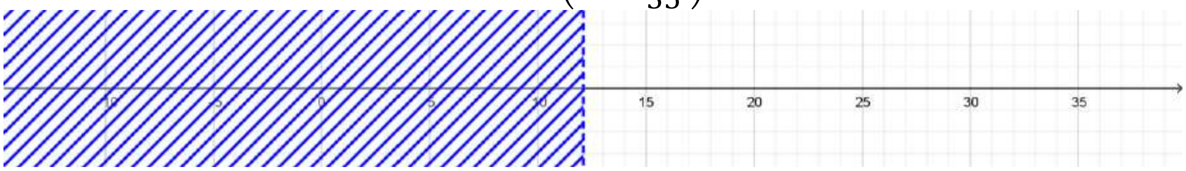
e. $\frac{4}{7}-\frac{5x}{8}>-7$

$$32-35x>-392 \rightarrow -35x>-424 \rightarrow 35x<424$$

$$x<\frac{424}{35}$$

$$CS=\left\{x \in \mathbb{R} \, / \, x<\frac{424}{35}\right\}$$

$$CS=\left(-\infty,\frac{424}{35}\right)$$



6. Resuelva las inecuaciones siguientes

a. $|4x+5| \leq 3$

$$-3 \leq 4x+5 \leq 3$$

$$-8 \leq 4x \leq -2$$

$$-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

$$CS=\left\{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

b. $\frac{|x-4|}{12} \geq 5$

$$x-4 \leq -5 \qquad\qquad x-4 \geq 5$$

$$x \leq -1 \qquad\qquad x \geq 9$$

$$CS=\{x \in \mathbb{R}/x \leq -1 \vee x \geq 9\}$$

c. $\frac{3x+7}{4x+9} \geq 11$

$$\frac{3x+7}{4x+9}-11 \geq 0 \rightarrow \frac{3x+7-44x-99}{4x+9} \geq 0$$

$$\frac{-41x-92}{4x+9} \geq 0$$

$$-41x-92=0 \rightarrow x=-\frac{92}{41} \cong -2{,}24$$

$$4x+9=0 \rightarrow x=-\frac{9}{4} \cong -2{,}25$$

Intervalo $\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right)$

$$Si\ x=-5 \rightarrow \frac{-41(-5)-92}{4(-5)+9}=-\frac{113}{11}$$

Intervalo negativo

Intervalo $\left(-\frac{9}{4},-\frac{92}{41}\right)$

$$Si\ x=-2{,}245 \rightarrow \frac{-41(-2{,}245)-92}{4(-2{,}245)+9}=2{,}25$$

Intervalo positivo

Intervalo $\left(-\frac{92}{41},+\infty\right)$

$$Si\ x=0\rightarrow\frac{-41(0)-92}{4(0)+9}=-\frac{92}{9}$$

Intervalo negativo

$$CS=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{9}{4}<x\leq-\frac{92}{41}\right\}$$

