Alirio Pérez

Matemática para administradores

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Colección: **Docencia Universitaria**

Matemática para administradores

Primera edición, 2020

Diseño de cubierta:
Gustavo Quintana

Maquetación:
Alirio Pérez

Depósito Legal: BA2020000020
ISBN: 978-980-248-248-1

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez

INDICE

Contenido

PROLOGO

Este es un libro texto es un cumulo de experiencia que he obtenido en mi carrera profesional como profesor de matemática y cálculo en las distintas instituciones de educación superior que laborado como profesor. Esta obra que servirá de guía a los estudiantes y profesores de la carrera de administración y carreras afines, trato de ser lo más sencillo posible, dándole en principio las definiciones matemáticas con sus propiedades e ilustrando con figuras y ejemplos.

Además al final de cada capítulo resuelvo una gama de ejercicios donde le indico paso por paso lo que se tiene que hacer para resolverlo y luego le coloco varios ejercicios propuestos.

Doy gracias a todos los estudiantes ya que fueron ellos lo que hicieron posible la elaboración de esta obra, ya que en cada curso que dictaba preparaba el material de apoyo y lo iba mejorando en el transcurso que pasaban los semestres, también tengo que agradecer a la universidad que siembra ya que estoy recogiendo la cosecha que he sembrado en esta casa de estudio la UNELLEZ: este libro texto

Este texto comienza con un repaso de los Conjuntos Numéricos, que constituye el capitulo cero. El resto de los ocho (8) capítulos contiene las nociones de: Inecuaciones, Funciones, Límite y Continuidad, Derivadas, Integrales y Ecuaciones Diferenciales. En cada una de ellas con sus aplicaciones a las Ciencias Sociales.

El Titulo que poseo es de Licenciado en Matemáticas, egresado de la Universidad del Zulia y de Magíster Scientiaarum en Administración de la Universidad Ezequiel Zamora. Actualmente me desempeño como Profesor a dedicación exclusiva con categoría de Asociado en la Universidad Ezequiel Zamora, en las Carreras de Administración, Contaduría, Educación, Ingeniería, Pesca Continental y Planificación a nivel de Pregrado y en las Maestría de En Administración: Mención Gerencia General, En Administración: Mención Gerencia y Planificación Institucional, En Ciencias de la Educación Superior Mención: Docencia Universitaria.

CAPÍTULO 0

CONJUNTOS NUMERICOS

Este capítulo se estudiaran: *CONJUNTOS NUMERICOS*: Conjunto inductivo, Conjunto de los números enteros positivos, Conjunto de los números enteros negativos, Conjunto de los números enteros, Conjunto de los números racionales o fraccionarios, Conjunto de los números primos, Conjunto de los números irracionales, Conjunto de los números reales, Propiedades de los números reales, Mínimo común múltiplo, Máximo común divisor, Números coprimos. *OPERACIONES EN $\Re$:* Suma, resta, multiplicación y división de números reales, aplicaciones de los números reales.

CONJUNTOS NUMERICOS

Definición 1: Un conjunto *S* se dice que es *inductivo* si cumple con las siguientes condiciones:

1. $1 \in S$
2. Si $s \in S \Rightarrow s + 1 \in S$

Por medio de la definición anterior definimos el número 1, tomando s=1 y aplicando la segunda propiedad (1 + 1) definimos el número 2 y otra vez por la propiedad 2 obtenemos (2 + 1) y lo llamamos 3 y así sucesivamente:

$3 + 1 = 4$

$4 + 1 = 5$

.

.

.

$n - 1 + n = n$

El conjunto formado {1, 2, 3, 4, …... n - 1, n, …...} recibe el nombre de los *enteros positivos* y lo denotaremos Z^+.

Definición 2: Un conjunto se dice que es denso o cerrado con respecto a una operación, si para cada par de elementos del conjunto se tiene que al realizar dicha operación el resultado queda dentro del conjunto.

Si queremos saber si el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición tenemos que ver si se cumple la definición de densidad. $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow a + b \in Z^+$, vemos que siempre esto es cierto y de igual manera $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow a x b \in Z^+$, por lo tanto, el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición y el producto, como este conjunto no es cerrado para la sustracción ya que $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow a - b \notin Z^+$, entonces formamos el conjunto de los <u>enteros negativos</u> que se define como $Z^- = -Z^+$, es decir, $Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ y $Z^- = \{.... -3, -2, -1\}$.

<u>Definición 3:</u> Se define el <u>*conjunto de los números enteros negativos*</u> como aquel conjunto que está constituidos por el conjunto de los enteros positivo pero con signo contrario, e.i. $Z^- = \{......., -3, -2, -1\}$.

<u>Definición 4:</u> Se define como *el <u>número cero</u>* {0} al punto medio de los números pertenecientes a Z^+ y Z^-, es decir,

$\{0\} = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), ..., (-n, n), ...\}$.

<u>Definición 5:</u> Se define el <u>*conjunto de los números enteros*</u> como aquel conjunto que está unido por los tres conjuntos formados anteriormente, y lo denotamos por *Z*, es decir: $Z = Z^- U Z^+ U \{0\}$, este conjunto es cerrado para la adición, producto y sustracción, pero no es cerrado para el cociente, es por ello que tenemos que formar un conjunto donde el cociente este bien definido y este conjunto es el que definiremos a continuación.

<u>Definición 6:</u> Se define el *conjunto de los <u>números racionales o fraccionarios</u>* como el conjunto de números cuyo cociente es el conjunto de los números enteros sobre la unión de los enteros positivo y los enteros negativos y este conjunto lo denotaremos por *Q*, es decir, $Q=\frac{Z}{Z^{-}UZ^{+}}$, al realizar este cociente siempre resulta que queda una cantidad decimal periódica, es por ello que este conjunto también se puede expresar como: $Q=z,\overline{abcd........}$ donde z, a, b, c. son números enteros, es decir, z, a, b, c, d,…..$\in Z$. Cuando el número que se repite es el cero no se coloca, es decir, queda tácito, cuando los números son distintos del cero se le coloca una raya arriba del período, ejemplo: $\frac{8}{2}=4$, no hace falta colocar el cero, ejemplo: $\frac{1}{3}=0{,}33....$, como el número que se repite es distinto de cero, se tiene que escribir $0{,}\overline{3}$; el caso de $\frac{4}{7}=0{,}571428571428.........=0{,}\overline{571428}$

<u>Definición 7:</u> Un número entero se dice que es *<u>primo</u>* si este posee cuatro divisores, y lo denotaremos por: P(Φ)={±2, ±3, ±5, ±7, ±11 ,±13 ...} y definiremos al conjunto de los números enteros que tienen más de cuatro divisores como *<u>compuestos</u>* este conjunto está formado por: {±4, ±6, ± 8, ±9 ,±10, ±12, ...}

***<u>Nota:</u>* Como el número 1 y 0 fueron definidos de manera especial estos no son ni primos ni compuestos.**

<u>Definición 8:</u> Sea *a* un número primo y *n* un número entero, es decir, $a \in P(\Phi)$ y $n \in Z$, entonces, se define $q \in Q$ como aquel conjunto de número que se puede expresar de la manera siguiente: $q=a^n$ que es otra forma de definir a los *<u>números racionales o fraccionarios</u>*.

<u>Definición 9:</u> Si en la expresión $q=a^{n},\ \forall n \notin Z$, este conjunto de números recibe el nombre de *<u>números irracionales</u>* y tienen la particularidad de que nunca dejan una cantidad decimal periódica, es decir, es el complemento del conjunto de los números racionales y lo denotaremos por Q' y sus elementos tienen la forma $p=b^{m/n}$ o $\sqrt[n]{b^m}$, con $p \in Q'$. Por ejemplo: $5^{7/9} = \sqrt[9]{5^9}$

Dónde:

$\sqrt{\ }$: Radical

b: Cantidad sub-radical

m: Potencia de la cantidad sub-radical

n: Índice del radical

<u>Nota:</u>

$$q=a^n \begin{cases} \text{es } \textit{racional} \text{ si } n \in Z \\ \text{es } \textit{irracional} \text{ si } n \notin Z \end{cases}$$

Como números irracionales tenemos el conjunto de raíces que no son exactas. El conjunto de los números racionales (*Q*) es cerrado con respecto a la adición, sustracción, producto y cociente ya que $\forall a, b \in Q$

$\Rightarrow$ a + b, a - b, a$_x$b. $\frac{a}{b} \in Q$. El conjunto de los números irracionales es cerrado solamente para la adición, ya que:

$\forall$a, b$\in Q'$ $\Rightarrow$ a - b$\notin Q'$, a$_x$b$\notin Q'$. $\frac{a}{b} \notin Q'$.

Ejemplo: a=$\sqrt{2}$, b=$\sqrt{8}$, c=$\sqrt{2}$ se tiene a.c$\notin Q'$ y a - c=0$\notin Q'$, a, b$\notin Q'$ y a$_x$b=4$\notin Q'$ a, b$\in Q'$ y $\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \notin Q'$.

Definición 10: Se define el *conjunto de los números reales ($\Re$)* como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, es decir; $\Re$=QUQ$'$. El conjunto de los números reales es cerrado con respecto a las operaciones de adición, sustracción, producto y cociente ya que: $\forall$a, b$\in\Re$ $\Rightarrow$ a + b$\in\Re$, a - b$\in\Re$, a.b$\in\Re$ y $\frac{a}{b} \in\Re$.

Representación gráfica del conjunto de los números reales.

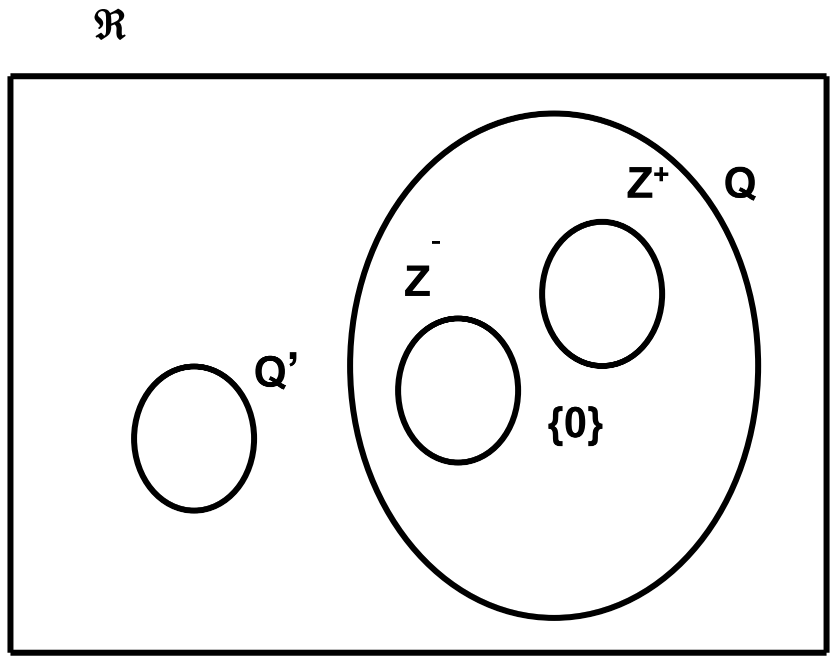


Fig. 1

Representación en la recta de los conjuntos numéricos.

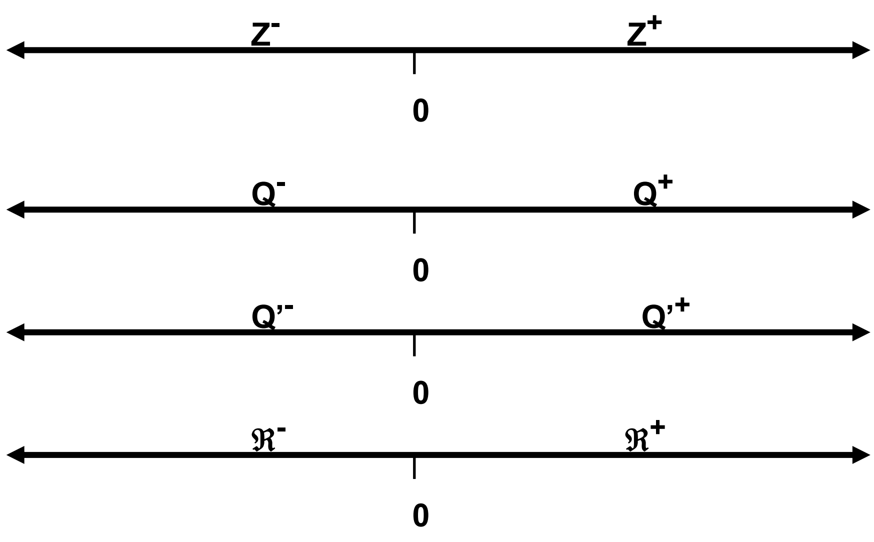


Fig. 2

<u>Definición 11:</u> Definiremos al *conjunto de los números reales ampliados*, como conjunto de números reales acotados por los símbolos $\pm\infty$ y que cumple con las siguientes condiciones:

1. $\pm\infty \pm K = \pm\infty$

2. $\pm\infty . K = \pm\infty$

3. $\dfrac{K}{\pm\infty} = 0$

4. $\dfrac{\pm\infty}{K} = \pm\infty$

5. $\dfrac{K}{0} = \pm\infty$

Donde K es un número real cualquiera distinto de 0.

La recta real ampliada se representa:

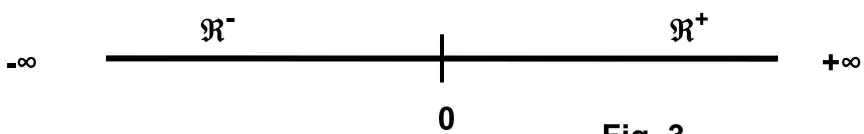


Fig. 3

<u>Propiedades de los números reales</u>

<u>Propiedades de la adición</u>

1. ***<u>Asociativa</u>*: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene,$(a + b) + c = a + (b + c)$, es decir, la operación suma está definido nada más para sumar dos elementos, si en una operación existen más de dos elementos, operamos primero dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.**

   <u>Ejemplo</u>: a.- $(4 + 6) + 5 = 10 + 5 = 15 = 4 + (6 + 5) = 4 + 11 = 15$;

b. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5} = \sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})$

2. ***<u>Conmutativa</u>*: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a + b = b + a$, es decir, el orden de los factores no altera el sumando.**

   <u>Ejemplo</u>: a.- $3 + 5 = 5 + 3 = 8$

b. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

3. ***Elemento neutro o neutro aditivo***: $\forall a \in \Re$, $\exists e \in \Re / a + e = e + a = a$, es decir, en $\Re$ existe un elemento que sumado a cualquier número real deja a este invariante, este número es el cero (e=0).

Ejemplo: a.- 4 + 0=0 + 4=4

b. $\sqrt{2} + 0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

4. ***Elemento simétrico o inverso aditivo***: $\forall a \in \Re$, $\exists\ a^{-1} \in \Re / a + a^{-1} = a^{-1} + a = e = 0$, $\Rightarrow a^{-1} + a = 0 \Rightarrow a^{-1} = -a$, es decir, en $\Re$ todo número tiene un simétrico que al sumarlo a su opuesto me da el cero, a a^{-1}, se le llama ***inverso aditivo***.

Ejemplo: a.- 5 + (-5)= (-5) + 5= 0

b. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

Propiedades del producto

5. ***Asociativa***: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene, $(a_x b)c = a(b_x c)$, es decir, como el producto es una suma en serie y la suma está definido nada más para sumar dos elementos, el producto de igual manera está definida para operar dos elementos, operamos los primeros dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.

Ejemplo: a.- $(4_x6)5=24_x5=120=4(6_x5)=4_x30=120$

b. $(\sqrt{2}_x\sqrt{3})\sqrt{5} = \sqrt{2}(\sqrt{3}_x\sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{6}_x\sqrt{5} = \sqrt{2}_x\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{30} = \sqrt{30}$

6. ***Conmutativa***: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a_x b = b_x a$, es decir, el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo: **a.- $3_x5=5_x3=15$**

b. $\sqrt{2}_x\sqrt{3}=\sqrt{3}_x\sqrt{2}=\sqrt{6}$

7. *Elemento neutro o neutro multiplicativo*: $\forall a\in\Re$, $\exists e\in\Re/a_xe=e_xa=a$, es decir, en $\Re$ existe un elemento que multiplicado a cualquier número real me deja a este invariante, este número es el uno (e=1).

Ejemplo: **a.- $4_x1=1_x4=4$**

b. $1_x\sqrt{2}=\sqrt{2}_x1=\sqrt{2}$

8. *Elemento simétrico o Elemento inverso multiplicativo*: $\forall a\in\Re$, $\exists a^{-1}\in\Re/a.a^{-1}=a^{-1}{}_xa=e=1 \Rightarrow a^{-1}{}_xa=1 \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$, es decir, en $\Re$ todo número tiene un simétrico que al multiplicarlo a su opuesto da como resultado el número uno, a a^{-1} se le llama *inverso multiplicativo*.

Ejemplo: a.- $5_x\frac{1}{5}=\frac{1}{5}{}_x5=1$

b. $\sqrt{2}x\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

9. *Distributiva:* $\forall a, b, c\in\Re$ se tiene: $a(b + c)=a_xb + a_xc=b_xa + c_xa=(b + c)a$.

Ejemplo: **a.- $5(4 + 3)=5_x4 + 5_x3=20 + 15=35=(4 + 3)5=7_x5=35$**

$\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{2}_x\sqrt{3}+\sqrt{2}_x\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3}_x\sqrt{2}+\sqrt{5}_x\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{2}$ ***Elemento absorbente:*** **$\forall a\in\Re$, $\exists 0\in\Re/0a=a0=0$, es decir, en $\Re$ todo número al multiplicarlo por el cero es absorbido por este.**

Definición 12: **Un conjunto que posee las propiedades 1, 3 y 4 recibe el nombre de *Grupo* y si además posee la propiedad 2 recibe el nombre de *Grupo Abeliano o Grupo conmutativo*. Un conjunto que posee**

las propiedades 5 y 7 recibe el nombre de *Anillo* y si además posee la propiedad 6 recibe el nombre de *Anillo Abeliano o Anillo conmutativo* y si además posee la propiedad 8 recibe el nombre de *Anillo con elemento unidad*. Un conjunto que posee las propiedades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 recibe el nombre de *Campo o Cuerpo*, lo que quiere decir, que el conjunto de los números reales es un *Campo* o un *Cuerpo*.

Definición 13: En la recta real diremos que un número es *menor que* ($<$) [mayor que ($>$)] si este se encuentra a la izquierda de este (si este se encuentra a la derecha de este).

Ejemplo: a.- $5<7$ y $9>7$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ y $\sqrt{5} > \sqrt{3}$

10. *Ley de Tricotomía*: $\forall a, b, c \in \Re$ se cumple nada más que una de las siguientes condiciones:

i. $a=b$

ii. $a<b$

iii. $a>b$

11. El conjunto de los números reales es una relación de orden, ya que cumple con las propiedades *reflexiva, antisimétrica y transitiva*:

a. *Reflexiva*: $\forall a \in \Re$ se tiene que $a=a$.

b. *Antisimétrica*: $\forall a, b \in \Re$ se tiene que si $a<b$ y $b<a \Rightarrow a=b$

c. *Transitiva*: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene que si $a<b$ y $b<c \Rightarrow a<c$

Otras propiedades de los reales

12. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re$/ si $a<b \Rightarrow a + c<b + c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5 + 3< 7 + 3 \Rightarrow 8<10$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}+1 < \sqrt{3}+1$

13. $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$, $\exists$c$\in\mathfrak{R}^+$/ si $a<b \Rightarrow a_x c<b_x c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5_x 3<7_x 3 \Rightarrow 15<21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}_x\sqrt{8} < \sqrt{3}_x\sqrt{8}\ \sqrt{16} < \sqrt{24} \Rightarrow 4 < 2\sqrt{6}$

14. $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$, $\exists$c$\in\mathfrak{R}^-$/ si $a<b \Rightarrow a_x c>b.c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5(-3)>7(-3) \Rightarrow -15>-21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{8}) > \sqrt{3}\,(-\sqrt{8}) \Rightarrow -\sqrt{16} > -\sqrt{24} \Rightarrow -4 > -2\sqrt{6}$

15. $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$, $\exists$c$\in\mathfrak{R}$/, si $a<b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 1/5>1/7$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

16. $\forall a\in\mathfrak{R}$ se tiene que $a^2>0$ Si $a=0 \Rightarrow a^2=0$

<u>Ejemplo</u>: a. $2^2 =4>0$ $(-2)^2 =4>0$

b. $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $(-\sqrt{2})^2 = 2$

17. $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$, se tiene que $(a + b)^2 >a^2 + b^2$

<u>Ejemplo</u>: $(3 + 5)^2>3^2 + 5^2 \Rightarrow 8^2 =64>9 + 25=34$

18. $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$ se tiene que si $a_x b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$

<u>Ejemplo</u>: a. $2_x 0=0_x 2=0$

b. $\sqrt{2}_x 0 = 0_x\sqrt{2} = 0$

19. $\forall a, b \in \mathcal{R}$ se tiene que si $a_x b<0 \Rightarrow (a<0 \wedge b>0)$ o $(a>0 \wedge b<0)$

Ejemplo: $-(2_x 3)<0 \Rightarrow (-2<0 \wedge 3>0)$ o $(2>0 \wedge -3<0)$, es decir, $(-2)3= 2(-3)=-6$;

20. $\forall a, b \in \mathcal{R}$ se tiene que si $a_x b>0 \Rightarrow (a>0 \wedge b>0)$ o $(a<0 \wedge b<0)$

Ejemplo: $2_x 3>0 \Rightarrow (2>0 \wedge 3>0)$ o $(-2<0 \wedge -3<0)$, es decir, $2.3= -2(-3)=6$

21. $\forall a, b \in \mathcal{R}, \exists n \in \Re / (a_x b)^n = a^n{}_x b^n$ y $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $(2_x 3)^2=6^2=36 =2^2{}_x 3^2=4_x 9=36$

22. $\forall a, b \in \mathcal{R}, \exists n, m \in \mathcal{R} / a^n{}_x a^m= a^{n+m}$ y $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$

Ejemplo: $2^2{}_x 2^3=4_x 8=32=2^5$ y $\frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{4} = 2^1=2$

23. $\forall a, b \in \mathcal{R}, \exists n \in \mathcal{R} / (a^n)^m = a^{n_x m}$

Ejemplo: $(2^2)^3=4^3=64=2^{2_x 3}=2^6=64$

Definición 14: Se define el *mínimo común múltiplo de dos números enteros* a y b m.c.m(a, b) como el menor número que es dividido por estos exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Hallar el m.c.m(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: $30=2_x 3_x 5$ y $50=2_x 5^2$, luego tenemos que multiplicar los números comunes y no comunes con su mayor exponente,

en este caso: m.c.m(30, 50)=$2_x3_x5^2$=150, fíjese que $\frac{150}{30}$=5, $\frac{150}{50}$=3, note que existen otros números que son divididos por 30 y 50 como son: {300, 450, 600, ...}, pero el menor que cumple con esta condición es el número 150.