d. $x^2-144\geq 0$

$$(x+12)(x-12)\geq 0$$
$$x_1=-12;\ x_2=12$$

Intervalo $(-\infty,-12)$

$$Si\ x=-15\rightarrow(-15)^2-144=81$$

Intervalo positivo

Intervalo $(-12{,}12)$

$$Si\ x=0\rightarrow(0)^2-144=-144$$

Intervalo negativo

Intervalo $(12,+\infty)$

$$Si\ x=15\rightarrow(15)^2-144=81$$

Intervalo positivo

$$CS=\{x\in\mathbb{R}/-x\leq-12\vee x\geq 12\}$$

e. $x^2-x-20\leq 0$

$$(x-5)(x+4)\leq 0$$
$$x_1=-4;\ x_2=5$$

Intervalo $(-\infty,-4)$

$$Si\ x=-5\rightarrow(-5)^2-(-5)-20=10$$

Intervalo positivo

Intervalo $(-4{,}5)$

$$Si\ x=0\rightarrow(0)^2-(0)-20=-20$$

Intervalo negativo

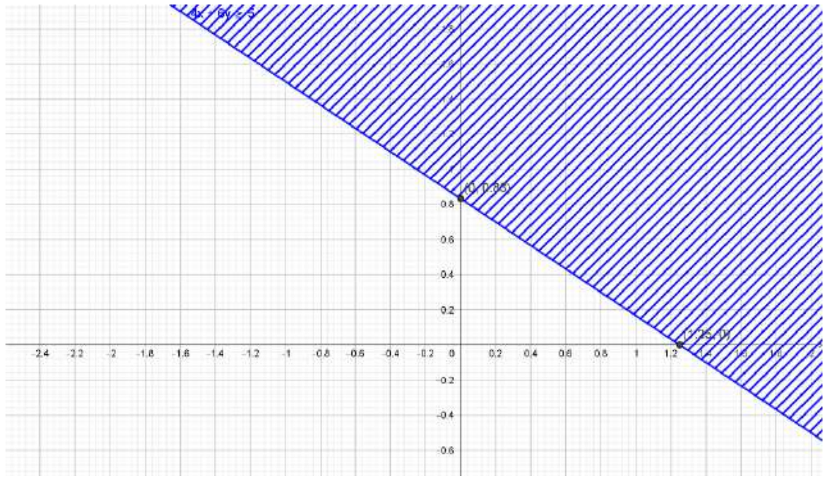
Intervalo $(5,+\infty)$

$$Si\ x=6\rightarrow(6)^2-(6)-20=10$$

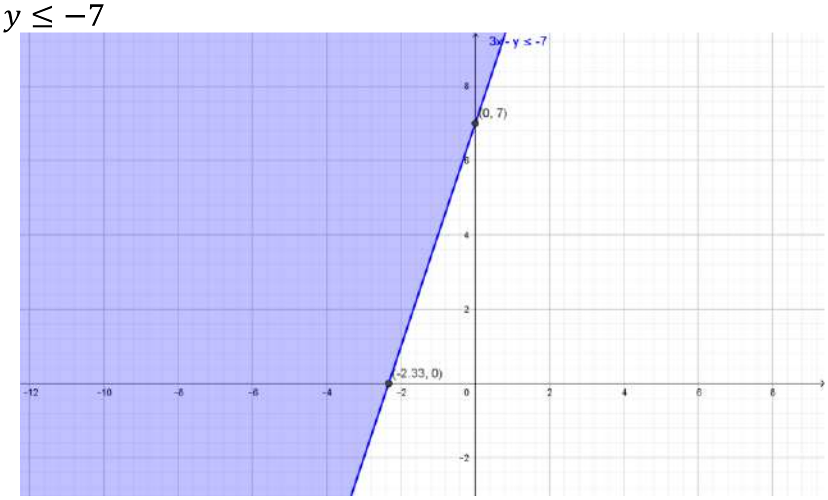
Intervalo positivo

$$CS=\{x\in\mathbb{R}/-4\leq x\leq 5\}$$

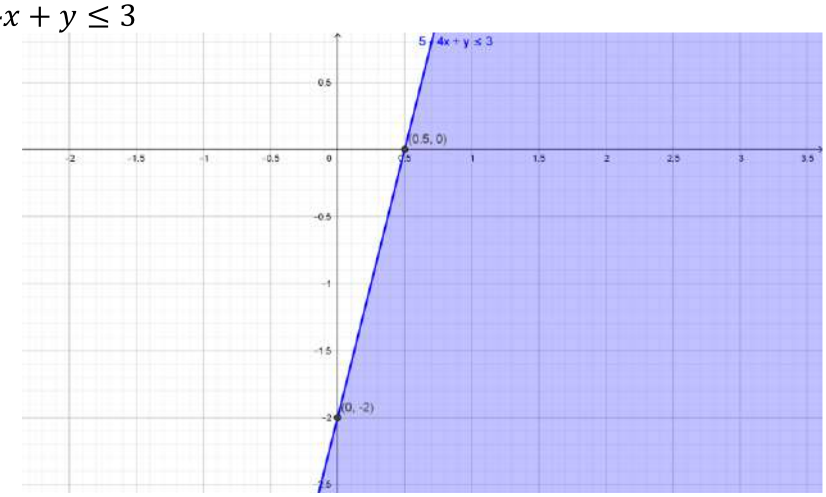
7. Haga la gráfica del conjunto solución de las inecuaciones
   a. $4x+6y\geq 5$



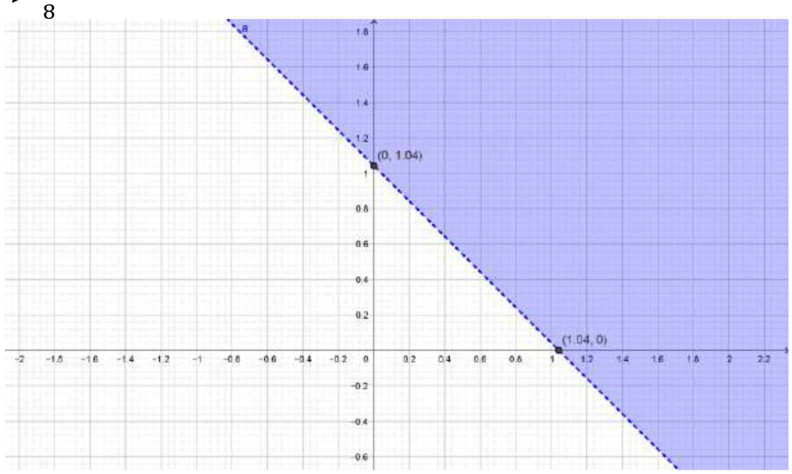
b. $3x - y \leq -7$



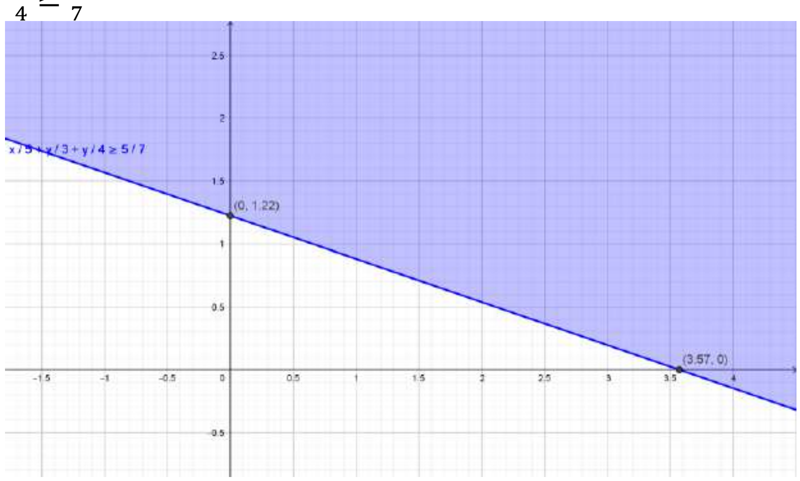
c. $5 - 4x + y \leq 3$



d. $\frac{x+y}{5}+\frac{2}{3}>\frac{7}{8}$

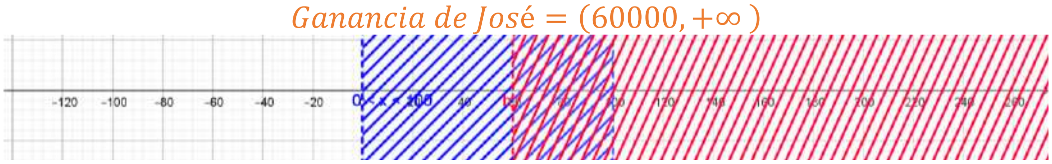


e. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{y}{4}\geq\frac{5}{7}$



8. Si Pedro gana mensualmente menos de Bs 100 000 y José gana mensualmente más de Bs 60 000. Haga una gráfica del conjunto solución de estas proposiciones.

$$Ganancia\ \ de\ Pedro = (0, 100000)$$
$$Ganancia\ de\ José = (60000, +\infty\ )$$



9. El precio de venta de un producto es Bs 1200, la empresa que lo fabrica tiene unos costos fijos de Bs 12 000 y unos costos variables de Bs. 580 por cada unidad producida. Indique cuántas unidades debe producir y vender la empresa para que tenga una utilidad de al menos Bs. 8 000 000.

$$Utilidad(U) = Ingresos\ (I) - Costos\ (C)$$
$$x = unidades\ producidas\ y\ vendidas$$
$$I = 1\ 200x$$

$$C = 580x + 12\ 000$$
$$U \leq 8\ 000\ 000$$
$$1\ 200x - 580x - 12\ 000 \geq 8\ 000\ 000$$
$$620x \leq 8\ 012\ 000$$
$$x \geq 12\ 922{,}58$$

La empresa debe producir al menos 12 923 unidades.

10. Se desea construir un edificio en un lote de terreno rectangular, el área para la construcción es 1 200 metros cuadrados. Cuáles deben ser las dimensiones del terreno si se requiere al menos 400 metros cuadrados para áreas verdes y servicios y uno de los lados está limitado a 35 metros.

$$Area\ del\ terreno = 35x$$
$$35x \geq 1\ 200 + 400$$
$$35x \geq 1\ 600$$
$$x \geq 45{,}71$$

El terreno debe medir 35 m de ancho y al menos 45,71 metros de largo.

PÁGINA 407

1. Dadas las funciones siguientes:

$$f(x) = 4 - 7x \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \quad h(x) = \frac{x^2 + 11}{x - 3}$$

Calcular las imágenes:

a. $f(2)$

$$f(2) = 4 - 7(2) = 4 - 14 = -10$$
$$f(2) = -10$$

b. $g(-3)$

$$g(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + 4 = -27 - 18 + 4 = -41$$
$$g(-3) = -41$$