Definición 15: Se define el *máximo común divisor de dos números enteros* a y b M.C.D(a, b) como el mayor número que divide a estos números exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes con su menor exponente.

Ejemplo: Hallar el M.C.D(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: 30=2_x3_x5 y 50=2_x5^2, luego tenemos que multiplicar los números comunes con su menor exponente, en este caso: M.C.D(30, 50)=2_x5=10, fíjese que $\frac{30}{10}$=3, $\frac{50}{10}$=5, note que existen otros números que dividen al 30 y 50 como son: {1 y 5}, pero el mayor que cumple con esta condición es el número 10.

Definición 16: Se dice que dos números enteros son *coprimos entre sí*, si su máximo común divisor entre ellos es el número uno, e,i, sean $\forall$a, b$\in Z^+$, si M.C.D(a, b)=1 $\Rightarrow$ a y b son coprimos entre sí.

Ejemplo: los números 5 y 12 son corrimos entre sí porque M.C.D(5, 12)=1

<u>Definición 17:</u> Se define la ***suma de dos números racionales*** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ **como:** $\frac{a_x b + c_x d}{b_x d}$ **$\forall$a, c$\in$*Z* y $\forall$b, d$\in$*Z*$^-$U*Z*$^+$, donde b$_x$d es el m.c.m(b, d) y a$_x$d + b$_x$c es el resultado de dividir cada uno de los miembros del denominador entre el m.c.m y luego multiplicado por cada uno de los miembros del numerador.**

<u>Ejemplo</u>: sumar $\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=\frac{48+35}{60}=\frac{83}{60}$**, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,12)=60, luego se dividió** $\frac{60}{5}$**=12 y este resultado se multiplicó por 4, resultando 48, así mismo se dividió** $\frac{60}{12}$**=5 y este resultado se multiplicó por 7, dando como resultado 35 al sumar 48 + 35=83, por lo tanto, el resultado es:** $\frac{83}{60}$**.**

<u>Definición 18:</u> Se define la *<u>resta de dos números racionales</u>* $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d}$**, de la misma manera que la suma pero utilizado el signo menos «-» en vez del signo más «+».**

<u>Ejemplo</u>: restar $\frac{4}{5}$ - $\frac{7}{12}=\frac{48-35}{60}=\frac{13}{60}$**, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,15)=60, luego se dividió** $\frac{60}{5}$**=12 y este resultado se multiplicó por 4, resultando 12, así mismo se dividió** $\frac{60}{12}$**=5 y este**

resultado se multiplicó por 7, dando como resultado 35, al restar 48 - 35=13, por lo tanto, el resultado es: $\frac{13}{60}$.

<u>Definición 19:</u> Se define el <u>*producto de dos números racionales*</u> $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times c}{b \times d}$, $\forall$a, c$\in$*Z* y $\forall$b, d$\in$*Z*$^{-}$U*Z*$^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a. c, b. d) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre sí.

<u>Ejemplo</u>: Multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{36}{24}$, como el M.C.D(36, 24)=12, dividimos $\frac{36}{12}$=3 y $\frac{24}{12}$=2, luego el resultado de multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$.

<u>Definición 20:</u> Se define el <u>*cociente de dos números racionales*</u> $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times d}{b \times c}$, $\forall$a$\in$*Z* y $\forall$b, c, d$\in$*Z*$^{-}$U*Z*$^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a.d, b.c) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre sí.

<u>Ejemplo</u>: Dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$, como el M.C.D(27, 32)=1, dividimos 27 y 32 entre 1 y luego el resultado de dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$.

<u>Definición 21:</u> Para *sumar o restar dos números irracionales*, se simplifican los radicales dados (números enteros), es decir, se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos, luego se reducen los radicales semejantes y por último se escriben los números irracionales no semejantes con su propio signo.

<u>Ejemplo</u>: Realizar la siguiente operación:

$\sqrt{900}+\sqrt{972}-\sqrt{2352}-\sqrt{882}$

<u>Solución</u>: se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos:

$900=2^3{}_x3^2{}_x5^2$; $972=2^2{}_x3^5$; $2352=2^4{}_x3_x7^2$ y $882=2_x3^2{}_x7^2$, e.i.

$\sqrt{900}=\sqrt{2^3x3^2x5^2}=30\sqrt{2}$; $\sqrt{972}=\sqrt{2^2x3^5}=18\sqrt{3}$; $\sqrt{2352}=\sqrt{2^4x3x7^2}=30\sqrt{3}$ y $\sqrt{282}=\sqrt{2_x3^2x7^2}=21\sqrt{2}$, $\therefore$,

$\sqrt{900}+\sqrt{972}-\sqrt{2352}-\sqrt{882}=30\sqrt{2}+18\sqrt{3}-28\sqrt{3}-21\sqrt{2}=9\sqrt{2}-10\sqrt{3}$.

<u>Definición 22:</u> Para <u>*multiplicar dos números irracionales*</u>, existen dos casos:

1. **Si tienen el mismo índice: se multiplican las cantidades sub-radicales y se deja el mismo índice, e,i,**

   $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=a^{1/n}.b^{1/n}=(ab)^{1/n}=\sqrt[n]{ab}$

   <u>Ejemplo</u>: $\sqrt[3]{2}_x\sqrt[3]{15}=2^{1/3}{}_x5^{1/3}=(2_x5)^{1/3}=\sqrt[3]{30}$

2. **Si tienen distintos índices: se busca el mínimo común índice, se divide este mínimo común índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.**

<u>Ejemplo</u>: $\sqrt[3]{9a^2b}_x\sqrt[4]{27ab^2}=(3^2a^2{}_xb)^{1/3}{}_x(3^3ab^2)^{1/4}=$

$\sqrt[12]{(3^2a^2b)^4(3^3ab^2)^3}=\sqrt[12]{3^{17}a^{11}b^{10}}=3\sqrt[12]{3^5a^{11}b^{10}}$.

<u>Definición 23:</u> **Para *dividir dos números irracionales* se emplean los siguientes pasos:**

1. **Si tienen el mismo índice: se coloca el mismo índice y se dividen las cantidades sub-radicales.**

   <u>Ejemplo</u>: $\dfrac{\sqrt[4]{9a^2b}}{.\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2a^2b}{3^3ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}$

2. **Si tienen distintos índice: se busca el mínimo común índice y se divide este índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.**

   <u>Ejemplo</u>: $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{.\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{(9a^2b)^4}{(27ab^2)^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^8a^8b^4}{3^9a^3b^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^5}{3b^2}}$.

<u>Definición 24:</u> **Se define la *racionalización* como el proceso de convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional (eliminar del denominador el signo radical, ver propiedad del elemento neutro e inverso del producto de números reales).**

<u>Ejemplo</u>: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a^2b}} = 3\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{9a^2b} = \dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{3a^2b}$

<u>Ejemplo</u>: $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)$

se obtiene el neutro multiplicativo a partir del conjugado del denominador, e.i. cambiando el signo de la operación en el denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **La Comercial Alirio ganó en el año 2.008, Bs. 69.195.600, en el año 2.009 Bs. 30.441.850 más que en el año 2.008, en el año 2.010 Bs. Tanto como lo que se ganó en el año 2.008 y el año 2.009, en el año 2.011 tanto como en los tres años anteriores y en el año 2.012 Bs. 26.092.400 más que lo que se ganó en el año 2.009 y 2.011. ¿Cuánto se ganó en los cinco años la Comercial Alirio?**

Solución: **analicemos las ganancias por años:**

2.008 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600

2.009 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 30.441.850= Bs. 96.637.450

2.010 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450= Bs. 168.833.050

2.011 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450 + Bs. 168.833.050= Bs. 334.666.100

2.012 $\rightarrow$ Bs. 26.092.400 + Bs. 96.637.450 + Bs. 334.666.100= Bs. 457.395.950.

Luego se ganó en los cinco años la cantidad de Bs. 1.126.728.150

2. **Me gané Bs. 2.500 en una rifa y ahora tengo Bs. 5.634 Si Juan tiene Bs. 936 menos que yo, y María Bs. 893 menos que Juan y yo juntos, ¿Cuánto dinero tenemos entre los tres?**

Solución: **analizaremos por persona:**

Yo: Bs. 5.634

Juan: Bs. 5.634 - Bs. 936= Bs. 4.698

María: Bs. 5.634 + Bs. 4.698 – Bs. 893= Bs. 9.439

$\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 19.771

3. **Pedro tiene Bs. 139.750, José el doble de lo que tiene Pedro, menos Bs. 34.400 y Juan tanto como Pedro y José juntos más Bs. 38.700. si entre los tres se gastan Bs. 266.600, ¿Cuál es el capital común que queda?**

<u>Solución</u>: analizaremos por persona:

Pedro: Bs. 139.750

José: Bs. 2x139.750 - Bs. 34.400= Bs. 245.100

Juan: Bs. 139.750 + Bs. 245.100 + Bs. 38.700= Bs. 423.550, $\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 808.400, a esto le restamos lo que gastamos e,i, Bs. 266.600, el capital que nos queda será: Bs. 808.400 - Bs. 266.600, que es Bs. 541.800

4. **Si compras 142 libros por Bs. 915,90, si vendes cierta cantidad de libros por Bs. 709,50 a Bs. 10,75 cada uno. ¿Cuántos libros te quedan? y ¿cuánto te ganaste en cada uno de los libros que vendiste?**

<u>Solución</u>: aplicando la definición de proporción tenemos: $\frac{142}{915{,}90} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{915{,}90}{142} \Rightarrow x = 6{,}45$, cada libro costó Bs. 6,45, ahora volvemos aplicar la proporción para obtener la cantidad de libros que vendí por Bs. 709.500, i.e., $\frac{10{,}75}{709{,}50} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{709{,}50}{10{,}75} \Rightarrow x = 66$, $\therefore$ vendí 66 libros y quedan 142 – 66=76 libros y me gané por cada libro 10,75 –

6,45=4,30, me gané por libro Bs. 4,30 y tuve una ganancia de Bs. 66x4,30= Bs. 283,80

5. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de segundo por cualquiera de tres llaves que vierten: los primeros 4 litros por dos segundos, la segunda 60 litros en cuatro segundos y los terceros 96 litros en seis segundos?

<u>Solución</u>: para obtener la solución hallamos m.c.m(4, 60, 96) y para eso descomponemos en sus factores primos a los números 4=2x2, 60=2x2x3x5 y 96=2x2x2x2x2x3, $\therefore$ m.c.m(4, 60, 96)=25x3x5=480, luego la menor capacidad del tanque es de 480 litros.

6. José camina un número exacto de pasos andando 6,50 mts. 8 mts. y 10 mts. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

<u>Solución</u>: pasamos los metros a centímetros y luego descomponemos los centímetros en sus factores primos y obtenemos el M.C.D(650, 800, 1000), que es el resultado que nos piden. 650=2x5x5x13, 800=2x2x2x2x2x5x5, 1000=2x2x2x5x5x5, luego el máximo común divisor de los tres número será: M.C.D(650,800.1000)=2x5x5=50, $\therefore$ la mayor longitud posible de cada paso será de 50 cm.

7. Resolver:

a) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}$

<u>Solución</u>: $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{5}{2}}=1+\dfrac{2}{5}$, $\therefore$ la solución es $\dfrac{7}{5}$

b) $$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}$$

<u>Solución</u>:

$$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{\frac{5}{2}}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\frac{8}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{\frac{17}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\frac{30}{17}}=$$

$$9-\cfrac{8}{-\frac{89}{17}}\Rightarrow 9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=9+\frac{136}{89},\ \therefore\ \text{la solución es } \frac{937}{89}$$

c) $$\left(\frac{0.2x\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}x\frac{3}{5}}\right)^3$$

<u>Solución</u>: $\left(\frac{0.2x\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}x\frac{3}{5}}\right)^3=\left[\frac{\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}\right]^3=\left[\frac{2\times3\times5}{3\times3\times3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\therefore$, la solución es $\frac{8}{27}$

d) $$\left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4$$

Solución:

$$\left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4=\left[\frac{2^3\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{3^2}\right)^4}\right]^4=\left[\frac{\frac{2^3 2^4}{3^4}}{\frac{3^2 3^3 2^4}{2^3 3^8}}\right]^4=\frac{2^{12}2^{16}2^{12}3^{32}}{3^{16}3^{8}3^{12}2^{16}}=\frac{2^{24}}{3^4} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4 \text{, } \therefore \textbf{ la solución es } \frac{16.777.216}{81}$$

e) $\left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right)\div\left(\sqrt[4]{300}\right)$

Solución:

$$\frac{2\sqrt{10}\text{x}\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}}{\sqrt[4]{300}}=\frac{5}{4}\,\frac{\sqrt{2\text{x}5}\sqrt[3]{2^2\text{x}3\text{x}5}}{\sqrt[4]{2^2\text{x}3\text{x}5^2}}=\frac{5}{2^2}\sqrt[12]{\frac{2^6\text{x}5^6\text{x}2^8\text{x}3^4\text{x}5^4}{2^6\text{x}3^4\text{x}5^6}}=\frac{5}{4}\sqrt[12]{2^8\text{x}5^4}=$$

$$\frac{5}{4}\sqrt[3]{2^2\text{x}5} \quad \Rightarrow \left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right)\div\left(\sqrt[4]{300}\right)=\frac{5}{4}\sqrt[3]{20}$$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\,\text{x}\sqrt[6]{24}\right)$

Solución:

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\,\text{x}\sqrt[6]{24}\right)=\frac{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}}{\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\,\text{x}\sqrt[6]{24}}\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2^2 \times 3\sqrt{2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^6 \times 3\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[6]{2^3 \times 3}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4 \times 3^2 \times 2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24} \times 3^4 \times 2}} \times \sqrt[6]{2^3 \times 3}}} = \frac{\sqrt[8]{2^6 \times 3^2}}{\sqrt[24]{2^{24} \times 3^4 \times 2 \times \sqrt[6]{2^3 \times 3}}} = \sqrt[24]{\frac{2^{18} \times 3^6}{2^{24} \times 3^4 \times 2 \times 2^{12} \times 3^4}}$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[6]{24}}\right) = \frac{1}{\sqrt[24]{2^{37} \times 3^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[24]{2^7 \times 3^{22}}}{\sqrt[24]{2^{17} \times 3^2}\,\sqrt[24]{2^7 \times 3^{22}}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[6]{24}}\right) = \frac{1}{12}\sqrt[24]{2^7 \times 3^{22}}$$

8. Racionalizar:

a) $\dfrac{1}{5a\sqrt{25x^3}}$

Solución: $\dfrac{1}{5a\sqrt{25x^3}} = \dfrac{1}{25ax\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{25ax}$

b) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$,

Solución: aplicando la formula $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, **donde x=a + b**

e y=a – b, tenemos que: $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\dfrac{a+b-(a-b)}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}} \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}{2b} = \frac{a+b-2\sqrt{a-b}-(a-b)}{2b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{2b-2\sqrt{a-b}}{2b} = \frac{b-\sqrt{a-b}}{b}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **¿Cuándo la suma es igual a los sumandos?**
2. **Si p es la suma de p sumandos. ¿Cuáles son los sumandos?**
3. **Escribir la suma 12 + 15 + 17 de tres modos distintos aplicando la propiedad asociativa**
4. **Escribir la suma 3 + 5 + 7 + 9 de 6 modos distintos aplicando la propiedad asociativa**
5. **¿Qué alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y el otro aumenta 8?**
6. **m + n=52. ¿Cuál será la suma si m disminuye 4 y n disminuye 6?**
7. **x + y + z=1.046. ¿Cuál será la suma (x + 5) + (y – 8) + z + 9)?**
8. **Un sumando disminuye 6, otro 4, otro 7 y otros tres aumentan cada uno 5. ¿Qué le sucede a la suma?**
9. **¿Cuánto costó un televisor que al venderse por Bs. 1632 deja una pérdida de Bs. 256?**
10. **Después de vender una casa, se registró una pérdida de Bs. 57.312, presté Bs. 36.100 y me quedé con Bs. 27.331. ¿Cuánto me había costado la casa?**
11. **Hallar la edad de un padre que tiene 15 años más de la suma de las edades de 4 hijos que tienen, el cuarto 3 años, el tercero 1 año más que el cuarto, el segundo 3 años más que el tercero, y el primero tanto como los otros tres juntos.**
12. **Si ganara Bs. 1.008 menos al mes, podría gastar Bs. 630 en artículos**

del hogar, Bs. 720 en manutención, Bs. 3.234 en comida, Bs. 1.062 en el colegio de mi hijo y podía ahorrar Bs. 5.760 al mes. ¿Cuánto gano al mes?

13. ¿Por qué la resta se empieza por la derecha y no por la izquierda?

14. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el sustraendo. ¿Que nos queda?

15. 56 + n=81. ¿Qué número es n?

16. x – y=5 y x + y + 5=12. ¿Qué número es y?

17. Si el minuendo es 342 y el resto 156. ¿Cuál es el sustraendo?

18. Si recibiera Bs. 260.000 podría comprarme un carro de Bs. 1.008.000. ¿Cuánto tengo?

19. El menor de 2 números es 12.304 y la diferencia entre ambos es 1.897. ¿Cuál es el número mayor?

20. Juan tiene 15 años; Pedro 2 años más que Juan, José 5 años menos que Juan y Pedro juntos, y Carlos 9 años menos que los 3 anteriores juntos. ¿Cuál es la edad de Pedro, José y Carlos?

21. Resolver: a. (14 + 5) – (6 – 4 + 4) + (6 – 4 + 2)

b. [300 + (2 – 5) – 9 – 3] – (5 – 4)

c. 8 + [9 - {6 – (5 – 4)}] + 14 - {11 - [7 – (3 – 2)]}

d. 250 - [(6 + 4) – (3 – 1) +2] + {16 - [(8 + 3) - (12 – 10)]}

e. Si xy=3x. ¿Cuánto vale y?

f. Expresar en forma de suma los de los productos: xy, 4x8

g. 500+ 6(3 + 1)+ (8 – 5)3 – 2(5 + 4)

h. 800 + {20 – 3x4 + 5[18 – (6 – 1)3 + 4(5 – 2)]}

i. **$(5x4x3) \div (15 - 3) + 18 \div (11 - 5)5$**

j. **$500 - \{(6 - 1)8 \div 4x3 + 16 \div (10 - 2)\} - 5$**

22. Compré 115 caballos a Bs. 12.600 cada uno; 15 se murieron y el resto los vendí por Bs. 14.400 cada uno. ¿Gané o perdí y Cuánto?

23. ¿Qué alteración sufre el producto 80x5, si el 80 se multiplica por 4 y el 5 se multiplica por 16?

24. Si al dividir x entre 109 el cociente es el doble del divisor, ¿Qué número es x?

25. Se reparten Bs. 1.315.800 entre varias personas en partes iguales y a cada una le tocan Bs. 77.400. ¿Cuantas eran las personas?

26. Uno de los factores del producto 840 es 12. ¿Cuál es el otro factor?

27. ¿Por cuál número hay que dividir a 15480 para que el cociente sea 15?

28. Compro 42 libros por Bs. 22.680 y se venden cierto número por Bs. 17.100 a Bs. 900. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí?

29. Repartí 243 lápices entre 54 estudiantes y me sobraron 27 lápices. ¿Cuántos lápices les repartí a cada estudiante?

30. Juan tiene más dinero que Pedro. ¿Qué es más, la tercera parte de lo que tiene Juan o la cuarta parte de lo que tiene Pedro?

31. Jesús es más joven que tú. La edad de Juan es la mitad de la edad de Jesús y la edad de Pedro es la tercera parte de la tuya. ¿Quién es mayor Jesús o Pedro?

32. ¿Qué alteración sufre el cociente 760 ÷10, si 760 se multiplica por 8; y 10 se multiplica por 2?

33. ¿Cuánto aumenta el cociente si se añade el divisor al dividendo, permaneciendo igual el divisor?

34. La suma de 2 números es 1250 y su diferencia 750. ¿Cuáles son los números?

35. Juan tiene 32 metras entre las 2 manos y en la derecha tiene seis más que en la izquierda. ¿Cuántas metras tiene en cada mano?

36. La edad de un padre y la de su hijo suman 90 años. Si el hijo nació cuando el padre tenía 36 años. ¿cuáles son las edades actuales del padre y el hijo?

37. ¿Cuál es el número que sumado con su doble da 261?

38. ¿Cuál es el número que sumado con su triple da 384

39. 368 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quíntuplo. ¿Cuál es ese número?

40. La edad de Juan es el cuádruplo de la de José, si ambas edades se suman y a esa suma se le añade 17 años, el resultado es 42 años. Hallar las edades

41. La suma de 2 números es de 450 y su cociente 8 hallar los 2 números

42. La edad de Juan es 4 veces la edad de Pedro y ambas edades suman 45 años. ¿Qué edades tienen Juan y Pedro?

43. La diferencia de 2 números es de 150 y su cociente 4. Hallar los 2

números

44. 2.000 excede en 788 a la diferencia de 2 números y en 1.995 a su cociente. Hallar los 2 números.

45. En un colegio hay 3 salones. Todas juntas tienen 85 estudiantes, si en la segunda y la tercera tienen 75 estudiantes y la primera y la tercera 80 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes hay en cada salón?

46. Un palto y un pantalón valen Bs. 1.500, el pantalón y su chaleco Bs.1.020 y el palto y su chaleco Bs. 1.320. ¿Cuánto vale cada pieza?

47. Si a un número añado 23 años, luego resto 41 de esta suma y la diferencia la multiplico por 2, obtengo 132. ¿Cuál es el número?

48. La semana pasada fui a jugar al Casino. El lunes perdí Bs. 400; el martes gané Bs.125, el miércoles gana el doble de lo que tenía el martes, y el jueves, después de perder la mitad de lo que tenía, me quedaron Bs.465 ¿Cuánto tenía antes de empezar a jugar?

49. Un tanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo 3 llaves que vierten: los primeros 36 litros en 3 minutos; la segunda 48 litros en 6 minutos y los terceros 15 litros en 3 minutos?

50. Un tanque tiene 3 grifos que vierten: el primero 50 litros en 5 minutos; el segundo 91 litros en 7 minutos; y el tercero 108 litros en 12 minutos; y 2 desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo, necesita 40 minutos

para llenarse. ¿Cuál es su capacidad?

51. Compré 500 sombreros a Bs. 108 cada uno. Vendí cierto número en Bs. 9.000 a Bs. 90 cada uno. ¿A cómo tengo que vender el resto para no perder?

52. Si tú compras 600 Laptop a Bs. 14.000 cada una. Por la venta de cierto número de ellas te ofrecen Bs. 972.000. ¿A cómo tendrás que vender los restantes para tener una ganancia de Bs. 594.000?