c. $h(-2)$

$$h(-2) = \frac{(-2)^2 + 11}{(-2) - 3} = \frac{15}{-5} = -3$$
$$h(-2) = -3$$

d. $h(4)$

$$h(4) = \frac{(4)^2 + 11}{(4) - 3} = \frac{27}{1} = 27$$

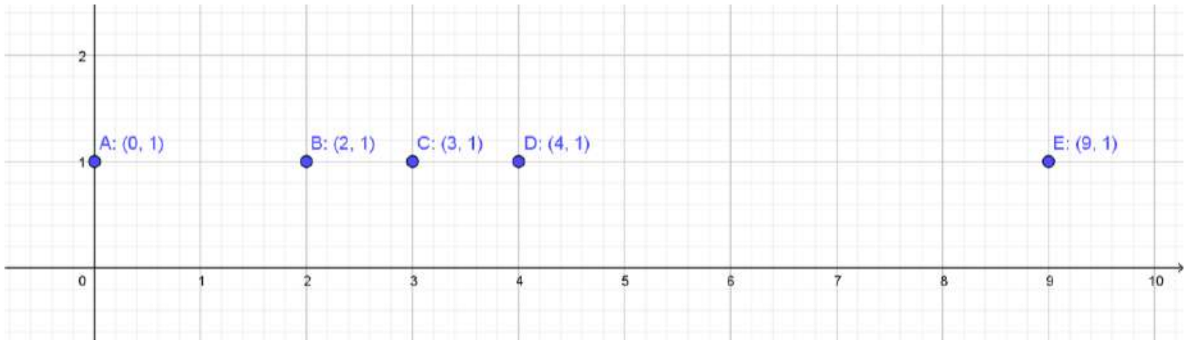
$$h(4) = 27$$

e. $g(10)$

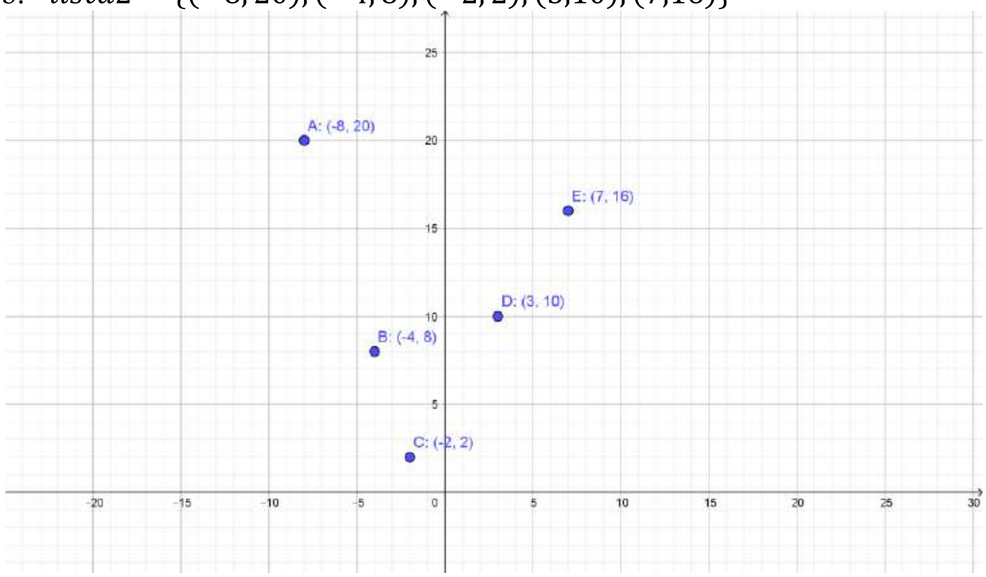
$$g(10) = (10)^3 - 2(10)^2 + 4 = 804$$
$$g(10) = 804$$

2. Represente a cada lista de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas

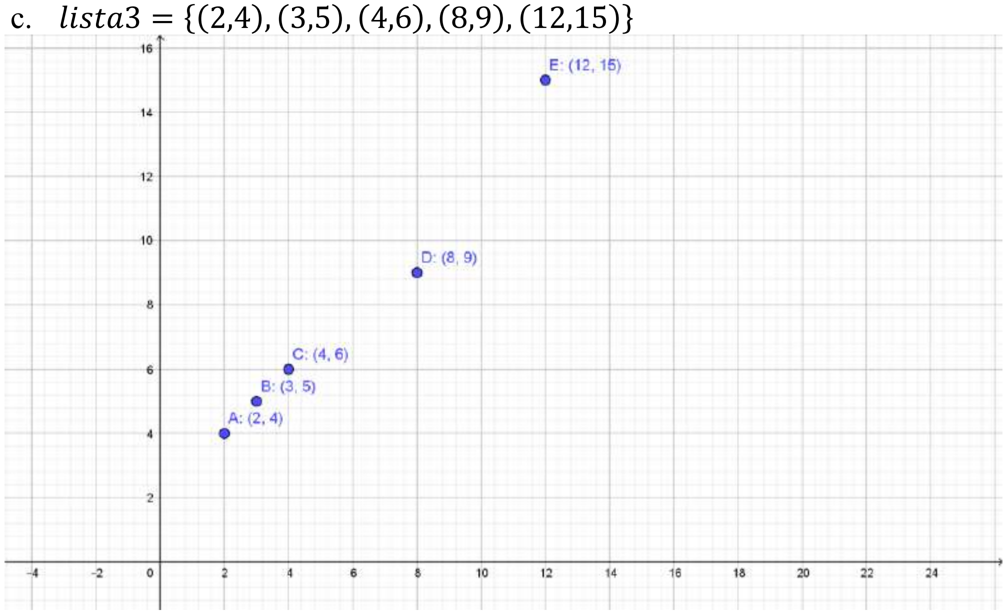
a. $lista1 = \{(0,1), (2,1), (3,1), (4,1), (9,1)\}$



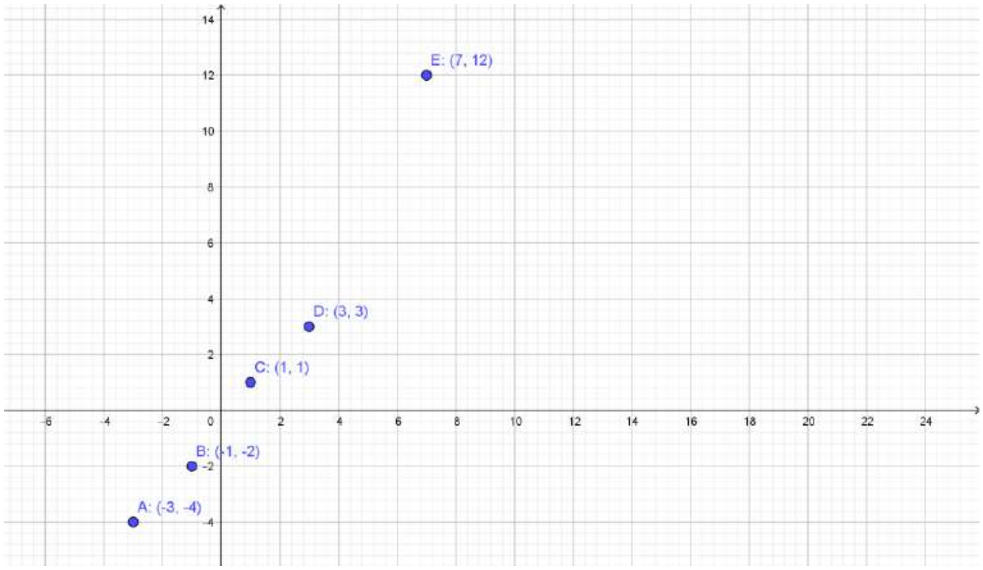
b. $lista2 = \{(-8, 20), (-4, 8), (-2, 2), (3,10), (7,16)\}$



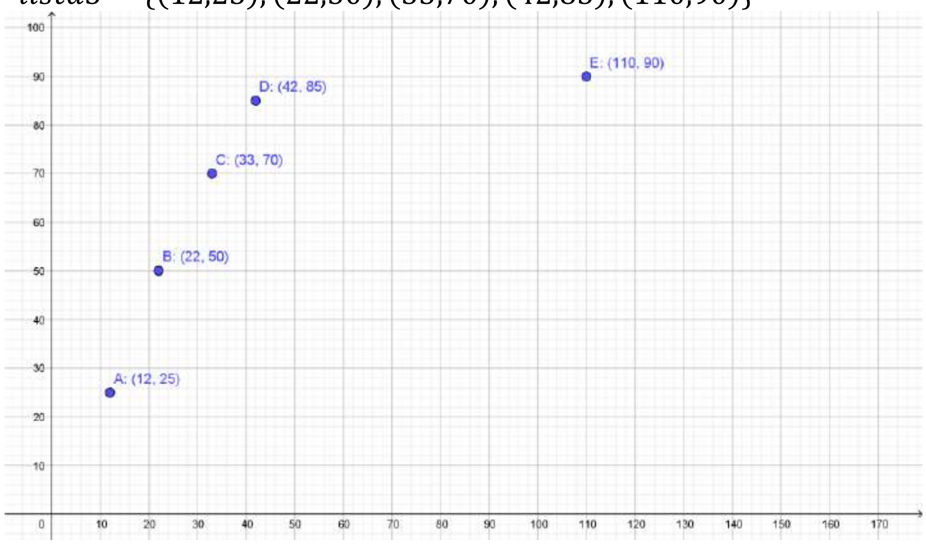
c. $lista3 = \{(2,4), (3,5), (4,6), (8,9), (12,15)\}$



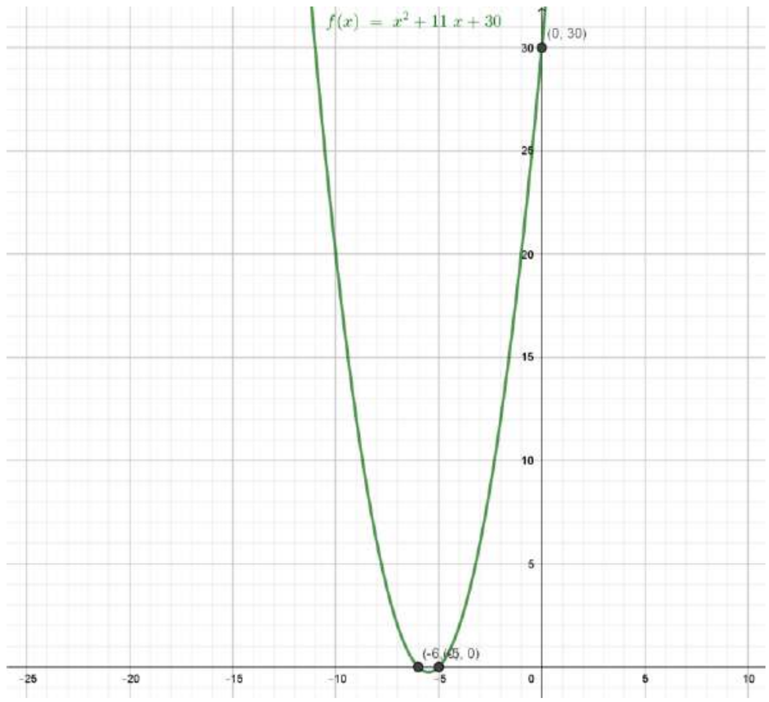
d. $lista4 = \{(-3, -4), (-1, -2), (1,1), (3,3), (7,12)\}$