53. Un capataz contrata un obrero por Bs. 7.000 diarios, para que trabaje 40 días, transcurridos 35 días por un problema que ocurrió entre ambos el obrero recibió Bs. 200.000.

¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó el obrero?

54. Un comerciante pagó Bs. 459.000 por 128 trajes de lana y de gabardina. Por cada traje de lana pagó Bs. 3.000 y por cada traje de gabardina Bs. 4.000. ¿Cuántos traje de cada uno compró?

55. Dos hombres ajustan una obra en Bs.10.800 y trabajan durante 5 días. Uno recibe un salario de Bs. 720 diarios. ¿Cuál es el salario del otro?

56. Con el dinero que tú tienes puedes comprar 6 revistas y te sobran Bs. 50 pero si tú quisieras comprar 13 revistas te faltarían Bs. 300. ¿Cuánto vale cada revista?

57. ¿Por cuáles de los números 2, 3, 4 y 5 son divisibles 84, 375 y 136?

58. Diga, por simple inspección, cual es el residuo de dividir 85 entre 2; 128 entre 5; 215 entre 4; 586 entre 25 y 1.046 entre 8.

59. Diga qué cifra debe suprimirse en 857 para que resulte un número de

dos cifras múltiplo de 3.

60. Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2.738. ¿En cuánto se debe disminuir esté número?

61. Diga si los siguientes grupos de números son o no coprimos.

a. 9, 14 y 21

b. 12, 24 y 42

c. 35, 18, 12 y 28

d. 26, 39, 42 y 65

e. 22, 33, 44, 55 y 91

f. 14, 21, 28, 35 y 26

g. 34, 51, 68, 85 y 102

62. De los números 24, 31, 27 36, 42, 53 y 14 formar: un grupo de 4 números que no sean coprimos, un grupo de 4 números que sean coprimos.

63. Hallar el M.C.D(a, b) de:

a. 75 y 80

b. 33, 77 y 121

c. 320, 450, 560 y 600

d. 1.560, 2.400, 5.400 y 6.600

e. 500, 560, 725, 4350 y 8.200

f. 57, 133, 532 y 1.824

g. 2.738, 9.583, 15.059, 3.367 y 12.691

h. 3.174, 4.761, 9.522 y 12.696

64. Hallar el m.c.m(a, b) de:

a. 4, 8, 16 y 32

b. 30, 15 y 60

c. 15, 25 y 75

d. 100, 300, 800 y 900

e. 100, 500, 2.100 y 3.000

f. 105, 306, 405 y 504

g. 33, 49, 165, 245 y 343

h. 108, 216, 306, 2 040 y 4.080

65. Las edades de Juan y Pedro son dos números enteros consecutivos cuya suma es 51. Si Juan es menor que Pedro. ¿Cuál es la edad de cada uno?

66. Si Juan tiene un año menos que José y ambas edades suman 103 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

67. Un comerciante compró el lunes cierto número de sacos de frijoles; el martes compró un saco más que los que compró el lunes; el miércoles uno más de los que compró el martes, y el jueves uno más de los que compró el miércoles. Si en los 4 días adquirió 102 sacos. ¿Cuántos sacos compró cada día?

68. Hallar el m.c.m de los siguientes grupos de números:

a. 540 y 1.050

b. 910, 490 y 560

c. 690, 5.290 y 920

69. Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

70. Se quiere envasar 161 kilos, 253 kilos y 207 kilos de plomo en 3 cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tenga el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuánto cabe en cada caja?

71. Se tienen 3 extensiones de 3.675, 1.575 y 2.275 metros cuadrados de superficie respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea lo menor posible?

72. Para comprar un número exacto de docenas de pelotas de Bs. 800 la docena o de un número exacto de docenas de lapiceros a Bs. 600 la docena ¿Cuál es la menor suma de dinero necesaria?

73. ¿Qué alteración sufre el número fraccionario $\frac{8}{11}$ si multiplicamos el numerador por 2 y el denominador por 4?

74. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?

75. ¿Cuál de los números fraccionarios $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{27}{135}$ y $\frac{6}{30}$ es el menor?

76. Resolver:

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

b. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$

c. $\frac{3}{5}-\frac{7}{4}+\frac{11}{6}$

d. $\frac{13}{121}+\frac{4}{55}-\frac{9}{10}$

e. $\frac{5}{16}-\frac{2}{48}-\frac{1}{9}+\frac{3}{18}$

f. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{7}{24}-\frac{11}{30}$

g. $\frac{1}{900}+\frac{101}{300}-\frac{13}{60}-\frac{17}{45}+\frac{19}{54}$

h. $3\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}$

i. $1\frac{1}{10}-1\frac{1}{100}$

j. $5\frac{4}{5}-6\frac{3}{10}+8\frac{3}{20}$

k. $3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}-7\frac{1}{12}$

l. $-6\frac{1}{11}-7\frac{5}{11}+8\frac{3}{22}-4\frac{5}{44}$

m. $1\frac{1}{5}+4\frac{1}{80}-5\frac{1}{16}-2\frac{1}{10}$

n. $7+\frac{8}{7}$

o. $\frac{3}{48}-10+3\frac{1}{5}-8$

p. $-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}$

q. $\left(7\frac{3}{5}-4\frac{1}{12}+1\frac{1}{24}\right)-\left(6-\frac{1}{18}\right)$

r. $0.25 + 4 - 2\frac{3}{5} + 2.3\overline{21}$

s. $2.\overline{3}+3.5\overline{32}-12+\frac{4}{5}-3\frac{2}{3}$

t. $5\frac{5}{7}+\frac{5}{7}-9-2.35+4.\overline{31}-5.2\overline{23}$

77. Resolver:

a. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$

b. $\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{4}$

c. $\frac{3}{5}\times\frac{17}{19}\times\frac{5}{34}\times\frac{38}{75}$

d. $2\frac{5}{6}\times 3\frac{3}{4}\times 1\frac{1}{17}$

e. $16\div\left(14\frac{1}{16}\div 5\frac{1}{6}\right)$

f. $72\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{9}\right)$

g. $\left(16\frac{3}{5}-\frac{7}{10}\right)\div\frac{1}{159}$

h. $9\frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}+5\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)$

i. $\left(11\frac{1}{10}-10\right)\div\left(13-9\frac{2}{5}\right)$

j. $\left[\left(4\frac{1}{3}-3\frac{5}{4}\right)\div\left(5-\frac{2}{7}\right)\right]\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{8}\right)$

k. $\left(2-3.\overline{14}\right)\div\left(\frac{3}{10}+4.23\overline{5}\right)$

78. Un reloj adelanta $\frac{3}{7}$ de minutos cada hora. ¿Cuánto adelantará en 5 horas; en medio día; en una semana?

79. Si de una soga de 40 metros de longitud se cortan 3 partes iguales de $5\frac{2}{3}$ metros de longitud. ¿Cuánto falta a lo que queda para tener $31\frac{5}{8}$ metros?

80. Tenía Bs. 72.000 y gasté los $\frac{3}{8}$. ¿Cuánto me queda?

81. Un mechero consume $\frac{3}{4}$ Kg. de aceite por día. ¿Cuánto consumirá en $\frac{5}{6}$ de día?

82. La edad de María es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la de Carmen. Si Carmen tiene 24 años. ¿Cuántos tiene María?

83. Diez obreros pueden hacer $14\frac{2}{11}$ metros de una obra en una hora. ¿Cuántos metros hace cada obrero en ese tiempo?

84. ¿Cuántas varillas de $\frac{1}{4}$ de metros de longitud se pueden sacar de

una varilla de $\frac{5}{12}$ metros de largo?

85. Si Juan hace un trabajo en 8 días. ¿Qué parte del trabajo puede hacer en 1 día; en $1\frac{3}{4}$ días; $3\frac{1}{2}$ días?

86. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{7}{9}$ al añadir 1 al numerador y 4 al denominador?

87. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{8}{9}$ al restar 5 a sus dos términos?

88. Porque número se multiplica $\frac{1}{2}$ cuando se convierte en $\frac{3}{4}$; y $\frac{1}{8}$ cuando se convierte en 6?

89. ¿Por cuál número se multiplica 6 cuando se convierte en 4; 3 cuando se convierte en 1; 11 cuando se convierte en 12?

90. ¿Por qué número se divide 8 cuando se convierte en 6; 9 cuando se convierte en 7; 11 cuando se convierte en 19?

91. ¿Por qué número se divide $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador; cuando se resta 3 del numerador y se suma 2 al denominador?

92. Hallar qué parte de 5 es 4; de 6 es 7; de 9 es 8.

93. Juan tenía Bs. 6.000.000 y gastó Bs. 180.000. ¿Qué parte de su dinero gastó y que parte le queda?

94. ¿Cuánto perdiste tú cuando vendes a $\frac{3}{7}$ del costo de lo que te costó

Bs. 840.000?

95. Juan gasta en alimentación de su familia los $\frac{2}{5}$ de su sueldo mensual. Si en un mes gasta en alimentación Bs. 235.350. ¿Cuál ha sido su sueldo en ese mes?

96. Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedaba. Si todavía tengo Bs. 1.800. ¿Cuánto tenía al principio?

97. Resolver:

a. $$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

b. $$9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

c. $$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

d. $$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

e. $$1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

f. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9}}}}$$

g. $$-3-\cfrac{4}{3-\cfrac{5}{3-\cfrac{7}{3-\cfrac{8}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{3}}}}}}$$

98. Un comerciante hace un pedido de 3.000 kilogramos de mercancía y se lo envían en 4 partidas. En la primera le mandan 17.45 kilogramos En la segunda 40 kilogramos más que la primera, en la tercera tanto como en las dos anteriores y en la cuarta lo restante. ¿Cuántos kilogramos le enviaron en la última partida?

99. Resolver:

a. $$\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$$

b. $$\left[\left(\frac{x_x y}{z}\right)^5\right]^6$$

c. $$\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{4\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right]^3$$

d. $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

e. $6\sqrt{5}+8\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

f. $\sqrt{18}+\sqrt{50}$

g. $\sqrt{108}-\sqrt{72}$

h. $3\sqrt{28}-5\sqrt{63}$

i. $4\sqrt{300}-\sqrt{162}+\sqrt{75}$

j. $\frac{1}{2}\sqrt{8}+\frac{3}{4}\sqrt{50}$

k. $\frac{1}{3}\sqrt{27}-\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{5}{2}\sqrt{24}$

l. $\frac{2}{5}\sqrt{250}-\frac{4}{9}\sqrt{90}+\frac{9}{7}\sqrt{490}$

m. $3\sqrt[3]{125}+2\sqrt[3]{15625}$

n. $2\sqrt[3]{1024}-\sqrt[3]{2000}$

o. $5\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{342}-\sqrt[3]{384}$

p. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{500}$

q. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{48}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{1029}$

r. $\frac{5}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{4}{5}\sqrt[3]{500}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{270}$

s. $(3\sqrt{10})(7\sqrt{28})(5\sqrt{125})$

t. $\left(\frac{7}{6}\sqrt[3]{48}\right)\left(\frac{4}{5}\sqrt[3]{32}\right)(7\sqrt[3]{72})$

u. $(7\sqrt{240}\div 8\sqrt{80})(10\sqrt{560}\div\sqrt{20})$

v. $\left(\frac{9}{5}\sqrt[3]{686} \div \frac{12}{5}\sqrt[3]{32}\right) \div \left(\frac{7}{8}\sqrt[3]{1024} \div \frac{9}{4}\sqrt[3]{8}\right)$

w. $\left[\frac{\left(\frac{5\sqrt{125}x4\sqrt[3]{30}}{40\sqrt[4]{60}}\right)^2}{\frac{15\sqrt[5]{100}}{\left(10\sqrt[6]{50}\right)^3\left(14\sqrt[3]{80}\right)}}\right]^3$

100. Racionalizar:

a. $\frac{6}{\sqrt{128}}$

b. $\frac{5}{\sqrt[3]{108}}$

c. $\frac{5a}{\sqrt[6]{4a^5b^3}}$

d. $\frac{8abc}{3\sqrt[5]{a^3b^4c^5}}$

e. $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

g. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

h. $\frac{3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

i. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}$

k. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{7}}$

$\dfrac{11}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{13}}$

CAPÍTULO I

INECUACIONES

Este capítulo se estudiaran: *INECUACIONES*: Intervalos y Desigualdades, Puntos de Separación, Puntos de Pruebas, Vecindad o Entorno, Cota Superior, Cota Inferior, Conjunto Acotado, El Supremo, El ínfimo, Factores de una Inecuación, Inecuaciones lineales, Inecuaciones cuadráticas, Inecuaciones racionales, Inecuaciones con valor absoluto o Distancia entre dos Puntos, Propiedades de la distancia entre dos puntos, Sistema de inecuaciones lineales y no lineales.

INECUACIONES

<u>Definición 1:</u> Una relación que existe entre los signos $\geq$ ó $\leq$ (mayor o igual que o menor o igual que) mediante los números reales lo llamamos <u>*desigualdad*</u>.

<u>Ejemplo:</u> $5<8$ ó $8>5$, se lee, cinco menor que ocho ó ocho mayor que cinco.

<u>Definición 2:</u> Al conjunto de los números reales comprendido entre a y b, $\forall a, b \in \Re$, se le llama <u>*intervalo*</u>, los intervalos pueden ser: abiertos, cerrados, semiabierto o semicerrado.

<u>Definición 3:</u> $\forall a, b \in \Re$, existe un $x \in \Re / a<x<b \Rightarrow x \in (a, b)$, es decir, los números reales que están entre a y b, recibe el nombre de <u>*intervalo abierto*</u>, también se consideran intervalos abiertos a: $x<a \Rightarrow x \in (-\infty, a)$ y $x>a \Rightarrow x \in (a, +\infty)$ y sus representaciones gráficas son respectivamente:

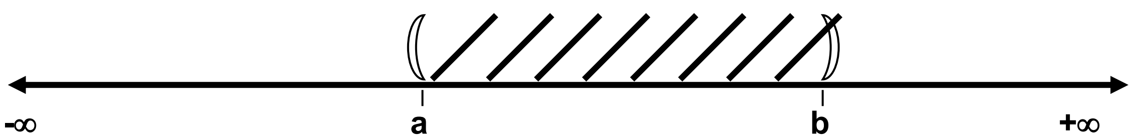


Fig. N° 1

Fig. N° 2

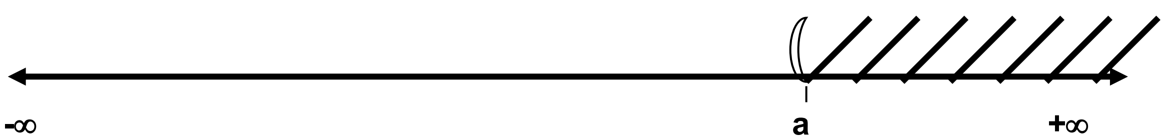


Fig. N° 3

Los intervalos antes mencionados se leen: $a<x<b$, "x es mayor que a pero menor que b, es decir son todos los números comprendidos entre a y b excluyéndolos a ellos, también es un intervalo abierto: $a>x>b$, es

decir, x es menor que a o x es mayor que b $\Rightarrow x \in (-\infty, a) U (b, +\infty)$ y su representación gráfica es:

Fig. N° 4

<u>Definición 4:</u> $\forall a, b \in \Re$, $\exists$ un $x \in \Re / a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a, b]$, es decir, los números reales que están entre a y b incluyéndolos a ellos, recibe el nombre de <u>*intervalo cerrado*</u> y su representación gráfica es:

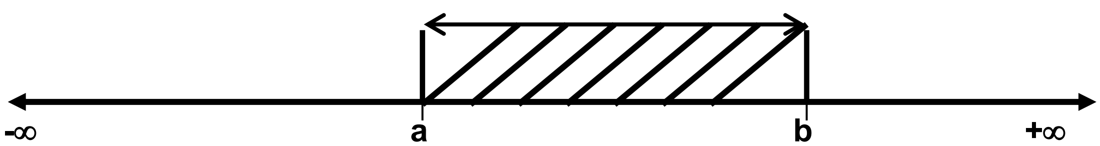


Fig. Nº 5

<u>Definición 5:</u> $\forall a, b \in \Re$, existe un $x \in \Re / a < x \leq b \Rightarrow x \in (a, b]$, $a \leq x < b \Rightarrow x \in [a, b)$, $a > x \geq b \Rightarrow x \in (-\infty, a) U [b, +\infty)$, $a \geq x > b \Rightarrow x \in (-\infty, a] U (b, +\infty)$, son todos *intervalo semiabierto o intervalo semicerrado* y su representación gráfica es respectivamente:

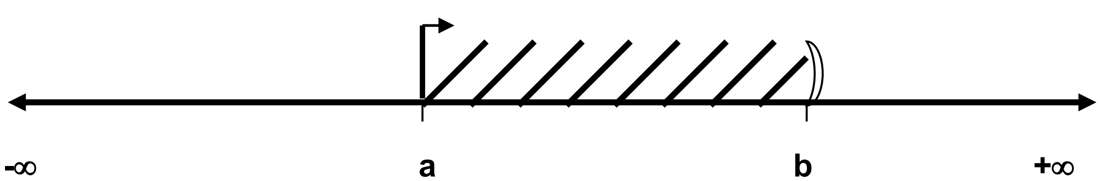


Fig. Nº 6

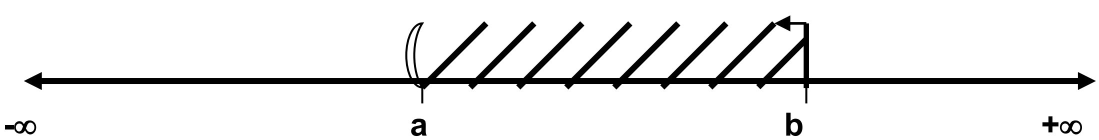


Fig. Nº 7

Fig. Nº 8

Fig. Nº 9

<u>Definición 6:</u> $\forall x_0 \in \Re$, x_0 se dice que es <u>*un punto de separación (p.s)*</u>, si x_0 separa a la recta en dos partes, estas partes reciben el nombre de intervalos, siempre existirán n + 1 intervalos, dependiendo de los puntos de separación, es decir, si no hay ningún punto de separación, existirá un solo intervalo, que en este caso será la recta real, en la definición 5 vemos que existen dos puntos de separación y en cada caso hay tres intervalos, en el primer y segundo caso, hay un intervalo donde se encuentra x y dos donde no, y en el tercero y cuarto caso hay dos intervalos donde se encuentra x y uno donde no.

<u>Definición 7:</u> $\forall x_0 \in \Re$, x_0 se dice que es <u>*un punto de prueba (p.p)*</u>, si x_0 pertenece a un intervalo, en el cual se necesita saber el signo de cualquier factor, entendiéndose por <u>*factor*</u> cualquier termino $x - x_0$ de una inecuación.

<u>Definición 8:</u> Se define una <u>*inecuación*</u> como una desigualdad que tiene una o más variables, estas variables reciben el nombre de incógnitas, y tienen dos tipos de soluciones que son: solución analítica y solución geométrica.

Las inecuaciones con una o más variable pueden ser lineales y no lineales.

<u>Definición 9:</u> **Inecuaciones lineales con una variable: son las que tienen la forma: *$mx>a$, $mx<a$, $mx\geq a$ y $mx\leq a$*, $\forall$a, m$\in\Re$, donde sus soluciones analíticas son:**

$x>\frac{a}{m}$, $x<\frac{a}{m}$, $x\geq\frac{a}{m}$ y $x\leq\frac{a}{m}$ respectivamente y sus soluciones geométricas son:

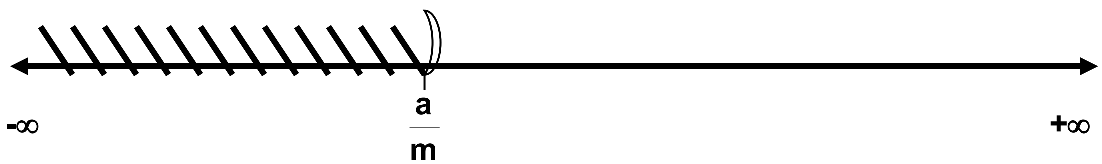


Fig. Nº 10

Fig. Nº 11

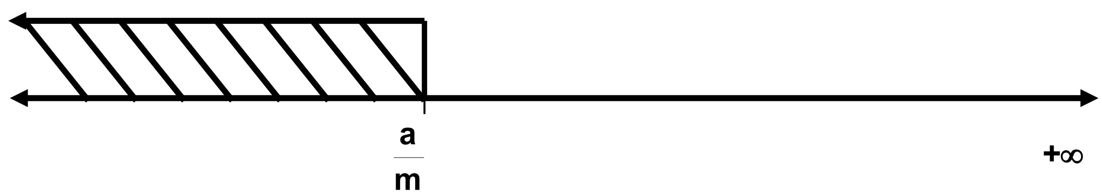


Fig. Nº 12

Fig. Nº 13

<u>Ejemplo</u>: Resolver analítica y geométricamente la siguiente inecuación: $\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}x+2x-\frac{1}{4}\geq\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x-2$

<u>Solución:</u> transformamos la inecuación en una inecuación lineal, esto lo hacemos buscando el mínimo común denominador y

multiplicamos los dos miembros de la inecuación por este número (propiedades de los números reales), en este caso el mínimo es 60, con lo que nos queda: $45x - 36x + 120x - 15 \geq 80 - 40x - 120$. Ahora pasamos todas las variables para el lado izquierdo y todos los términos independientes para el derecho y resolvemos (propiedad de los números reales), con lo que nos queda: $169x \geq -25 \Rightarrow x \geq -\frac{25}{169}$

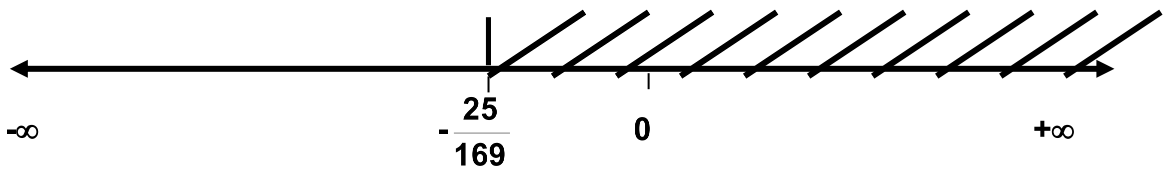


Fig. Nº 14

<u>Definición 10:</u> Las <u>*inecuaciones cuadráticas*</u> de una variable: son las inecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, para hallarle sus soluciones, factorizamos, aplicando Ruffini, completando cuadrado o aplicando la fórmula de segundo grado, y luego le aplicamos las propiedades de los números reales.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la inecuación: $3x^2 + 5x - 22 < 0$. Solución: aplicamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 5 & -22 \\ 2 & & 6 & 22 \\ \hline & 3 & 11 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego: $3x^2 + 5x - 22<0 \Rightarrow (x - 2)(3x + 11)<0$, por las propiedades de los números reales, nos queda que:

$$\begin{cases} x - 2<0 \wedge 3x + 11>0 \\ \vee \\ x - 2>0 \wedge 3x + 11<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \wedge x>-\frac{11}{3} \\ \vee \\ x>2 \wedge\vee\ x<-\frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,2)\cap(-\frac{11}{3},+\infty)\ S_1 \\ \cup \qquad \cup \\ x\in(2, +\infty)\cap(-\infty, -\frac{11}{3})\ S_2 \end{cases}$$

Es decir, la solución total es la unión de la solución 1 con la solución 2.