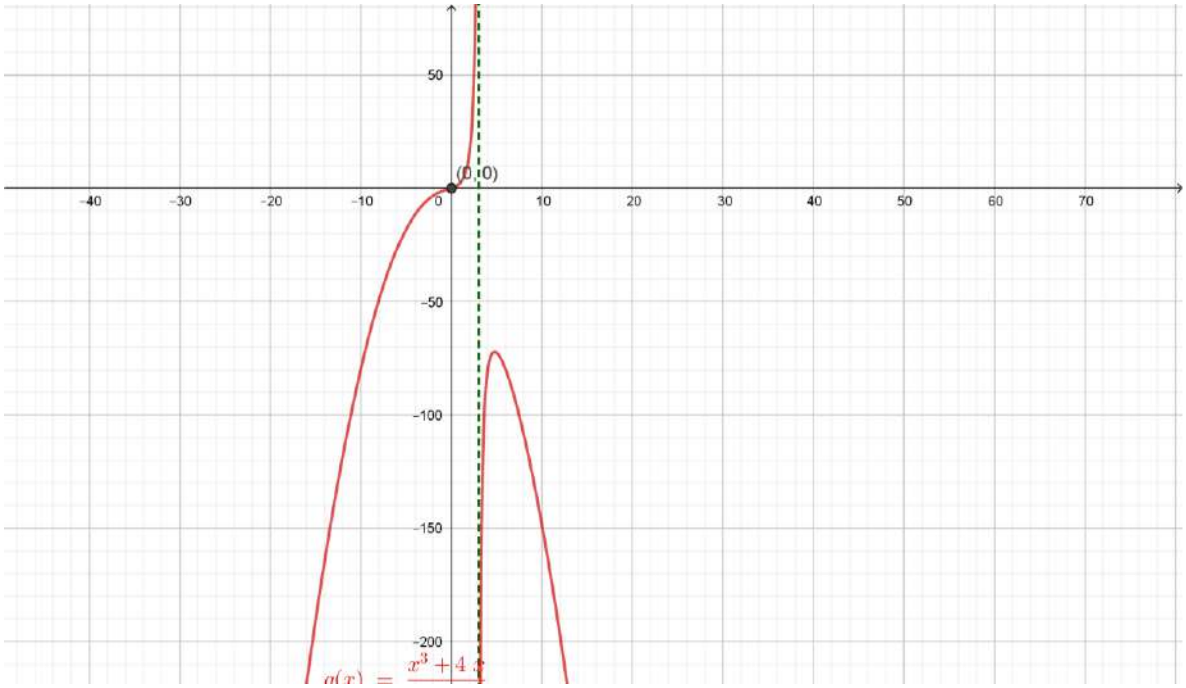
e. $lista5 = \{(12,25), (22,50), (33,70), (42,85), (110,90)\}$



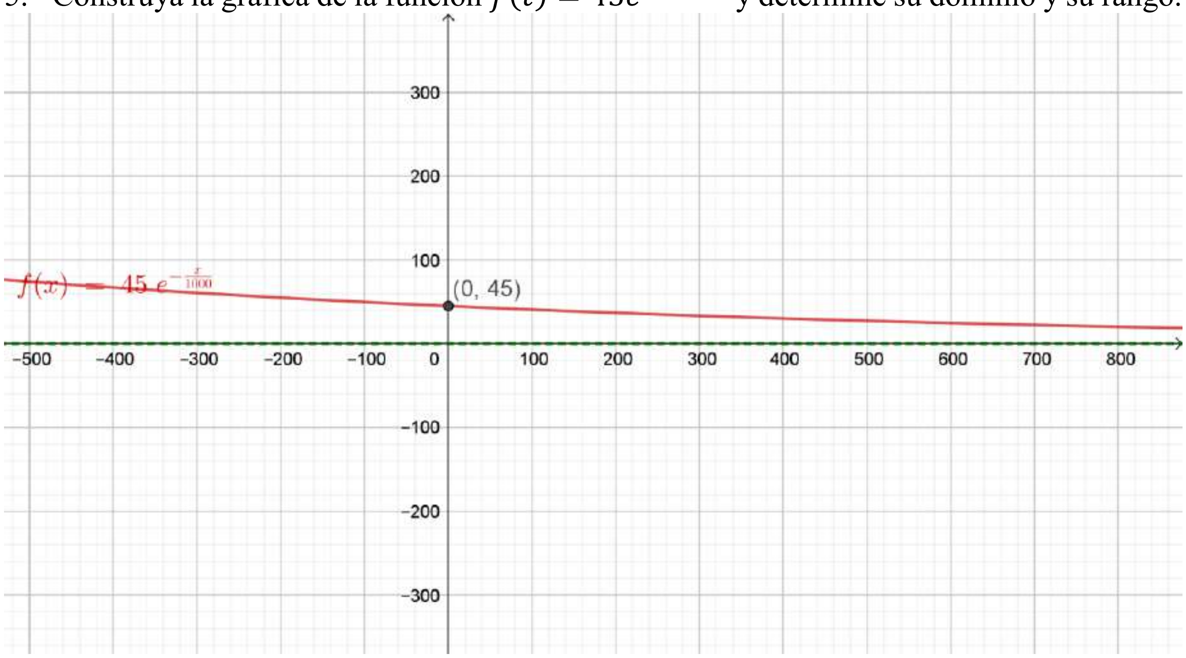
3. Dada la función $f(x) = x^2 + 11x + 30$, determine
   a. Dominio
   $$Domf(x) = \mathbb{R}$$
   b. Cortes con el eje x
   $$y = 0 \rightarrow x^2 + 11x + 30 = 0$$
   $$(x + 5)(x + 6) = 0$$
   $$x = -5 \;\; punto\ (-5,0)$$
   $$x = -6 \;\; punto\ (-6,0)$$
   c. Cortes con el eje y
   $$x = 0 \rightarrow y = 30 \;\; punto\ (0,30)$$
   d. Gráfica de la función



4. Dada la función $g(x) = \frac{x^3+4x}{3-x}$ determine
   a. Dominio de la función
   $$Domg(x) = \mathbb{R} - \{3\}$$
   b. Cortes con el eje x
   $$y = 0 \rightarrow x^3 + 4x = 0 \rightarrow x(x^2 + 4) = 0$$
   $$x = 0 \;\; punto\ (0{,}0)$$
   $$x^2 = -4 \;\; Sin\ respuesta\ real$$
   c. Cortes con el eje y
   $$x = 0 \rightarrow y = 0 \;\; punto\ (0{,}0)$$
   d. Utilice software para hacer la gráfica e indique las asíntotas y el rango de la función.
   $$Rgog(x) = \mathbb{R}$$

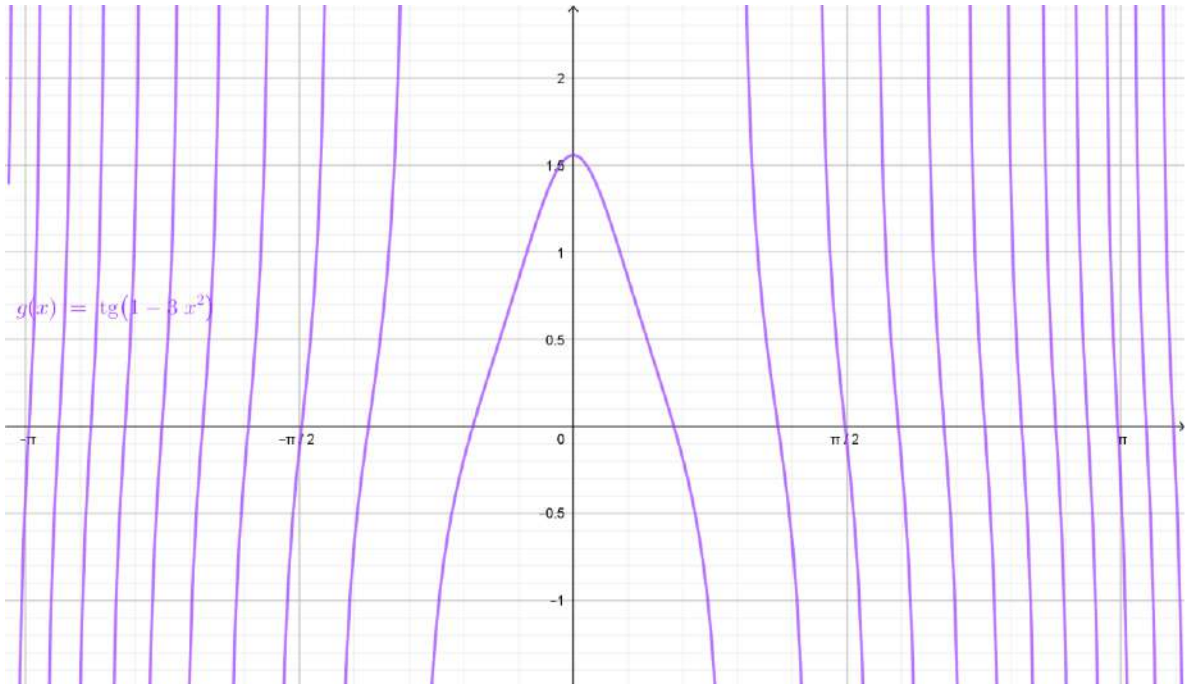


5. Construya la gráfica de la función $f(t) = 45e^{-0{,}001t}$ y determine su dominio y su rango.



$$Dom f(t) = \mathbb{R}$$
$$Rgo f(t) = \{y \in \mathbb{R} \;/\; y > 0\}$$

6. Construya la gráfica de la función $g(x) = tang(1 - 3x^2)$.



7. El valor futuro de una inversión V_f se determina así:

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

Donde V_p es el valor presente, i es la tasa de interés expresada en decimales del cero al 1. n es el número de períodos.