S_1

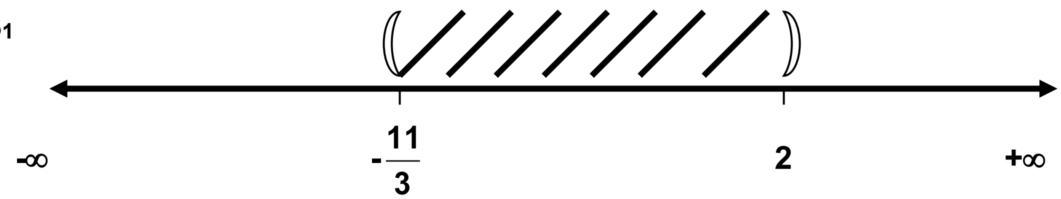


Fig. N° 15

S_2

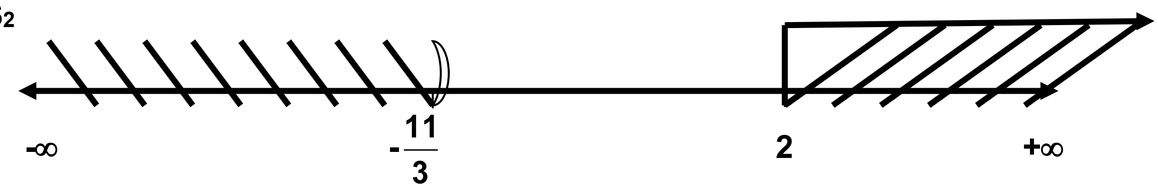


Fig. N° 16

$S_1=(-\frac{11}{3},2)$, $S_2=\phi \Rightarrow S_1US_2=(-\frac{11}{3},2)$.

Otra forma de resolver esta inecuación es mediante los puntos de separación: $3x^2 + 5x - 22<0 \Rightarrow (x - 2)(3x + 11)<0$, tomaremos los factores: $x – 2$ y $3x + 11$ y representamos en la recta real los puntos de separación: $x=-\frac{11}{3}$ y $x=2$, como tenemos dos puntos de separación tendremos tres intervalos, en cada intervalo tomaremos un punto de prueba, que en este caso son: $-4\in(-\infty, -\frac{11}{3})$, $0\in(-\frac{11}{3}, 2)$ y $3\in(2, + \infty)$, sustituyendo los puntos de pruebas en los factores y anotando los signos que resulta y por ultimo multiplicamos los signos que resultan de cada factor, si este coincide con el signo de la inecuación es solución en caso contrario no. La solución total será la unión de los intervalos soluciones (ver la cuadro Nº 1).

Factor	**p.p** **p.s** **p.p** **p.s** **p.p** $-\infty$ **-4** $-\frac{11}{3}$ **0** **2** **3** $+\infty$		
$x + \frac{11}{3}$	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	no	si	no

Cuadro Nº 1

Como en este caso el único intervalo solución es $(-\frac{11}{3}, 2)$, resulta que la solución total es: S_T: $x \in (-\frac{11}{3}, 2)$, solución analítica

Solución geométrica

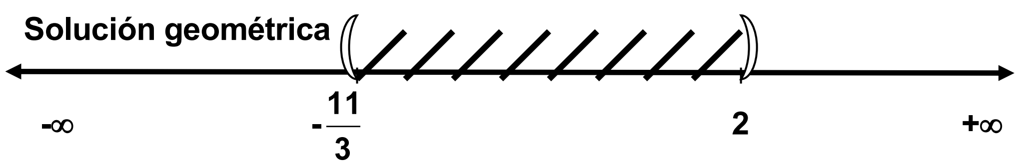


Fig. Nº 17

<u>Definición 11:</u> Las <u>inecuaciones racionales</u> de una sola variable: estas ecuaciones son un caso particular de las ecuaciones cuadráticas, por lo tanto, se resuelven aplicando las propiedades de los números reales o por medio de los puntos de separación.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la inecuación: $\frac{7X-5}{5X+3} \geq 0$

Solución: aplicando las propiedades de los números reales tenemos:

$$\begin{cases} 7x - 5 \geq 0 \wedge 5x + 3 > 0 \\ \quad\quad o \\ 7x - 5 \leq 0 \wedge 5x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{7} \wedge x > -\frac{5}{3} \\ \quad\quad o \\ x \leq \frac{5}{7} \wedge x < -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\frac{5}{7}, +\infty) \cap (-\frac{5}{3}, +\infty) \; S_1 \\ \quad\quad \cup \quad\quad \cup \\ x \in (-\infty, \frac{5}{7}) \cap (-\infty, -\frac{5}{3}) \; S_2 \end{cases}$$

Es decir, la solución total es la unión de la solución 1 con la solución 2.

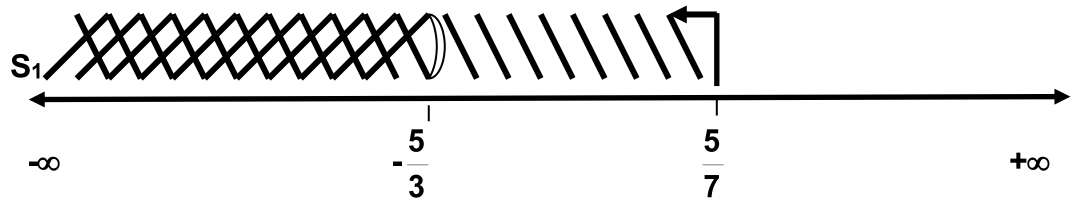


Fig. N° 18

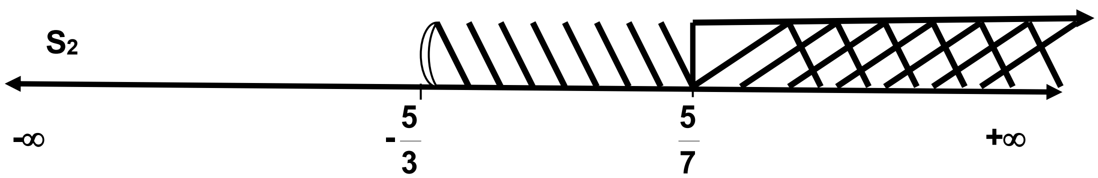


Fig. N° 19

$S_1=(-\infty, -\frac{5}{3})$, $S_2=[\frac{5}{7}, +\infty) \Rightarrow S_T=S_1 \cup S_2=(-\infty, -\frac{5}{3}) \cup [\frac{5}{7}, +\infty)$.

<u>Definición 12:</u> Las <u>*inecuaciones con valor absoluto o distancia entre dos puntos*</u>, de una variable, empezaremos definiendo la distancia entre dos puntos de la manera siguiente:

$|x - x_0|$, geométricamente indica la distancia que existe desde x hasta x_0, es decir, si tenemos: $|x - x_0| \geq a$ o $|x - x_0| \leq a$ y $|x - x_0| = a$, se lee geométricamente, como la distancia que existe desde x hasta x_0 es mayor o igual que a, o la distancia que hay desde x hasta x_0 es menor o igual que a y la distancia que hay desde x hasta x_0 es igual que a, si $|x|=a$, se lee geométricamente, la distancia que existe desde x hasta el origen es igual que a, es decir:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$|x|=\sqrt{x^2}$, y su gráfica es:

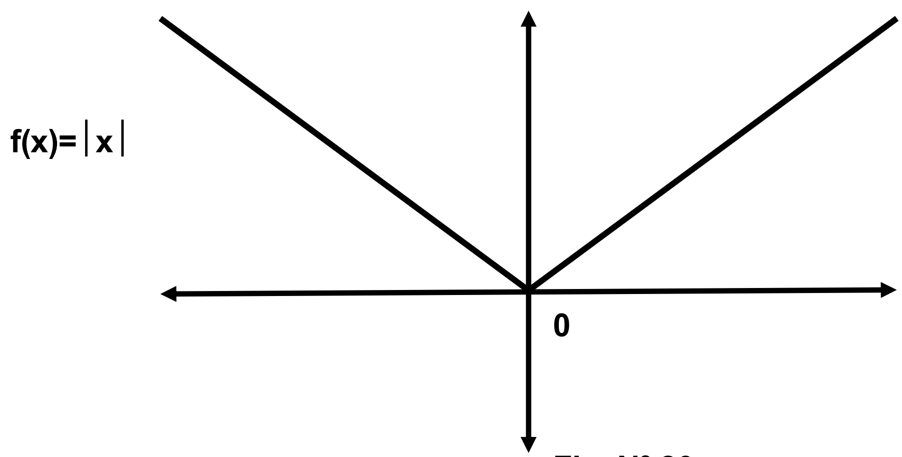


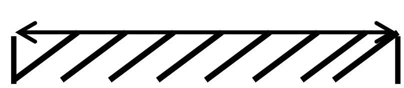
Fig. Nº 20

<u>Propiedades:</u>

1. $|x|\geq 0$ y $|x|=0, \Leftrightarrow x=0$
2. $|ay|=a|x|$
3. $|xy|=|x|\,|y|$
4. $|x/y|=|x|/|y|$
5. $|x|=a \Leftrightarrow -a=x=a \Rightarrow x=-a$ ó $x=a$

Fig. Nº 21

6) $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \Rightarrow x\geq -a$ y $x\leq a, \Rightarrow x\in[-a, a]$



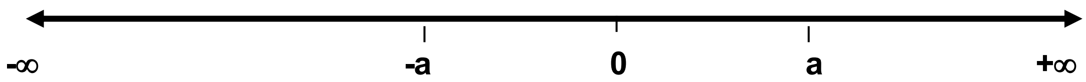


Fig. Nº 22

7) $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x \geq a \Rightarrow x \leq -a$ y $x \geq a$, $\Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

Fig. Nº 23

8. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración: $-|x| \leq = x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, si sumamos término a término estas dos expresiones tenemos:

$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, entonces por la propiedad No 6, tenemos que: $|x + y| \leq |x| + |y|$

9. $|x - y| \geq |x| - |y|$

Demostración: $|x| = |x + (y - y)| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |x|$, despejando $|x - y|$ se tiene que: $|x - y| \geq |x| - |y|$

10. $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Demostración: $|y| = |y + (x - x)| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |y|$, despejando $|y - x|$ se tiene que $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Ejemplo: La distancia de x a menos $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{5}$

Solución: aplicando la definición de distancia tenemos:

$|x + \frac{2}{3}| < \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} < x + \frac{2}{3} < \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{2}{3} - \frac{4}{5} < x < -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{22}{15} < x < \frac{2}{15} \Rightarrow$ que x esta entre $-\frac{22}{15}$ y $\frac{2}{15}$, e.i., $x \in (-\frac{22}{15}, \frac{2}{15})$

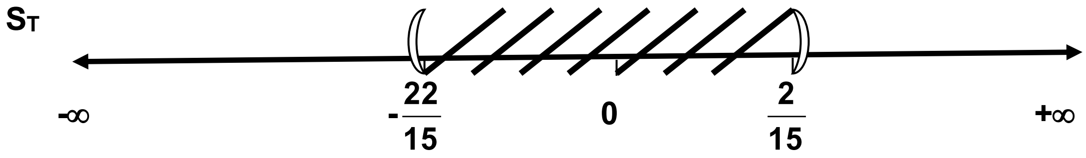


Fig. Nº 24

Ejemplo: Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación: $|3x - 5| = 10$

Solución: Por la propiedad tenemos: $-10 = 3x - 5 = 10 \Rightarrow -5 = 3x = 15 \Rightarrow$ $3x = -5$ ó $3x = 15 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$ ó $x = 5$

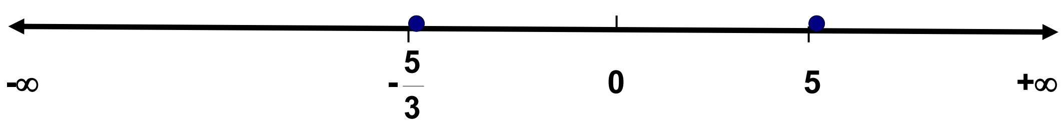


Fig. Nº 25

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación: $\left|\frac{7x-5}{3x-5}\right| \geq 9$

Solución: Por la definición tenemos: $-9 \geq \frac{7x-5}{3x-5} \geq 9 \Rightarrow \frac{7x-5}{3x-5} \leq -9$ o $\frac{7x-5}{3x-5} \geq 9 \Rightarrow \frac{7x-5}{3x-5} + 9 \leq 0$ o $\frac{7x-5}{3x-5} - 9 \geq 0 \Rightarrow \frac{7x-5+27x-45}{3x-5} \leq 0$ o

$\frac{7x-5-27x+45}{3x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{34x-50}{3x-5} \leq 0$ o $\frac{-20x+40}{3x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-\frac{25}{17}}{x-\frac{5}{3}} \leq 0$ o $\frac{x-2}{x-\frac{5}{3}} \leq 0$

Aplicando el método de los puntos de separación tenemos la solución en el cuadro Nº 2

Factor	p.p p.s p.p p.s p.p

	$-\infty$ 0	$\frac{25}{17}$ $\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$ 2 $+\infty$
$X - \frac{25}{17}$	(-)	(+)	(+)
$x - \frac{5}{3}$	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	no	si	no

Cuadro Nº 2

S_1: $x \in [\frac{25}{17}, \frac{5}{3})$ solución analítica

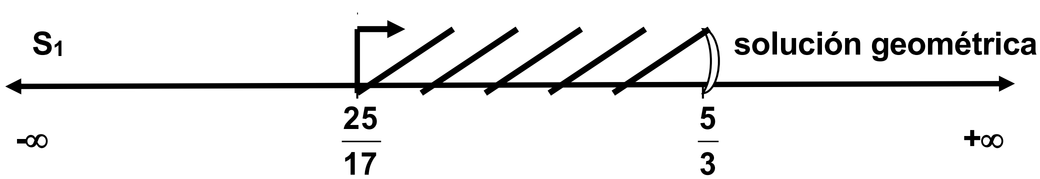


Fig. Nº 26

La solución II la vemos en el cuadro Nº 3

Factores	p.p: 0 ($-\infty$)	p.s: $\frac{5}{3}$ p.p: 1	p.s: 2 p.p: 3 ($+\infty$)
$x - \frac{5}{3}$	(-)	(+)	(+)

x - 2	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	No	si	no

S_2: $x \in (\frac{5}{3}, 2]$

Cuadro N° 3

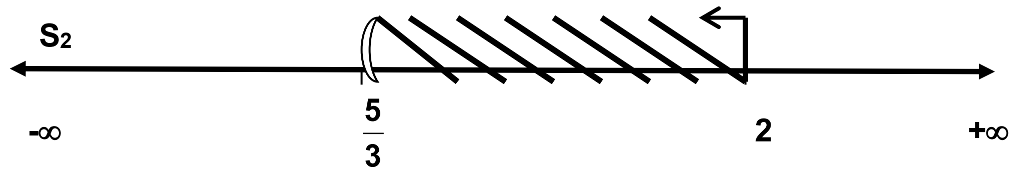


Fig., Nº 27

S_T: $x \in [\frac{25}{17}, \frac{5}{3}) \cup [\frac{5}{3}, 2]$ ó $x \in [\frac{25}{17}, 2] - \left\{\frac{5}{3}\right\}$ solución analítica

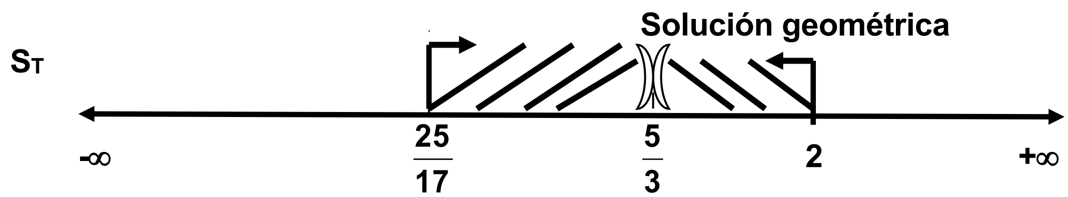


Fig., Nº 28

<u>Ejemplo</u>: Resolver la siguiente inecuación: $|3x^2 + 2x - 16| \geq x - 2$

<u>Solución</u>: Aplicando las propiedades de distancia entre dos puntos tenemos:

$-x + 2 \geq 3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 2x - 16 \leq -x + 2$ ò $3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 3x - 18 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 14 \geq 0 \Rightarrow$

$x^2 + x - 6 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 146 \geq 0 \Rightarrow$

$(x + \frac{1}{2})^2 - 6 - \frac{1}{4} \leq$ ò $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \geq 0$

$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} \leq 0$ ò $(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{14}{3} - \frac{1}{36} \geq 0 \Rightarrow$

$(x + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$ ò $(x + \frac{1}{6})^2 \geq \frac{169}{36} \Rightarrow$

$\left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$ ò $\left|x + \frac{1}{6}\right| \geq \frac{13}{6} \Rightarrow$

$-\frac{5}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$ ò $-\frac{13}{6} \geq x + \frac{1}{6} \geq \frac{13}{6} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ ò $-\frac{1}{6} - \frac{13}{6} \geq x \geq \frac{13}{6} - \frac{1}{6} \Rightarrow$

$-3 \leq x \leq 2$ ò $-\frac{7}{3} \geq x \geq 2$ la solución analítica es S_T: $x \in [-3,2] \cup (-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [2, \infty) \Rightarrow$

$x \in \Re$

Solución geométrica:

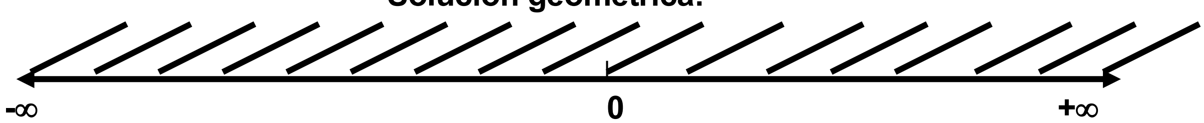


Fig. Nº 29

<u>Solución</u>: Por medio de los puntos de separación:

$-x + 2 \geq 3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 2x - 16 \leq -x + 2$ ò $3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 3x - 18 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 14 \geq 0 \Rightarrow$

$3x^2 + x - 6 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 146 \geq 0 \Rightarrow$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - 6 - \frac{1}{4} \leq \text{ ò } x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} \leq \text{ ò } (x + \frac{1}{6})^2 - \frac{14}{3} - \frac{1}{36} \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \leq \text{ ò } (x + \frac{1}{6})^2 - \frac{169}{36} \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \leq \text{ ò } (x + \frac{1}{6})^2 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}) \leq 0 \text{ ò } (x + \frac{1}{6} - \frac{13}{6})(x + \frac{1}{6} + \frac{13}{6}) \geq 0 \Rightarrow$$

$(x - 2)(x + 3) \leq 0$ ò $(x - 2)(x + \frac{7}{3}) \geq 0$, entonces, la solución I la vemos en el cuadro Nº 4

Factores	$-\infty$ … -4 (p.p)	-3 (p.s) … 0 (p.p)	2 (p.s) … 4 (p.p) … $+\infty$
X + 3	(-)	(+)	(+)
x - 2	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	No	si	no

S_1: $x \in [-3,2)$ Solución analítica

Cuadro N° 5

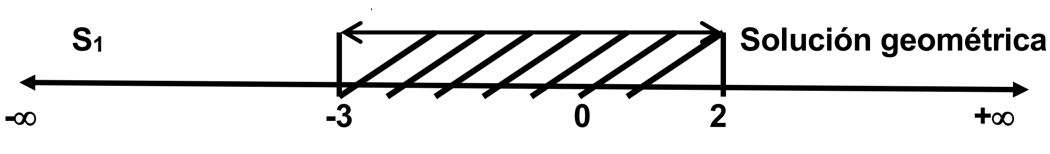


Fig. Nº 30

La solución Nº II,

Factores	$-\infty$ ... -2 (p.p) ... $-\frac{7}{3}$ (p.s) ... 0 (p.p) ... 2 (p.s) ... 3 (p.p) ... $+\infty$		
$x + \frac{7}{3}$	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	Si	no	si

Cuadro Nº 6

S_2: $x \in (-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [2, \infty)$ **Solución analítica**

Solución geométrica

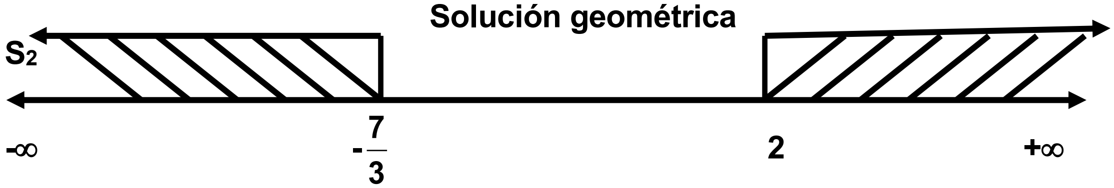


Fig. Nº 31

$S_T = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S_T = \Re$ **solution analítica**

Solución geométrica:

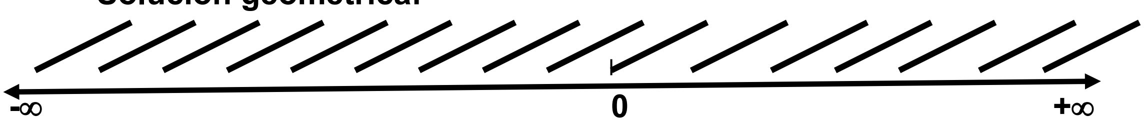


Fig. Nº 32

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación: $\frac{2x^3 + x^2 - 7x - 6}{6x^2 - x - 2} \leq 0$

Solución: Por el método de los puntos de separación y aplicando Rufini para determinar los factores, tenemos:

Para la expresión $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ los factores son: $x+1$, $x-2$ y $x + \frac{3}{2}$

	2	1	-7	-6
-1		-2	1	6
	2	-1	-6	0
2		4	6	
	2	3	0	

Para la hallar los factores de $6x^2 - x - 2$ completamos cuadrado, es decir, $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow (x - \frac{1}{12})^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{144} \Rightarrow (x - \frac{1}{12})^2 - \frac{49}{144} \Rightarrow$

$(x - \frac{1}{12})^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 \Rightarrow (x - \frac{1}{12} - \frac{7}{12})(x - \frac{1}{12} + \frac{7}{12}) \Rightarrow (x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{2})$, los factores son: $x + \frac{1}{2}$, $x - \frac{2}{3}$, (ver cuadro Nº 7)

Factor	p.p	p.s	p.p	p.s	p.p	p.s	p.p	p.s	p.p	p.s	p.p

	$-\infty$ -2 $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{4}$ -1 $-\frac{3}{5}$ $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{2}{3}$ 1 2 3 $+\infty$					
$x+\frac{3}{2}$	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x+1$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x+\frac{1}{2}$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x-\frac{2}{3}$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
$x-2$	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
Solución	si	No	si	no	si	no

Cuadro Nº 7

Solución analítica: $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, 2]$

Solución geométrica

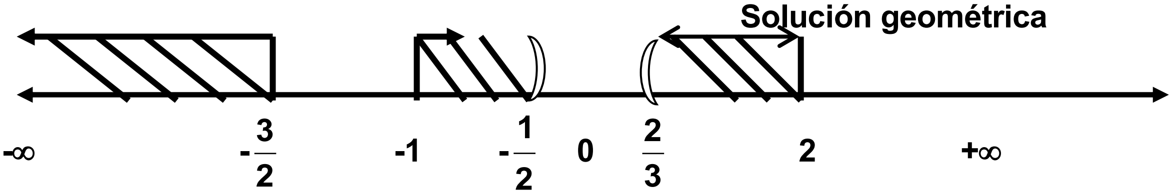


Fig. Nº 33

<u>Definición 13</u>: Se define <u>*Una vecindad o un entorno*</u> de un punto x_0, con radio de convergencia ε, como un intervalo abierto centrado en $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, de donde por la propiedad No 6, se tiene que $|x - x_0| < \varepsilon$

<u>Definición 14:</u> Sea $(D \subseteq \Re)$: $(\exists x_0 \in \Re)$: $x \leq x_0$ $(\forall x \in D)$, decimos que x_0 es una <u>*cota superior*</u> de D y que D está acotado superiormente por x_0, y si $x_0 \in D$, entonces x_0 es el máximo valor de D y lo denotamos por $x_0 = \text{máx}(D)$

<u>Definición 15:</u> Sea $(D \subseteq \Re)$: $(\exists x_0 \in \Re)$: $x \leq x_0$ $(\forall x \in D)$, decimos que x_0 es una <u>*cota inferior*</u> de D y que D está acotado inferiormente por x_0, y si $x_0 \in D$, entonces x_0 es el mínimo valor de D y lo denotamos por $x_0 = \text{mín}(D)$.

<u>Definición 16:</u> Se dice que $D \subseteq \Re$, está <u>*acotado*</u> sii D está acotado inferiormente y superiormente

<u>Definición 17:</u> Sea $D \subseteq \Re$, D está acotado superiormente en x_1, entonces $x_1 \in \Re$, recibe el nombre de <u>*supremo de D*</u> o x_1 es la menor de todas las cotas superiores si cumple con las siguientes condiciones:

i) x_1 es cota superior de D

ii) Ningún número menor que x_1 es cota superior de D, e.i. si x_2 es cota superior de D entonces $x_2 \geq x_1$ y el supremo se denota por sup(D).

<u>Definición 18:</u> Sea $D \subseteq \Re$, D está acotado inferiormente en x_0, entonces $x_0 \in \Re$, recibe el nombre de <u>*ínfimo de D*</u> o x_0 es la mayor de todas las cotas inferiores si cumple con las siguientes condiciones:

iii) x_0 es cota inferior de D

iv) Ningún número mayor que x_0 es cota inferior de D, e.i. si x_1 es cota inferior de D, entonces $x_0 \geq x_1$ y el ínfimo se denota por imf(D).

Definición 19: Inecuaciones lineales con dos variables: son las inecuaciones de la forma: $x<0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$; $x>0$, $y>0$; $x>0,y>0$; $y \leq mx+b$; $y \geq mx + b$; $y<mx + b$; $y>mx + b$, las cuales se representan gráficamente de la siguiente manera:

Se representa la frontera, que es la recta considerada como una ecuación, luego para la variable dependiente si el signo es mayor se toma toda la parte de arriba de la frontera, y si es menor se toma toda la parte de abajo de la frontera, para la variable independiente si el signo es mayor se toma la parte derecha de la frontera y si es menor se toma la parte izquierda de la frontera,

Veamos esto gráficamente:

Representación de las rectas en las figuras

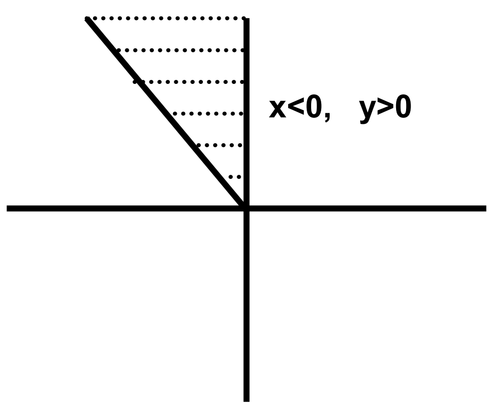


Fig. Nº 34

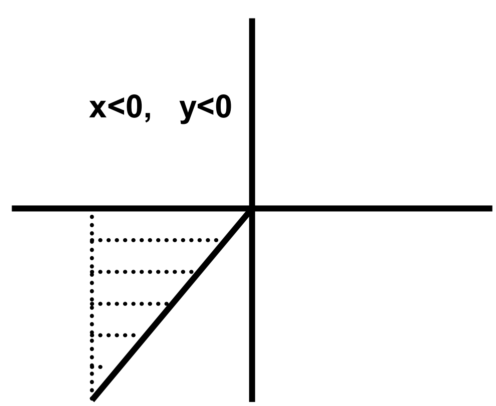


Fig. Nº 35

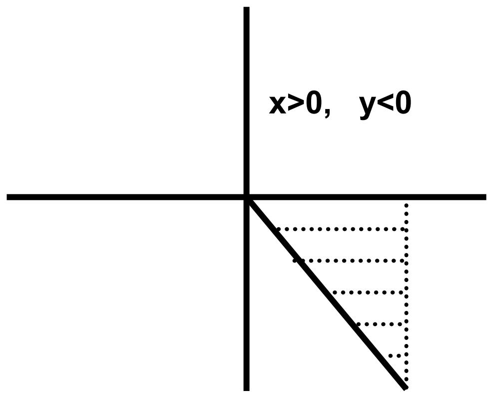


Fig. Nº 36

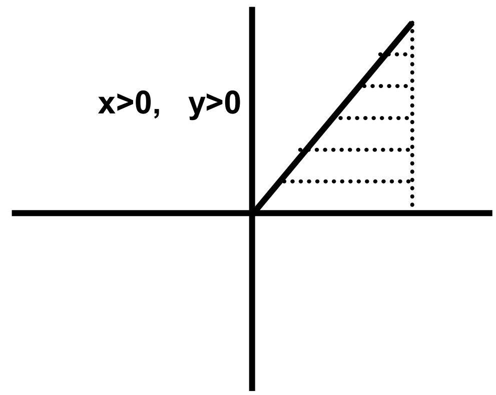


Fig. Nº 37

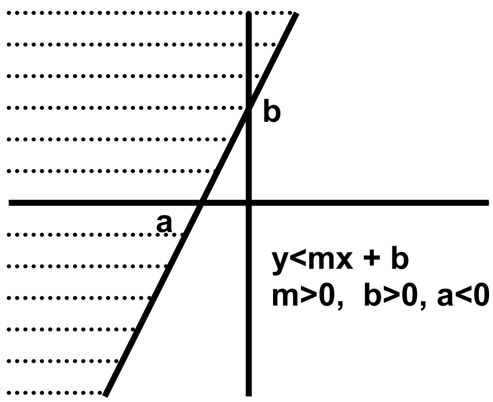


Fig. Nº 38

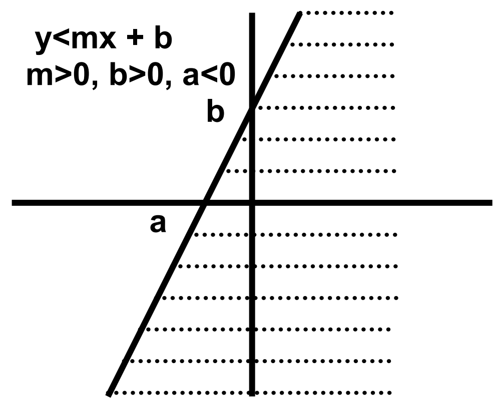


Fig. Nº 39

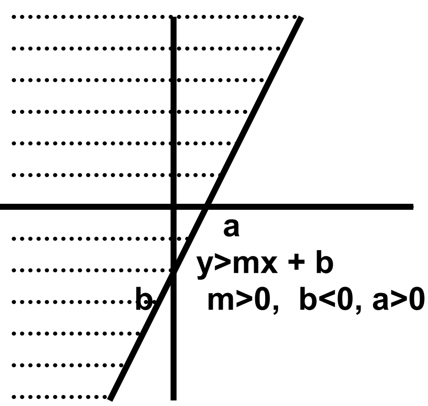


Fig. Nº 40

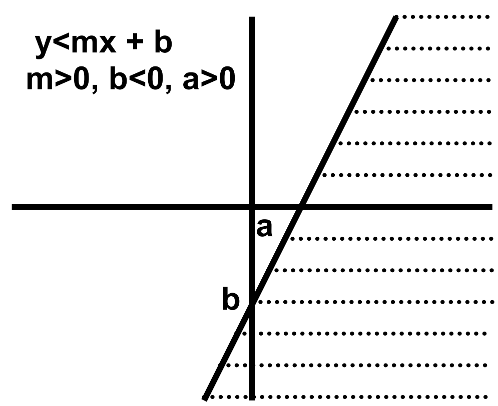


Fig. Nº 41

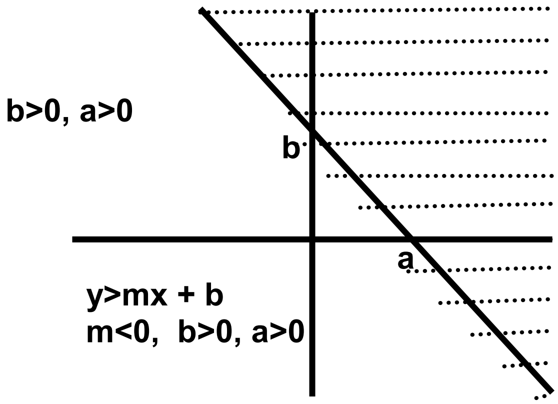


Fig. Nº 42

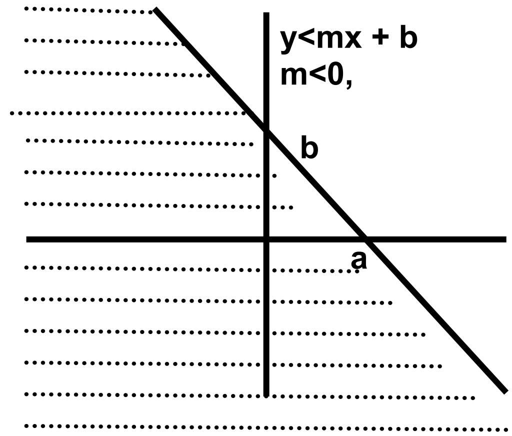


Fig. Nº 43

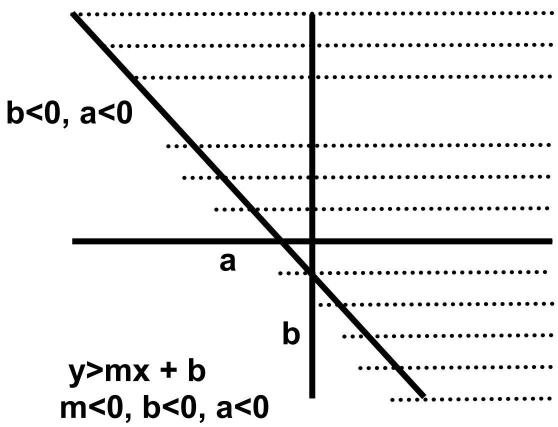


Fig. Nº 44

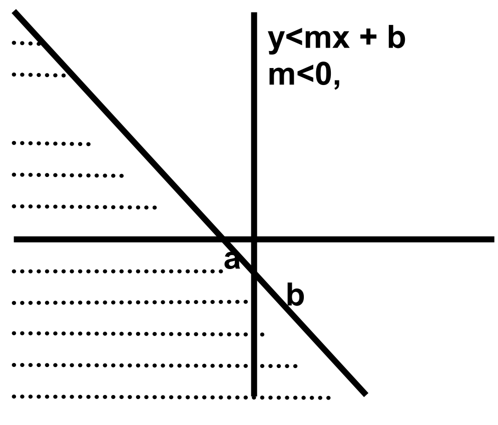


Fig. Nº 45

<u>Ejemplo</u>: Dibujar el gráfico de soluciones de la inecuación: $3x + 2y - 6 \leq 0$.

<u>Solución:</u> Despejando y en la inecuación tenemos: $y \leq -\frac{3}{2}x + 3$, luego bujamos la frontera de esta recta, y aplicamos lo dicho anteriormente, resultando:

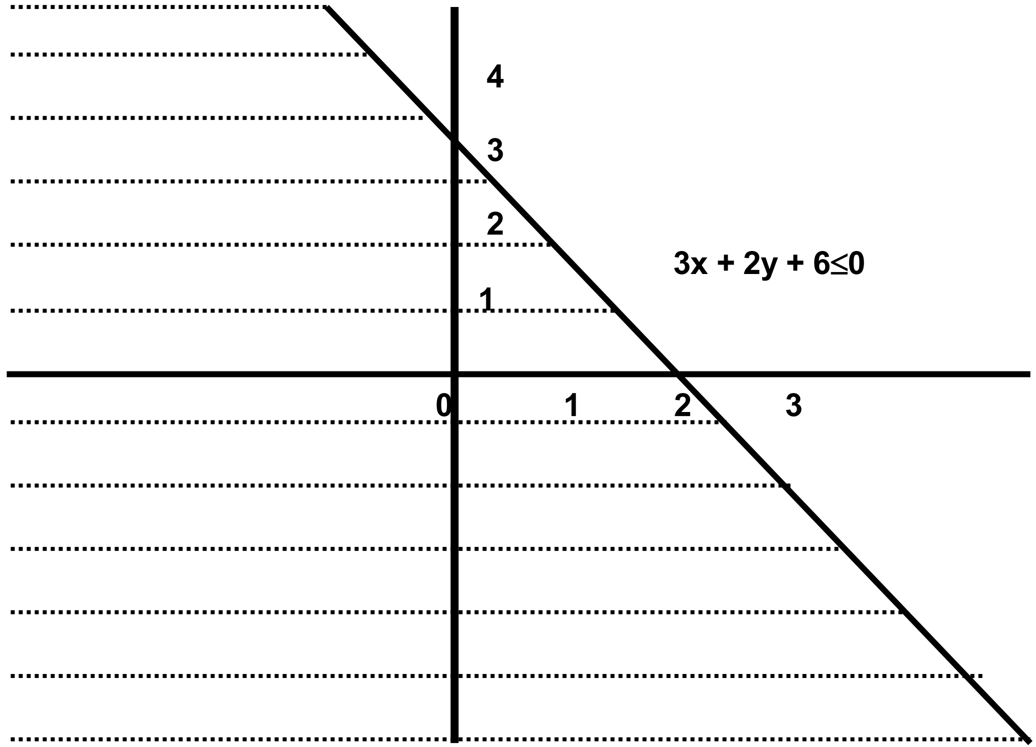


Fig. Nº 46

Ejemplo: Dibujar el gráfico de soluciones de la inecuación: $5x - 2y + 10 \leq 0$.

Solución: Despejando y en la inecuación tenemos: $y \geq -\frac{5}{2}x + 5$, luego bujamos la frontera de esta recta, y aplicamos lo dicho anteriormente, resultando:

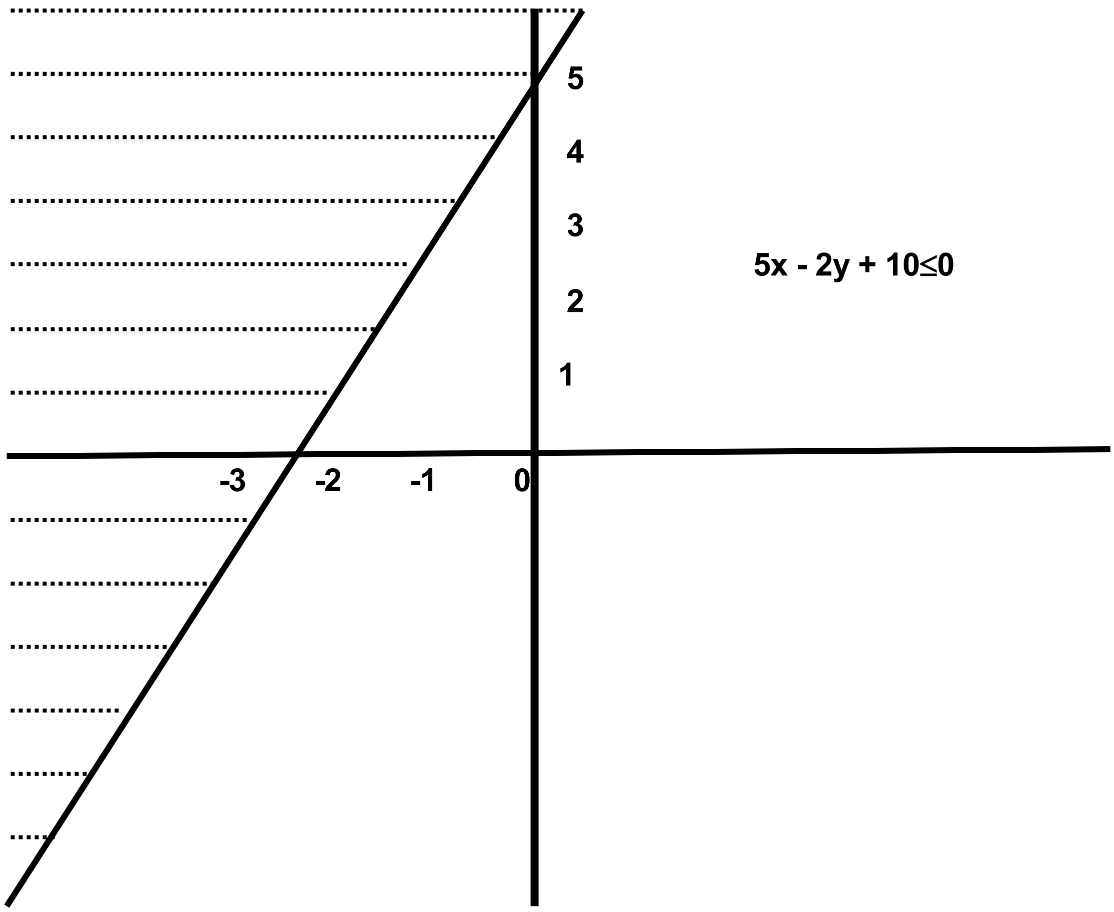


Fig. Nº 47

<u>Inecuaciones no lineales con dos variables</u>: Aquí estudiaremos las inecuaciones con valor absoluto y las cuadráticas.

<u>Definición 15:</u> Inecuaciones con valor absoluto: son de la forma: $y \geq |x|$ e $y \leq |x|$ y su representación es:

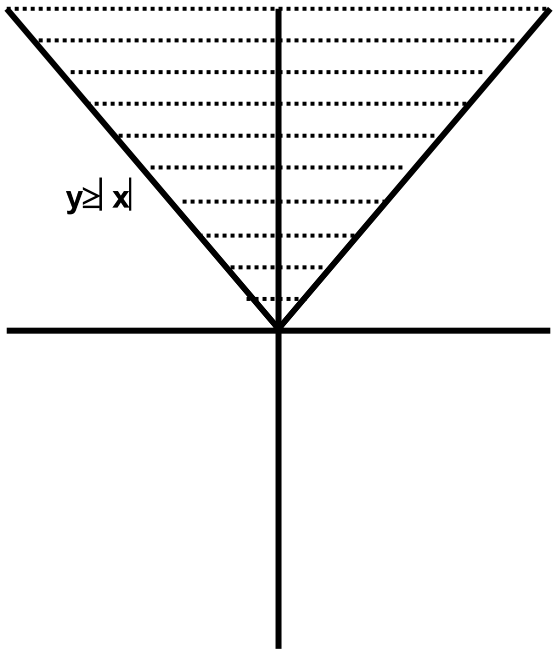


Fig. Nº 48

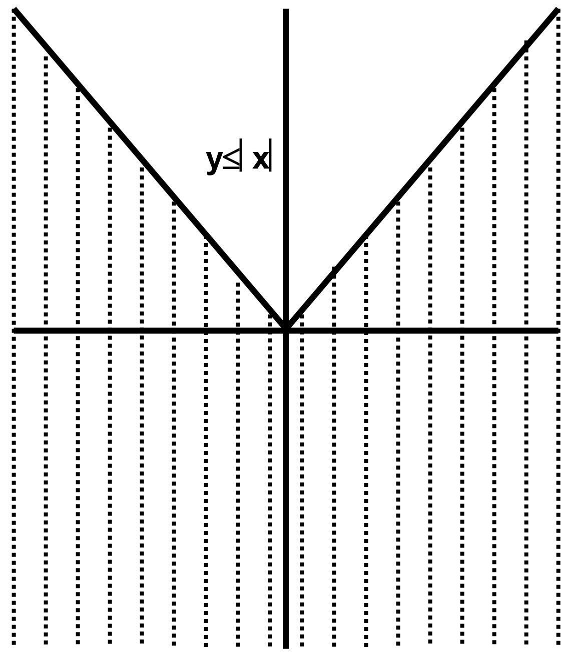


Fig. Nº 49

<u>Ejemplo:</u> Dibujar la gráfica de la inecuación $y > |x+3|$

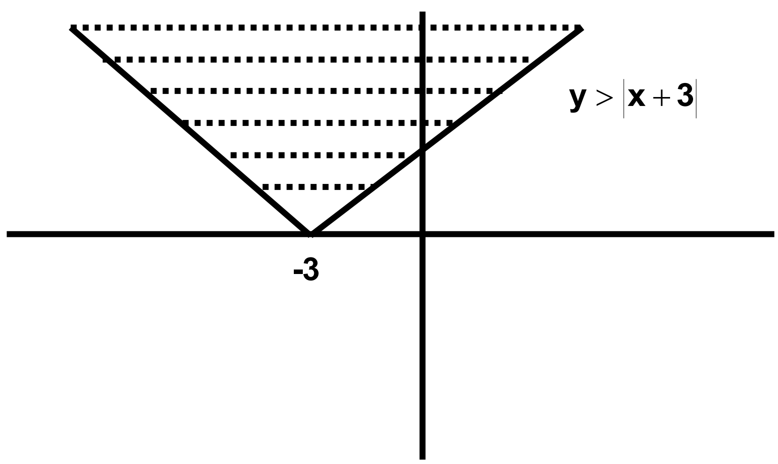


Fig. Nº 50

<u>Ejemplo:</u> Dibujar la gráfica de la inecuación $y < 2 - |x+1|$

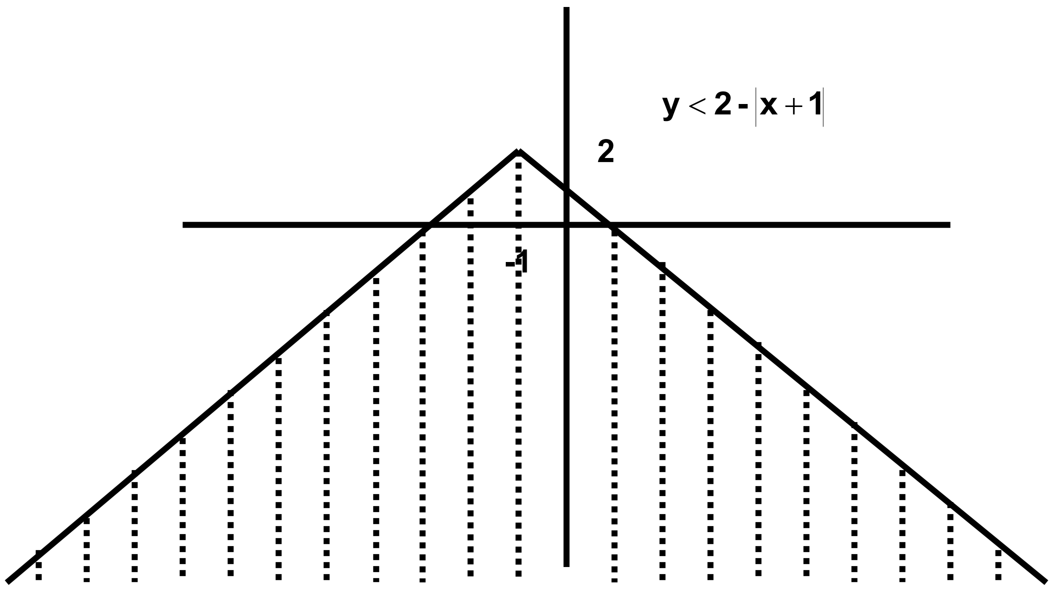


Fig. Nº 51

<u>Definición 16:</u> Las inecuaciones cuadráticas son de la forma: $y \geq ax^2 + bx + c$; e $y \leq ax^2 + bx + c$, la cual se gráfica la frontera $ax^2 + bx + c = 0$ y luego se procede de la siguiente manera:

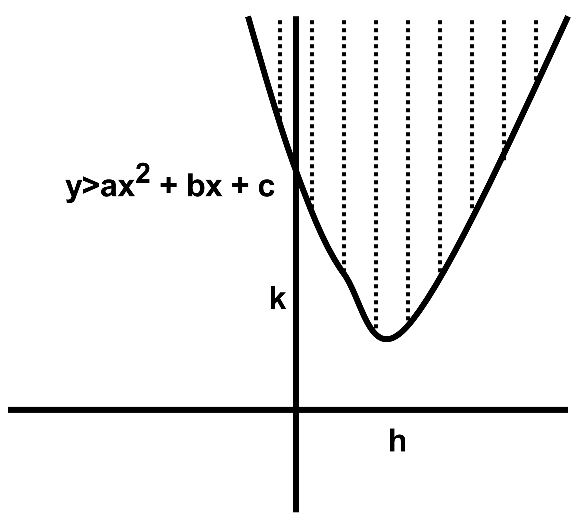


Fig. Nº 52

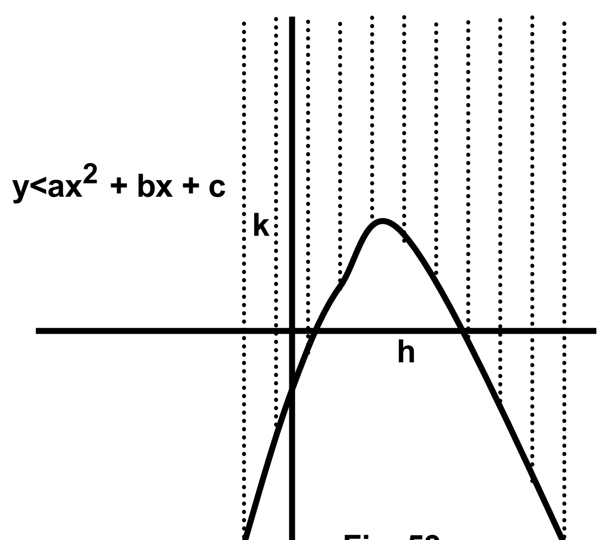


Fig. 53

<u>Ejemplo:</u> Dibujar el gráfico de la inecuación: $y>x^2 + x - 6$

<u>Solución:</u> Graficamos la frontera: $y=x^2 + x - 6$, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego factorizo para obtener los cortes con el eje X.

$y = (x + \frac{1}{2})^2 - 6 - \frac{1}{4} \Rightarrow y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$, por lo tanto, el vértice es

$(h, k) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0,-6) y factorizando: $y=(x - 2)(x + 3)$, lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (-3,0) y (2,0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: $y>x^2 + x - 6$

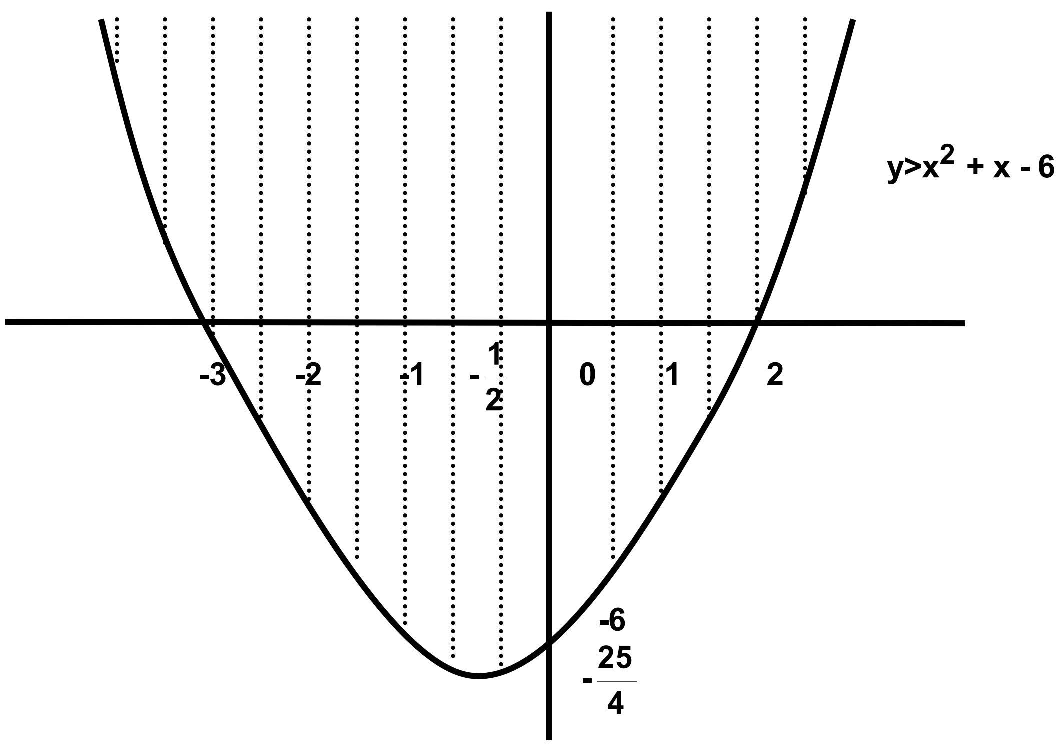


Fig. Nº 54

<u>Ejemplo:</u> Dibujar el gráfico de la inecuación: $y<-x^2 - 3x + 4$

<u>Solución:</u> Graficamos la frontera $y=-x^2 - 3x + 4$, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego factorizo para obtener los cortes con el eje X.

$$y=-\left\lfloor x^2+3x-4\right\rfloor \Rightarrow \quad y=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4-\frac{9}{4}\right] \Rightarrow y=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right] \Rightarrow$$

$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$, por lo tanto, el vértice es $(h, k)=\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0,4) y factorizando: $y=(1 - x)(x + 4)$, lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (-4, 0) y (1, 0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: $y<-x^2 - 3x + 4$

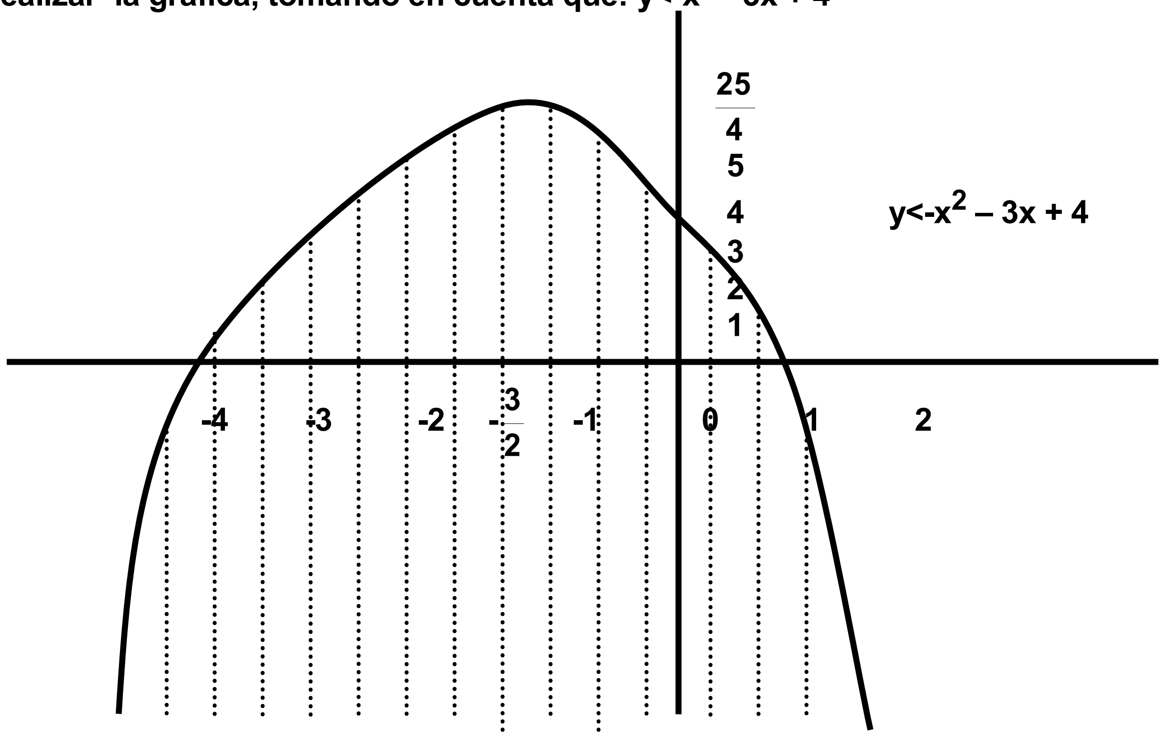


Fig. Nº 55

<u>Ejemplo:</u> Dibujar el gráfico de la inecuación: $y>-x^2 + 3x - 2$

<u>Solución:</u> Graficamos la frontera $y=-x^2 + 3x - 2$, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego se factoriza para obtener los cortes con el eje X.

$$y=-\left[x^2 - 3x + 2\right] \Rightarrow y=-\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}\right] \Rightarrow y=-\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \Rightarrow$$

$y=-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, por lo tanto, el vértice es $(h,k)=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0, -2) y factorizando: $y=(1 - x)(x - 2)$, lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (1, 0) y (2, 0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: $y<-x^2 + 3x – 2$

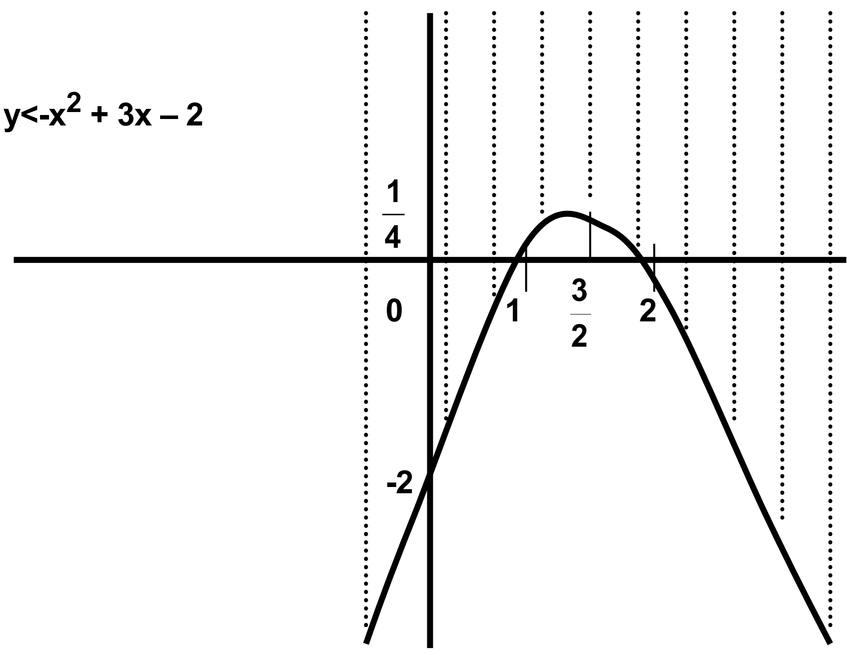


Fig. Nº 56

<u>Definición 17:</u> Se define un sistema de inecuaciones como aquel sistema que está formado por dos o más inecuaciones. Para la solución de este sistema, se buscan los puntos de intersección de todas las

inecuaciones involucradas y se grafican sus fronteras, la solución total será la intersección de dichas inecuaciones.

<u>Ejemplo:</u> Trazar el gráfico del conjunto de soluciones:

$$\begin{cases} l_1: 2x + y - 3 > 0 \\ l_2: x - 2y + 1 < 0 \\ l_3: y - 3 < 0 \end{cases}$$

Solución: Pasando los términos independientes para el segundo miembro, en l1, dividimos toda la ecuación por 3 y luego aplicamos la doble c, en l2 dividimos por -1 y luego aplicamos la doble c, y nos queda:

$$\begin{cases} l_1: 2x + y - 3 > 0 \\ \\ l_2: x - 2y + 1 < 0 \\ \\ l_3: y - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y_1 > 3 \\ \\ x - 2y_2 < -1 \\ \\ y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y}{3} > 1 \\ \dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{\frac{1}{2}} < 1 \\ y < 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, la recta l_1 corta al eje X en el punto P($\frac{3}{2}$, 0) y al eje Y en el punto P(0, 3), la recta l_2 corta el eje X en el punto P(-1, 0) y al eje Y en el punto (0, $\frac{1}{2}$), luego se buscan los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_3, la cual se consigue sustituyendo y=3 en la recta $l_1 \Rightarrow$ x=0, es decir, (0, 3), ahora buscamos los puntos de intersección entre las rectas l_2 y l_3 la cual se consigue sustituyendo y=3 $\Rightarrow$ x=5, es decir, (5, 3), por ultimo buscamos los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_2, aplicando para ello el método de reducción para resolver el sistema de ecuaciones, multiplicando a l_1 por 2 y luego sumamos l_1 y l_2 se reducen las y, obteniéndose el valor de x, que en este caso es: $5x=5 \Rightarrow x=1$, sustituyendo este valor de x en l1 se obtiene que $2 + y -3=0 \Rightarrow y=1$, por lo tanto, las rectas li y l2 se intersectan en el punto P(1, 1) graficando las tres rectas, ubicando los puntos de intersección, la solución será el área común, como se indica en la gráfica:

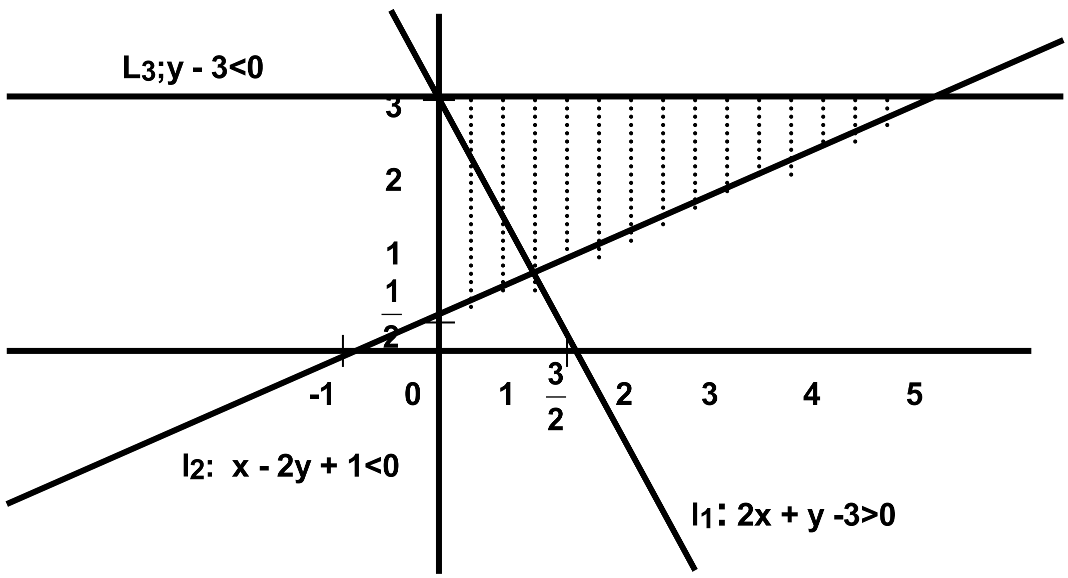


Fig. Nº 57

Ejemplo: Trazar el gráfico del conjunto de soluciones:

$$\begin{cases} y_1 > x^2 - 6x + 5 \\ 4x + 2y_2 - 10 < 0 \end{cases}$$

Solución: Trabajaremos en primer lugar con y_2, completando cuadrado se tiene que: $y_1>(x - 3)^2 - 9 + 5 \Rightarrow y_1>(x - 3)^2 - 4 \Rightarrow y_1>(x - 3)^2 - 2^2$, aplicando la identidad $a^2 - b^2=(a- b)(a + b)$, donde en este caso $a=x - 3$ y $b=2$, se tiene que $y_1>(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) \Rightarrow$

y_1>(x – 5)(x – 1) o también y_1>(x – 3)^2 – 4 ⇒ (y_1 + 4)>(x – 3)^2, por la ecuación general de la parábola (y – k)=L(x – h)^2, donde (h, k) es el vértice de la parábola, en este caso el vértice es (3, -4), hayamos ahora los cortes con los ejes de coordenados: corte con el eje Y, es cuando x=0 ⇒ y_1=5, es decir, y_1 corta al eje Y en el punto P(0, 5), corte con el eje X, es cuando y=0 ⇒ (x – 5)(x – 1)=0 ⇒ x – 5=0 ó x – 1=0 ⇒ x=5 ó x=1, es decir, los cortes con el eje X son P(1, 0) y P(5, 0)

Para y_2, con conseguir los cortes con los ejes de coordenados tenemos la gráfica, es decir, corte con el eje Y, x=0 ⇒ 2 y_2 - 10=0 ⇒ y_2=5, por lo tanto, corta al eje Y en el punto P(0, 5), corte con el eje X, y_2=0 ⇒ 4x – 10=0 ⇒ x=$\frac{5}{2}$, es decir, corta a el eje X en el punto ($\frac{5}{2}$, 0), por último, buscamos la intersección entre y_1 e y_2, esto lo hacemos igualando y_1 a y_2, es decir, y_1= y_2, ⇒ x^2 - 6x + 5=-2x + 5 ⇒ x^2 - 4x=0 ⇒ x(x - 4)=0 ⇒ x=0 ó x=4, sustituyendo estos valores de x en y_1 o y_2, en este caso lo sustituiremos en y_2, para x=0, se tiene que 2y_2 - 10=0 ⇒ y=5 y para x=4, se tiene que 16 + 2y_2, -10=0 ⇒ 2 y_2,=-6 ⇒ y=-3, por lo tanto, y_1 e y_2 se intersectan en los puntos P(0, 5) y P(4, -3), con todos estos resultados realizaremos la gráfica:

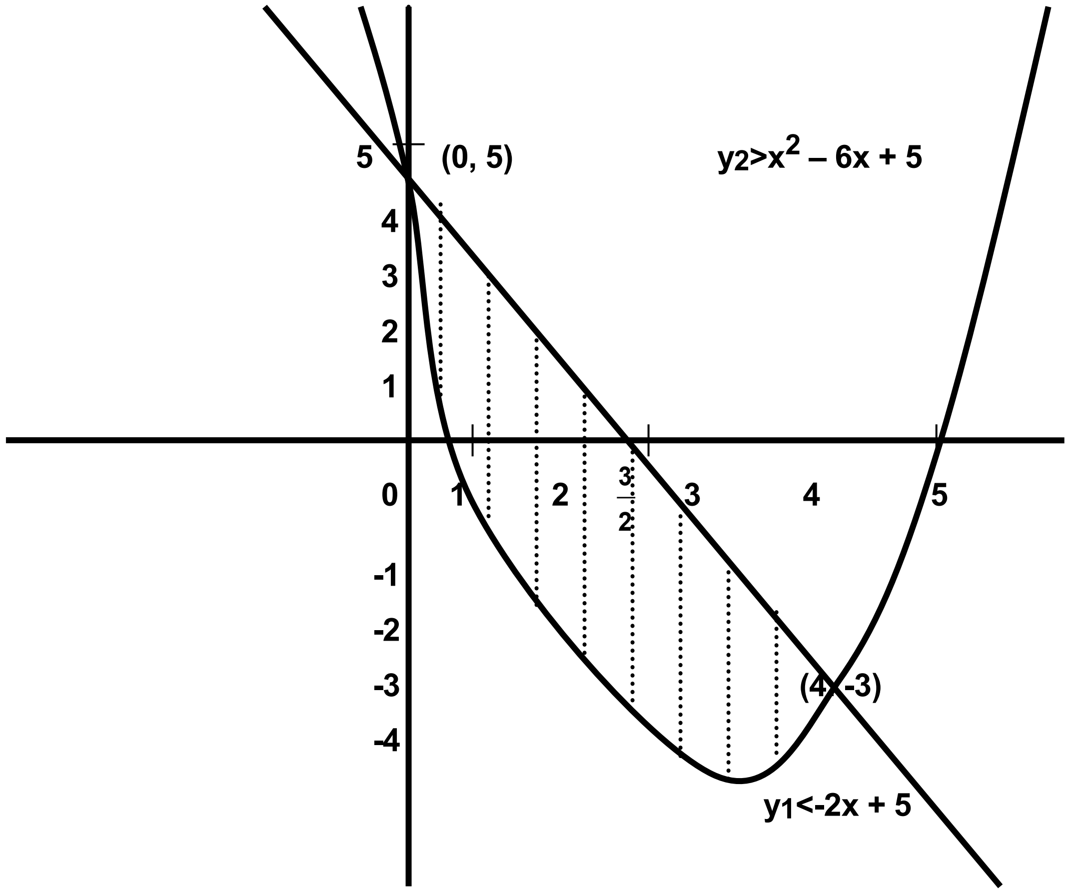


Fig. Nº 58

La solución es el área rayada

EJERCICIOS RESUELTOS

9. Determine qué $|x-3|<1 \Rightarrow \frac{1}{8}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{6}$ y halle las soluciones analíticas y geométricas

Solución: Aplicando la propiedad $|x|<a \Rightarrow$ -a<x<a, tenemos que: $|x-3|<1 \Rightarrow$ -1<x – 3<1 sumando a cada término 7, tenemos: 6<x +4<8, aplicándole a cada miembro el inverso con lo cual cambia de sentido la desigualdad se obtiene lo requerido, e.i. $\frac{1}{8}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{6}$

10. Determine el intervalo al cual pertenece x si: $\frac{4-3x}{5} \in \left[\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right]$

Solución: como x pertenece al intervalo cerrado $\left[\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right]$, tenemos que: $\frac{3}{4} \le \frac{4-3x}{4} \le \frac{6}{5}$, multiplicando cada uno de los miembros por el mínimo común denominador que en este caso es 20 tenemos: 15≤20 – 15x≤24, restándole a cada miembro 20 tenemos: -5≤-15x≤4, multiplicando toda la expresión por $-\frac{1}{15}$ con lo cual las desigualdades cambian de sentido se tiene: $-\frac{4}{15} \ge x \ge -\frac{1}{3}$, se tiene que el intervalo buscado será: $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{15}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$ o $x \varepsilon \Re - \left(-\frac{4}{15}, -\frac{1}{3}\right)$

11. Pruebe que: $|3x - 5| < 5 \Rightarrow |x| < \frac{10}{3}$

Solución: Aplicando la propiedad $|x| < a \Rightarrow$ -a<x<a, tenemos que: $|3x - 5| < 1 \Rightarrow$ -5<3x – 5<5 sumando a cada termino 5, tenemos: 0<3x<10, multiplicando a cada miembro por $\frac{1}{3}$ se tiene que 0<x<$\frac{10}{3}$, por lo tanto, queda probado que sí $|3x - 5| < 5 \Rightarrow |x| < \frac{10}{3}$.