¿Cuánto recibirá una persona que invierte Bs. 1000000 en depósito a plazo fijo por dos años, si se le reconoce una tasa de interés de 24% anual?

$$V_f = 1000000(1+0{,}24)^2$$

$$V_f = 1000000(1{,}5376) = 1537600$$

La persona recibe Bs 1537600 al final del segundo año.

8. Una computadora se compra en Bs. 2000000 y desde el momento de su compra se empieza a depreciar según la función $V = 2000000e^{-0{,}0004t}$ con t expresado en días. Indique el valor de la computadora a los 2 años de su compra.

$$2 \text{ años} \frac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} = 730 \text{ días}$$

$$V = 2000000e^{-0{,}0004(730)} = 1493537{,}07$$

Luego de dos años el valor de la computadora es Bs 1493537,07.

9. Se va a construir un depósito subterráneo para almacenar agua potable, el largo debe ser 1 metro y el ancho 0,8 metros; hay libertad para la profundidad siempre que sea entre 1 metro y 2 metros. Construya expresión para la función del volumen del depósito ¿Cuál es el dominio de la función?

$$Largo = l = 1$$

$$Ancho = a = 0{,}8$$

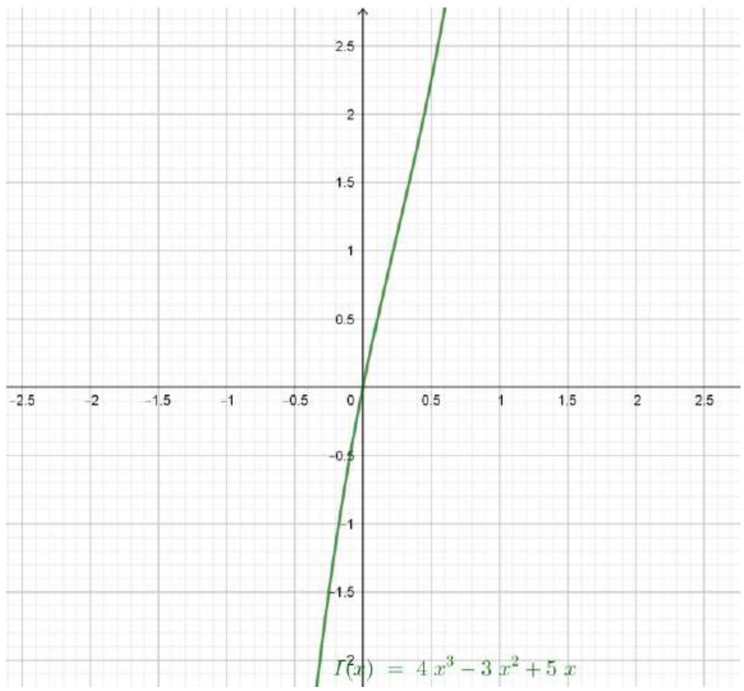
$$Profundidad = y$$

$$Volumen = V = 0{,}8y$$
$$V = 0{,}8y$$
$$DomV = \{y \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq y \leq 2\}$$

10. La función de ingreso mensual de una empresa es $I(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x$ donde x son las unidades producidas y vendidas. Determine el ingreso mensual si se producen 100 unidades, construya la gráfica de la función.

$$Si\ x = 100 \rightarrow I(100) = 4(100)^3 - 3(100)^2 + 5(100)$$
$$4000000 - 30000 + 500 = 3970500$$

El ingreso mensual es Bs 3970500 cuando se producen y venden 100 unidades.



Indice

D

E

F

G

I

P

R

S

T

U

V

MATEMÁTICA GENERAL

UNA VISIÓN PRÁCTICA CON APOYO EN LAS TIC

Se trata de una excelente obra realizada por Dr. Aníbal Luna en la que se desarrolla el contenido del subproyecto matemática general que se imparte en la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora y mediante la cual se logra combinar de una manera agradable los aspectos teóricos con las tecnologías de la información y la comunicación, específicamente en cuanto al uso de software especializado en matemática. A lo largo de seis capítulos, se hace un recorrido por los elementos de la lógica proposicional, la teoría de conjuntos, los fundamentos del álgebra, los sistemas de numeración, las inecuaciones y las funciones reales, mediante la ejemplificación y la resolución de ejercicios, casi todos ellos apoyados en Geogebra, wxMaxima y la hoja de cálculo, pero siempre tomando en consideración las bases teóricas que han servido de fundamento a esos resultados. La presencia de abundantes ejemplos e información gráfica facilita el uso del software y permite al estudiante adentrarse en el mundo abstracto de la matemática de una forma desapercibida.

ISBN: 978-980-248-249-8
9 789802 482498