12. Pruebe que la siguiente proposición satisface: $x \in (2,4) \Rightarrow \frac{1}{2x+3} \in \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{7}\right)$

Solución: como $\frac{1}{2x+3} \in \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{7}\right)$ se tiene que $\frac{1}{11} < \frac{1}{2x+3} < \frac{1}{7}$, aplicándole a cada miembro el inverso con lo cual cambia de sentido la desigualdad se obtiene: 7<2x + 3<11, restándole 3 a cada término obtenemos: 4<2x<8 y multiplicando por $\frac{1}{2}$ se obtiene 2<x<4, por lo tanto, $x \in (2,4)$

13. Sea $\varepsilon \in Z+$, demuestre que: $|(4x - 10) - 2| < \varepsilon$ si $|x - 3| < \delta$

Solución: $|(4x - 10) - 2| = |4x - 12| = |4(x - 3)|$, aplicando la propiedad $|ax| = a\,|x|$, se tiene que $4|x - 3|$<ε, pero como $|x - 3|$ está acotado por δ, tenemos que 4δ<$\varepsilon \Rightarrow \delta$<$\frac{\varepsilon}{4}$

14. Hallar las soluciones analíticas y geométricas de las siguientes inecuaciones:

a) $1 - \frac{x-7}{3} \geq 2 - \frac{2x-3}{4}$

b) $|-7x+3| - |4x+1| \leq 0$

c) $x^2 + 10x + 16 \leq 0$

d) $\sqrt{x^2 - 12x + 35} \leq 0$

e) $3x^3 - 3x^2 - 5x - 2 < 0$

f) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 < 0$

g) $\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 5x - 3} \leq 0$

Solución a): $1 - \frac{x-7}{3} \geq 2 - \frac{2x-3}{4}$, multiplicando todos los miembros por el mínimo común denominador m.c.d(3, 4), que en este caso es 12 tenemos: $12 - 4x + 28 \geq 24 - 6x + 9$ agrupando términos semejantes tenemos que $2x \geq -7 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ y la solución geométrica:

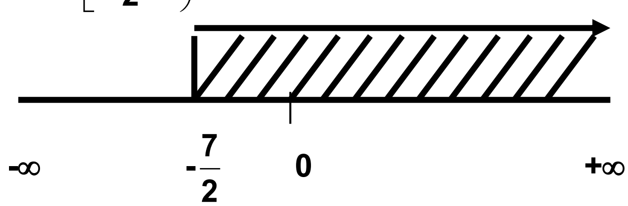


Fig. Nº 59

Solución b): $|-7x+3| - |4x+1| \leq 0 \Rightarrow |-7x+3| \leq |4x+1| \Rightarrow -7x + 3 \geq 4x + 1 \Rightarrow$

$11x \leq 2 \Rightarrow x \leq \dfrac{2}{11} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{11}\right]$

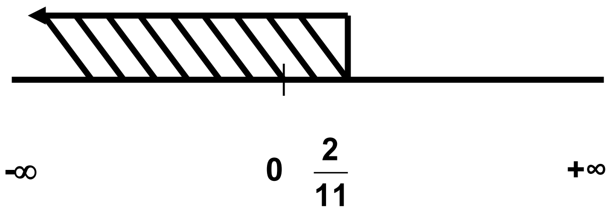


Fig. Nº 60

Solución c): $x^2 + 10x + 16 \leq 0$, completando cuadrado: $(x + 5)^2 + 16 - 25 \leq 0 \Rightarrow (x + 5)^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow (x + 5)^2 \leq 9$, aplicando la definición de distancia entre dos puntos tenemos: $|x + 5| \leq 3$, es decir, la distancia que hay desde x hasta -5 es menor o igual que 3, $\therefore$ $x \in [-8, -2]$

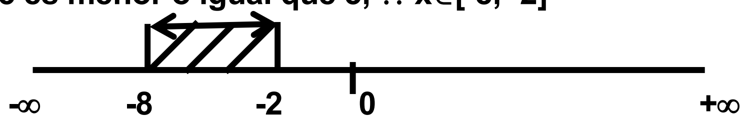


Fig. Nº 61

Solución d): $\sqrt{x^2 - 12x + 35} \leq 0$, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos que $x^2 - 12x + 35 \leq 0$, completando cuadrado $(x - 6)^2 + 35 - 36 \leq 0 \Rightarrow \Rightarrow (x - 6)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x - 6)^2 \leq 1$, aplicando la definición de distancia entre dos puntos tenemos: $|x - 6| \leq 1$, e.i. la distancia que hay desde x hasta 6 es menor o igual que 1, $\therefore$ $x \in [5, 7]$

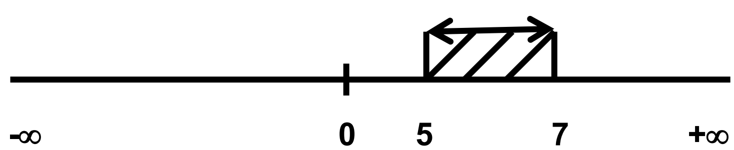


Fig. Nº 62

Solución e) $3x^3 - 3x^2 - 7x - 2 < 0$, aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -2 & -7 & -2 \\
-1 & & -3 & 5 & 2 \\
\hline
 & 3 & -3 & -2 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & 2 & \\
\hline
 & 3 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Entonces, $3x^3 - 3x^2 - 7x - 2<0 \Rightarrow (x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - 2)<0$, los puntos de separación en este caso son: $x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$ y $x=2$ y los puntos de prueba son: $x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ y $x=3$

Factor	**p.p** $-\infty$ ... -2 **p.s** -1	**p.p** $\frac{1}{2}$ **p.s** $-\frac{1}{3}$	**p.p** 0 **p.s** 2	**p.p** 3 ... $+\infty$
x + 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$x + \frac{1}{3}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x - 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Signo	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**si**	**No**	**si**	**no**

Cuadro Nº 8

Solución analítica: $x\in(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, 2)$

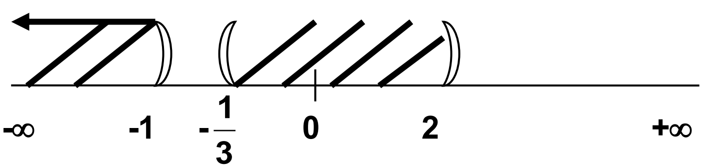


Fig. Nº 64

Solución f): $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2<0$, aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar

	2	5	0	-5	-2
-1		-2	-3	3	2
	2	3	-3	-2	0
1		2	5	2	
	2	5	2	0	
-2		-4	-2		
	2	1	0		

Entonces, $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2<0 \Rightarrow (x + 2)(x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - 1)<0$, los puntos de separación en este caso son: $x=-2$, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$ y $x=1$ y los puntos de prueba son: $x=-3$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{4}$, $x=0$ y $x=2$

Factor	p.p (−3) · p.s (−2) · p.p ($-\frac{3}{2}$) · p.s (−1) · p.p ($-\frac{3}{4}$) · p.s ($-\frac{1}{2}$) · p.p (0) · p.s (1) · p.p (2) — $-\infty$ … $+\infty$				
$x + 2$	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x + 1$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x + \frac{1}{2}$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)
Solución	si	No	si	no	si

Cuadro Nº 9

Solución analítica: $x \in (-\infty, 2) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

Solución geométrica

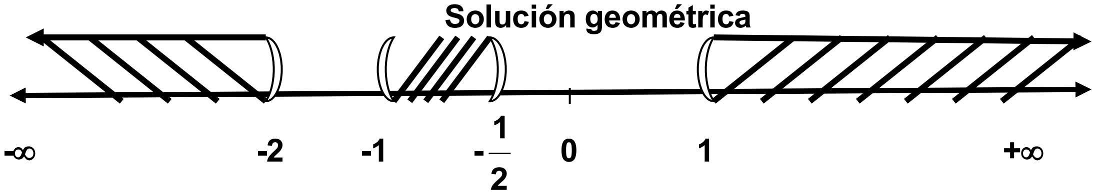


Fig. Nº 65

Solución g): $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 5x - 3} \leq 0$, **aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar**

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
-1 & & -1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \lfloor 0 \\
2 & & 2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \lfloor 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & -2 & 5 & -3 \\
1 & & -2 & 3 \\
\hline
 & -2 & 3 & \lfloor 0
\end{array}
$$

Entonces, $\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{-2x^2+5x-3} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} \geq 0$, se cambió la desigualdad porque se multiplicó por -1 a $\dfrac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} \geq 0$, los puntos de separación en este caso son: x=-3, x=-1, x=1, x=$\dfrac{3}{2}$, y x=2 y los puntos de prueba son: x=-4, x=-2, x=0, x=$\dfrac{29}{20}$, x=$\dfrac{7}{4}$ y x=3

Factor	p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p $-\infty$ -4 -3 -2 -1 0 1 $\frac{29}{20}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$ 2 3 $+\infty$					
$x + 3$	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x + 1$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x - 1$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x - \frac{3}{2}$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
Solución	no	si	no	si	no	si

Cuadro Nº 10

Solución analítica: $x \in [-2,-1] \cup (1, \frac{3}{2}) \cup [3, +\infty)$

7. **Hallar las soluciones geométricas de las siguientes inecuaciones de dos variables.**

a) $y < \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}$

b) $y > x^2 - 6x + 7$

c) $\begin{cases} y<-x^2 + 2x + 2 \\ y>x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2>x \\ y<2 - x \end{cases}$

Solución a) $y<\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$, para realizar la gráfica de esta recta buscamos los puntos con los ejes de coordenadas, e.i. $\frac{4}{3}x - y>\frac{3}{2}$, dividiendo los dos miembros por $\frac{3}{2}$, tenemos que: $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}x-\frac{1}{\frac{3}{2}}y>1 \Rightarrow$ $\frac{x}{\frac{9}{8}}-\frac{y}{\frac{3}{2}}>1 \Rightarrow$ que la recta corta al eje X en el punto $\left(\frac{9}{8},0\right)$ y al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $\therefore$ la gráfica de la función y será:

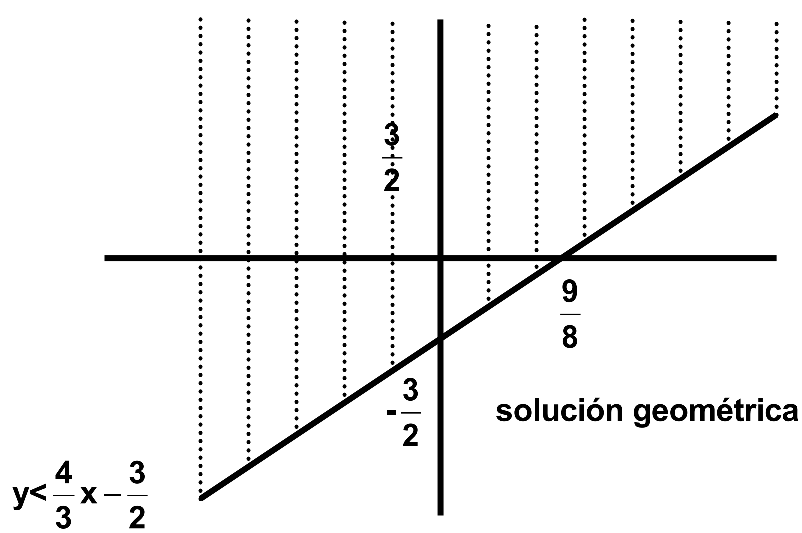


Fig. Nº 66

Solución b): $y>x^2 - 6x + 7$, para realizar la gráfica de esta función, completamos cuadrado en el segundo miembro, $y>(x – 3)^2 + 7 - 9 \Rightarrow (y + 2)>(x – 3)^2$, e.i. el vértice de la parábola está en el punto (3,-2) y como el coeficiente de la variable x es positivo esta parábola se habré hacia arriba y corta al eje y en el punto (0,7) y al eje x, cuando y=0, tenemos que $(x – 3)^2=2 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{2}$, e.i. en los puntos $(3-\sqrt{2}, 0)$ y $(3+\sqrt{2}, 0)$, luego su gráfica será:

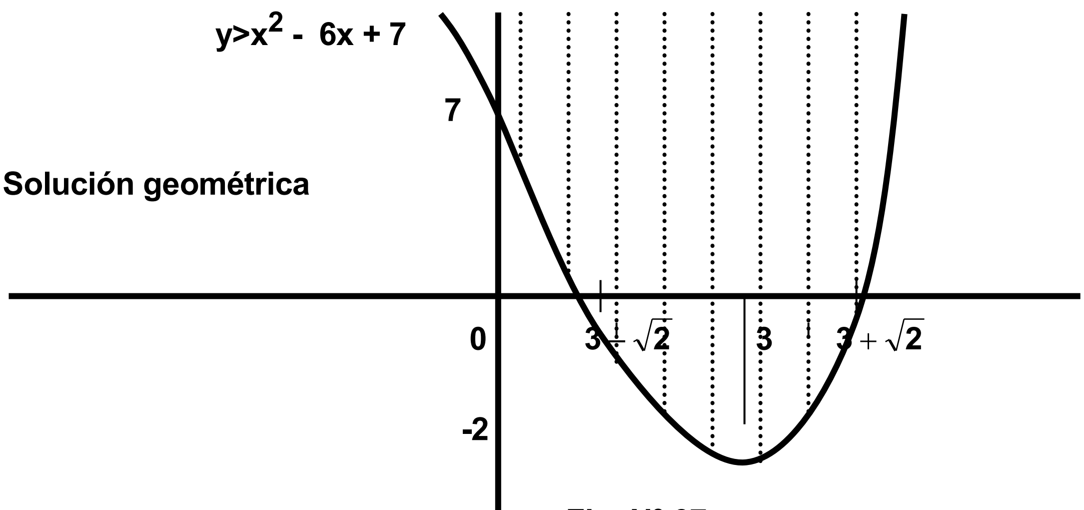


Fig. Nº 67

Solución c): $\begin{cases} y_1<-x^2 + 2x + 2 \\ y_2>x^2 – 2x + 2 \end{cases}$

Completando cuadrado para en la función $y_1<-x^2 + 2x + 2$, en el miembro derecho tenemos; $y_1<-[x^2 - 2x – 2] \Rightarrow y_1<-[(x – 1)^2 - 2 – 1] \Rightarrow y_1<-(x – 1)^2 + 3, \Rightarrow (y_1 - 3)=-(x -1)^2$, con lo que el vértice de la parábola está en el punto P(1, 3), como el lado recto es negativo se habré hacia arriba, corta al eje Y en el punto P(0, 2) y al eje X, cuando $y_1=0 \Rightarrow (x - 1)^2=3 \Rightarrow$

$x=1 \pm \sqrt{3}$, e.i. corta al eje X en los puntos: P($1 - \sqrt{3}$, 0) y ($1 + \sqrt{3}$, 0), ahora, Completando cuadrado en la función $y_2 > x^2 - 2x + 2$, en el miembro derecho tenemos; $y_2 > (x-1)^2 + 2 - 1 \Rightarrow y_2 > (x-1)^2 + 1$, $\Rightarrow (y_2 - 1) = (x-1)^2$, con lo que el vértice de la parábola está en el punto P(1, 1), como el lado recto es positivo se habré hacia arriba, corta al eje Y en el punto P(0, 2) y al eje X, cuando $y_2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -1 \Rightarrow$ que no hay corte con el eje X, busquemos los puntos de intersección entre y_1 e y_2, lo cual hallaremos igualando y_1 e y_2, $\Rightarrow -x^2 + 2x + 2 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$, para $x=0$, se tiene que $y=2$ y para $x=2$ se tiene que $y=2$, luego y_1 e y_2 se intersectan en los puntos P(0, 2) y (2, 2) y su gráfica es:

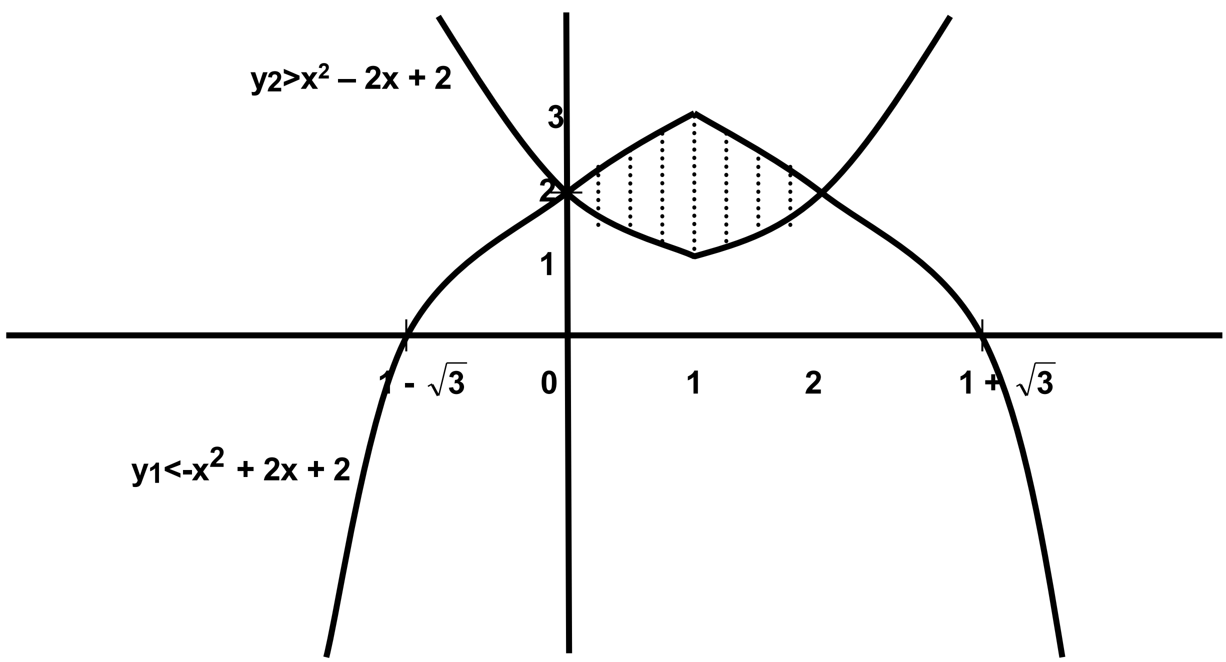


Fig. Nº 68

Solución d) $\begin{cases} y_1 > \sqrt{x} \\ y_2 < 2 - x \end{cases}$

$y_1 > \sqrt{x}$, es una parábola paralela al eje X, en el origen de coordenadas, $y_2 < 2 - x$ es una recta cuyos cortes con los ejes de coordenadas, para x=0, y=2, y para y=0, x=2, e.i. la función corta a los ejes en los puntos P(2 ,0) y P(0, 2), para ver donde se intersectan y_1 e y_2, se igualan estas dos ecuaciones e.i. $\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = (2 - x)^2 \Rightarrow$ $x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, factorizando esta ecuación de segundo grado se tiene que: $(x - 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 1$ o $x = 4$, para x=1 se tiene que y=1 y para x=4 se tiene que y=-3, luego y_1 e y_2, se intersectan en los puntos P(1, 1) y P(4, -3), y su grafica es:

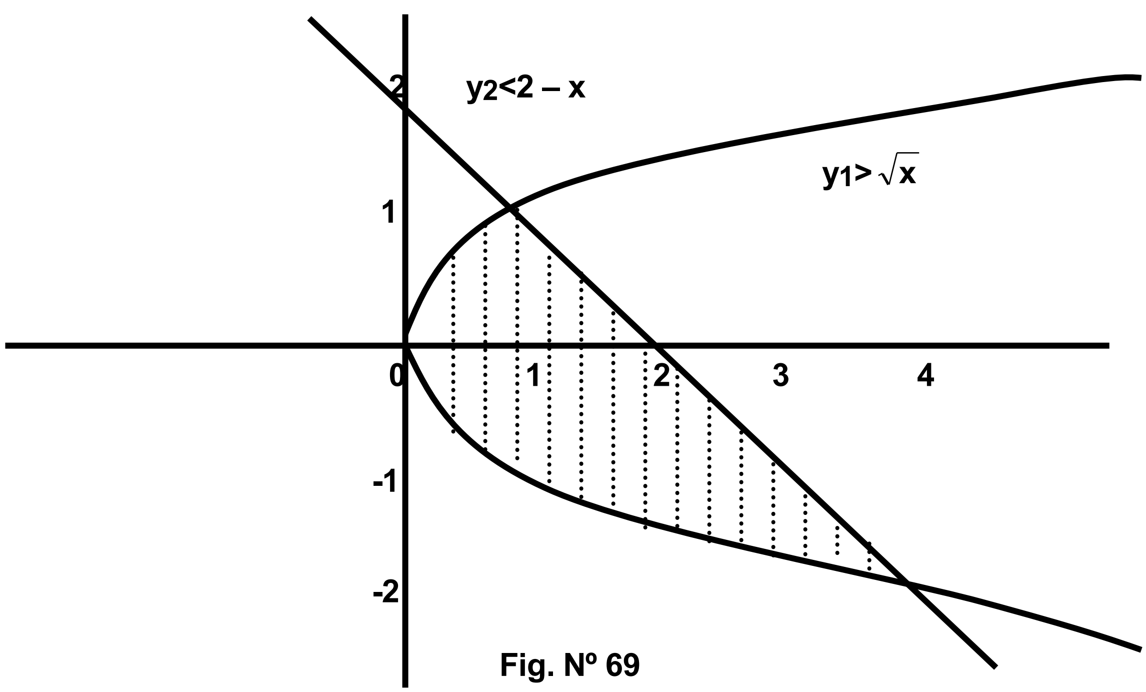


Fig. Nº 69

La solución es el área rayada

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dados los siguientes conjuntos: A=[-2, 5); B=(0, 7]; C=(-6, 2); D=[4, 8); E=$\left(\frac{10}{3}, \frac{32}{5}\right)$; F=(-∞, 11]; G=(2, ∞); H=[-2, $\sqrt{11}$); I=[$\sqrt{2}, \pi$); J=[$-\frac{9}{4}$, ∞); K=(-∞, $\sqrt{10}$]; L=(e,π], hallar:

a) $(A \cap F) - K$

b) $(H \cup B) \cap (C - G)$

c) $J - (D \cup E)$

d) $(A \cup I) - (B \cap F)$

e) $(K - L)'$

f) $(A \cap L) \cup (B \cap K)$

2. Determinar y hallar las soluciones analítica s y geométricas de:

a) $|(4x+23)-3| < 4 \Leftrightarrow |x-5| < 1$

b) $|(5x-27)-3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-6| < \frac{1}{6}$

c) $\left|\frac{1}{x}-2\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{3}-x\right| < \frac{1}{3}$

3. Sea $\varepsilon \in Z^+$, demuestre que $|(10x-36)-14| < \varepsilon$ cuando $|x-5| < \frac{\varepsilon}{10}$

4. Encuentre $\delta \in Z+ / |(4x-10)-2| < \varepsilon$ si $|x-3| < \delta$

5. Determine en cada caso, el intervalo al cual pertenece x si:

a) $3x - 2 \in [2, 5]$

b) $\frac{3}{5}x + \frac{3}{4} \in \left(-\frac{1}{2},\, 1\right)$

c) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4} \in \left[-\frac{7}{5},\, -\frac{9}{5}\right]$

6. Pruebe cada una de las siguientes proposiciones:

a) $x \in [-2, 5] \Rightarrow x + 3 \in [1, 8]$

b) $x \in (3, 7) \Rightarrow \frac{1}{x-1} \in \left[\frac{1}{6},\, \frac{1}{2}\right]$

7. Resolver las inecuaciones establecidas y trazar su conjunto de soluciones sobre la recta real:

a) $2x - 1 < 6$

b) $\frac{2x-5}{4} \geq 3$

c) $\frac{7x-3}{3} < x + 1$

d) $10 - 3x > \frac{4x-5}{-7}$

e) $|2x-1| - 3 < 0$

f) $|x-7| + 8 > 0$

g) $\left|\frac{3x-7}{4} \leq 8\right|$

h) $|x+1| - |x+2| \geq 0$

i) $|2x+1| < 5$

j) $|2x-3| < x+5$

k) $\left|\frac{2}{3}x-5\right| \geq \frac{1}{2}$

l) $\left|\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}\right| > x+3$

m) $|2x-3| \leq |x+2|$

n) $x^2>9$

o) $4x^2 - 12x - 7 >0$

p) $2x^2 - 3x + 1\leq 0$

q) $-3x^2 + 5x + 2>0$

r) $7x^2 - 3x - 5>0$

s) $34x^2 + 2x - 1>0$

t) $4 - 3x - x^2\geq 0$

u) $16x^2 + 1\geq 8x$

v) $x^3 - 3x^2 + x -3>0$

w) $x^3 - 2x^2 - 5x - 3\geq 0$

x) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12>0$

y) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16\leq 0$

z) $x^5 - 5x^3 + 4x>0$

aa) $x^3 + x^2 + x - 4>0$

bb) $\dfrac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+2x^3-9x^2-8x+14} \leq 0$

cc) $\left|\dfrac{2x+5}{4x-3}\right| < 0$

dd) $\left|\dfrac{4x-3}{2x+1}\right| > 1$

ee) $(x^2 + 3x - 4)(x^2 - x -2) \leq 0$

ff) $|7x+13| \leq 3x+2$

gg) $\left|\dfrac{3x-1}{4x+3}\right| > 3$

hh) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x^2-1)(x+2)(x+3)} \leq 0$

ii) $\left|\dfrac{x-3}{2x-1}\right| > \left|\dfrac{4x-1}{5x+6}\right|$

jj) $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| \leq |x-1|$

kk) $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{3x^2-3x+1} \leq 0$

ll) $\dfrac{2x^4-5x^3-5x^2+5x+3}{2x^2-3x+1} \leq 0$

8. Escribir una inecuación que establezca:

a) La distancia de x a menos $-\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{5}$

b) La distancia de x a $\frac{5}{3}$ es mayor que $\frac{8}{5}$

c) La distancia de San Fernando a Barinas es menor o igual a 625Km.

d) La distancia de San Fernando a Puerto la Cruz es igual a 640Km.

e) La distancia de San Fernando a San Felipe es mayor de 800Km.

9. Dibujar el gráfico y hallar la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $3x + 2y - 6<0$

b) $x - y - 1\geq 0$

c) $2x + 5y -10<0$

d) $5x - 5y>-7$

e) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y > 6$

f) $x^2 + 9x + 8\leq y$

10. Dibujar el gráfico del conjunto de soluciones de las inecuaciones simultáneas y encontrar los puntos de intersección entre las gráficas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 12>0 \\ x + 6y + 4>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 3>0 \\ x - 2y + 1<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - 2>0 \\ x - 3y + 2<0 \\ y>3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 3<0 \\ x - 2y + 1<0 \\ x + y - 5<0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 3y - 12>0 \\ 4x - 5y + 20>0 \\ 4x - y - 12<0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y>x^2 + 9x + 8 \\ x + 2y - 4<0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y>x^2 - 10x + 24 \\ x - y>0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y>x^2 - 8x + 12 \\ y + 5>0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y<-x^2 + 2x - 1 \\ x + 3y + 3<0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y>x^2 - 6x + 5 \\ 4x + 2y - 10<0 \end{cases}$

CAPÍTULO II

FUNCIONES

Este capítulo se estudiaran: FUNCIONES: Producto Cartesiano de $\Re x \Re$, Relación, Relación de Equivalencia, Relación de Orden, Funciones: Dominio, Recorrido, Grafo, Tipo de Función: Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva, Operaciones de Funciones: Suma, Resta, Multiplicación y División, Inversa de una Función, Composición de Funciones, Traslación de Funciones al Origen, Rotación de Funciones al Origen, Función Afín, Algunas de sus Propiedades y Gráfica, Aplicación a la Vida Real de Funciones Lineales, Función Polinómica, Raíz de una Función Polinómica, Método de Ruffini para hallar la Raíz de una Función Polinómica, Factorización de las Funciones de la forma $x^n \pm y^n$, Factorización de las Funciones de la forma $\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$, Gráfica de una Función Polinómica: $f(X)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_o$, con $(n \leq 3)$, Función Exponencial, Algunas Propiedades y Gráficas, Ecuaciones de Funciones Exponencial, Funciones Logarítmicas, Algunas Propiedades y Gráficas, Ecuaciones de Funciones Logarítmicas.

FUNCIONES

Teorema 1: Un par ordenado (a, b) se expresa como un conjunto formado por {{a}, {a, b}}, e.i. (a, b)={{a}, {a, b}}.

Demostración: La propiedad característica del par ordenado (a, b) es que (a, b)=(c, d) sii a=c y b=d, $\therefore$, se trata de ver que: {{a}, {a, b}}={{c}, {c, d}} sii a=c y b=d.

La demostración la haremos por doble inclusión, que consiste en ver si {{a}, {a, b}}$\subset${{c}, {c, d}}, luego lo contrario, e.i {{c}, {c, d}}$\subset${{a}, {a, b}}

a. {{a}, {a, b}}$\subset${{c}, {c, d}}

$$\begin{cases} \{a\}=\{c\} \wedge |\{a, b\}=\{c, d\} \text{ (1)} \\ \qquad\quad \vee \end{cases}$$

$\{a\}=\{c, d\} \wedge \{a, b\}=\{c\}$ (2).

En el caso (1), {a}={c} $\Rightarrow$ a=c y $\therefore$, {a, b}={c, d} $\Rightarrow$ {a, b}={a, d} $\Rightarrow$ b=d

En el caso (2) {a}={c, d} $\Rightarrow$ a=c=d y en consecuencia {a, b}={c} $\Rightarrow$ {a, b}={a} $\Rightarrow$ a=b, luego a=b y c=d.

{{c}, {c, d}}$\subset${{a}, {a, b}}, si a=c y b=d, es evidente que {{a}, {a, b}}={{c}, {c, d}}, quedando esto demostrado

Definición 1: Se define el ***Producto Cartesiano*** de dos conjuntos A y B como el conjunto cuyos elementos son todos pares ordenados cuya primera componente pertenece a A, y la segunda componente pertenece a B, e.i. $AxB=\{(x, y)/x\in A \wedge y\in B\}$. Si $A=B=\Re$ se tiene que: $\Re x\Re=\Re^2=\{(x, y)/x\in\Re \wedge y\in\Re\}$.

<u>Ejemplo:</u> $A\mathit{C}\Re/A=\{x\in Z/2<x<6\}$ y $B\mathit{C}\Re/B=\{x\in Z/x^2 - 2x - 8=0\}$. Hallar AxB.

De la definición de conjunto obtenemos que $A=\{3, 4, 5\}$ y $B=\{-2, 4\}$, luego: $AxB=\{(3, -2), (3, 4), (4, -2), (4, 4), (5, -2), (5, 4)\}$, este conjunto de pares ordenados recibe el nombre de ***<u>grafo.</u>***

La representación tabular es:

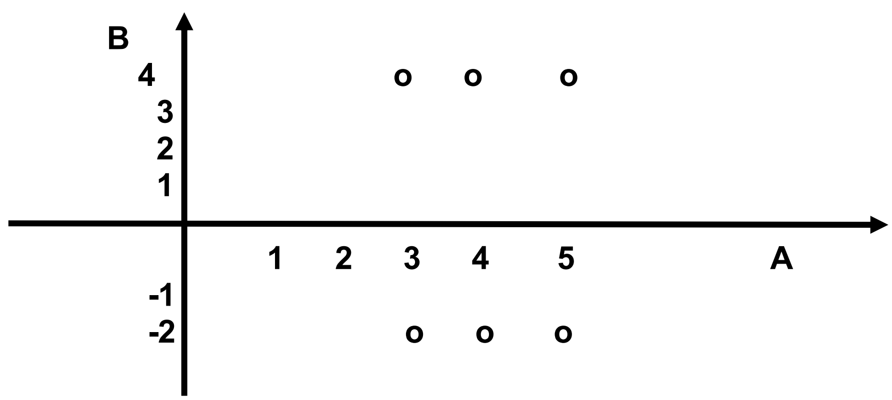


Fig. Nº 1

<u>Definición 2:</u> Una ***Relación de A en B***, es cualquier subconjunto del producto cartesiano AxB, e.i. $\Re$ es una relación de A en B sii $\Re\mathit{C}AxB$.

<u>Definición 3:</u> Si $A=B=\Re$, Decimos que $\Re R$ es una ***<u>relación interna</u>.***

Para decir que un par ordenado (x, y) pertenece a la relación, se escribe $x\Re y$, lo que equivale a decir $(x, y)\in\Re$. Otra manera de definir la ***Relación*** es como una correspondencia que existe entre un conjunto A llamado ***<u>Dominio</u>*** y un conjunto B llamado <u>Recorrido.</u>

<u>Ejemplo:</u> En el ejemplo anterior, la relación A es mayor que B, está representado por el grafo: $a\Re b=\{(3, -2), (4, -2), (5, -2), (5, 4)\}$, e.i. los elementos de A que son mayores que los elementos de B.

<u>Definición 4:</u> Se define el <u>*Dominio de una Relación*</u> como las preimágenes de la relación, e.i. los elementos del conjunto A que admiten imagen en B. Matemáticamente: $Dom\Re=\{x\in A/(x, y)\in\Re\}$.

<u>Ejemplo</u>*:* En el ejemplo tras anterior, el dominio de la relación es: $Dom\Re=\{3, 4, 5\}$.

<u>Definición 5</u>: Se define el <u>*Recorrido de una Relación*</u> como el conjunto de imágenes de la relación, e.i. el conjunto de elementos de B que admiten un antecedente en A. Matemáticamente $Rec\Re=\{y\in B/(x, y)\in\Re\}$.

<u>Ejemplo:</u> Como vimos en los ejemplos anteriores el recorrido de la relación es $Rec\Re=\{-2, 4\}$.

<u>Definición 6</u>: Una relación $\Re C A^2$ es de <u>*Equivalencia en A*</u> sii cumple con las siguientes propiedades:

1) <u>*Reflexiva*</u>, e.i. todo elemento está relacionado consigo mismo.

2) <u>*Simétrica,*</u> e.i. si un elemento a esta relacionado con un elemento b, entonces el elemento b está relacionado con el elemento a.

3) <u>*Transitiva,*</u> e.i. si un elemento a esta relacionado con un elemento b y este elemento b está relacionado con un elemento c, entonces el elemento a esta relacionado con el elemento c. La relación de equivalencia se denota por: "$\equiv$", e.i. $a\equiv a$ reflexiva, $a\equiv b$ y $b\equiv a$ simétrica, $a\equiv b$

y $b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$ transitiva.

Ejemplo: En el conjunto Z definimos la relación: $x\Re y$ sii $x - y = \dot{10}$, probemos que esta relación es de equivalencia sobre Z.

1) $x - x = 0$, $0 = \dot{10}.0 = 0.\ \dot{10}$, entonces, $\forall x$, $x\Re x$, luego $\Re$ es reflexiva.

2) Supongamos que $x\Re y$, entonces, $x - y = \dot{10}$, $\therefore$ $\exists$ un $n \in Z / x - y = \dot{10}.n$, luego $y - x = \dot{10}\ (-n) = \dot{10}$, $\Rightarrow$ $x\Re y$ es simétrica.

Supongamos que $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow \exists n, m \in Z / x - y = 10n$ y $- z = 10m$, $\therefore$ $x - z = 10(n+m) = \dot{10}$, $\Rightarrow$ la relación es transitiva y por ende es una relación de equivalencia.

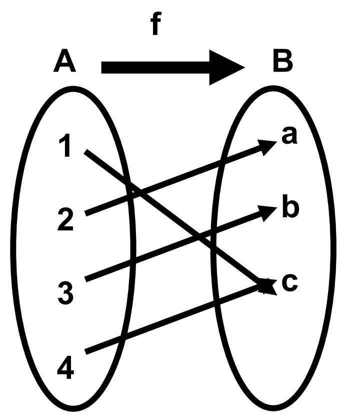
Definición 7: Sea $\Re C A^2$, *$\Re$ es una Relación de Orden en A* sii cumple con las siguientes propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva, la propiedad reflexiva y transitiva se mencionaron en la relación de equivalencia. La propiedad antisimétrica dice que si x está relacionado con y $\wedge$ y está relacionado con x, $\Rightarrow$ $x = y$.

Ejemplo: El conjunto de los números reales con la relación *"es menor que (<)"* cumple con una relación de orden. Este ejemplo queda como ejercicio para el lector.

Definición 8: Se define una *Función* como una correspondencia que existe entre un conjunto A llamado dominio y un conjunto B llamado recorrido, donde para todo elemento $x \in A$ $\exists$ un único elemento $y \in B / xfy$,

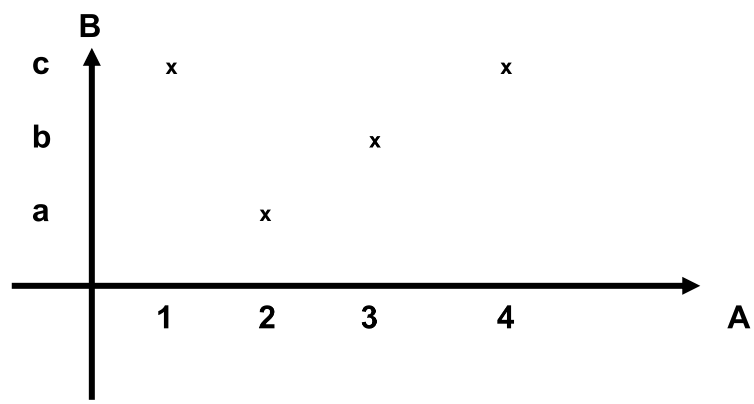
para denotar que f es una función de A en B escribimos: $f:A \to B$ o bien $x \to f(x)$.

<u>Ejemplo:</u>



Representación Sagital

Fig. Nº 2



Representación Tabular

Fig. Nº 3

El grafo de esta función es: f={(1, c), (2, a), (3, b), (4, c)}.

<u>Definición 9</u>: Se define el *<u>Dominio de una Función</u>* o conjunto de partida como el campo de existencia de la función, e.i. donde la función está definida, es por esto que al hacer cualquier estudio de una función lo primero que tenemos que hacer es ver donde la función está definida o sea buscar su dominio. Matemáticamente:

Domf={x∈A/y=f(x), para algún y∈B}.

<u>Definición 10</u>: Se define el ***<u>Rango o Recorrido</u>*** de una función como el conjunto de imágenes que recorre la función. Matemáticamente:

Recf={(y∈B/y=f(x), para algún x∈A}.

En el plano cartesiano el eje de las abscisas (eje de las X) representa el dominio y el eje de las ordenadas (eje de las Y) representa el recorrido de la función. Si la función está representada gráficamente, para hallar el dominio se traza rectas (imaginarias) paralelas al eje de las Y, donde corten estas rectas a la función pertenecerá al dominio, lo mismo trazando rectas paralelas al eje de las X, donde corten estas rectas a la función pertenecerá al recorrido. Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} e \text{ si } a\le x\le b \\ \dfrac{g-f}{d-c}(x-c)+d \text{ si } \quad c\le x\le d \end{cases}$$

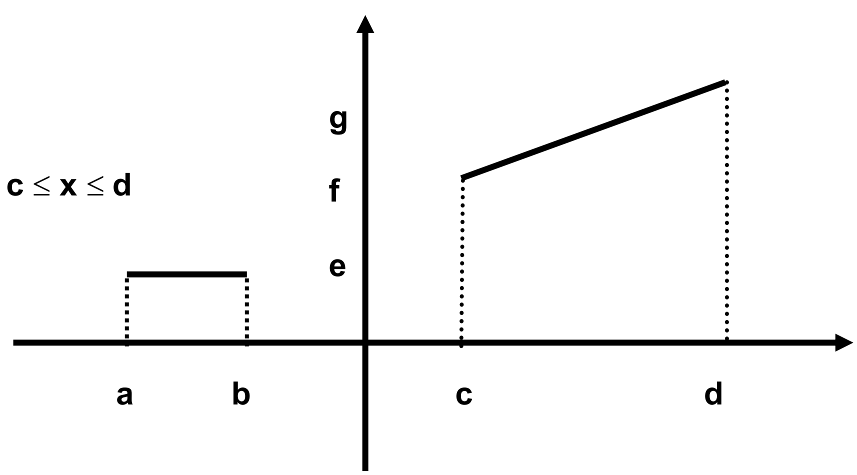


Fig. Nº 4

En la gráfica Nº 3, el Domf=[a, b]U[c, d] y Recf={e}U[f, g]

Si la función la tenemos en forma de grafo, entonces, el dominio serán las primeras componentes y el recorrido las segundas componentes de los pares ordenados, e.i. Domf={x/x es la primera componente del par ordenado (x, y)} y el Recf={y/y es la segunda componente del par ordenado (x, y)}

Ejemplo: f={(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8) ..... }

El Domf=Z^+ y Recf=P, donde P es un número de la forma 2K con $K \in Z^+$. Si la función esta en forma de proporción, entonces vemos los valores de $x \in \Re$ para determinar su dominio y los valores de $y \in \Re$ para determinar su recorrido.

Nota: Generalmente hallar el recorrido de una función es muy complicado, es por ello que primero se construye la gráfica y luego trazamos rectas paralelas al eje de las Y para buscar el recorrido. En este curso buscaremos el recorrido de funciones sencillas, e.i. en el origen.

Ejemplo: Hallar el dominio y el recorrido de las funciones:

a. $f(x)=2x + 7$ y b. $f(x)= \frac{3x - 5}{4x + 7}$

Solución: a. Domf=$\Re$, puesto que x puede tomar cualquier valor real. Para hallar el Recf, despejamos x en función de y, e.i. $x=\frac{y - 7}{2}$, luego Recf=$\Re$

Solución b. Domf=$\Re - \{-\frac{7}{4}\}$, ya que el denominador tiene que ser distinto de cero, $\therefore$, $4x + 7 \neq 0$, $\Rightarrow$ $x \neq -\frac{7}{4}$, para hallar el recorrido, despejamos x en función de y e.i. $y(4x + 7)=3x - 5 \Rightarrow 4xy + 7y=3x - 5 \Rightarrow$

$3x - 4xy = 7y + 5 \quad \Rightarrow x(3 - 4y) = 7y + 5 \Rightarrow x = \frac{7y+5}{3-4y}$, $\therefore$, como $3 - 4y \neq 0 \Rightarrow$

que $y \neq \frac{3}{4}$ y en consecuencia el Recf=$\Re - \{\frac{3}{4}\}$.

<u>Definición 11</u>: Sea f:A $\to$ B, se dice que f es <u>inyectiva</u>, si a cada par de elementos diferentes del dominio le corresponden imágenes diferentes, e.i. $\forall x, x' \in A$ se tiene que $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$ o $f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$.

<u>Definición 12:</u> Sea f:A $\to$ B, se dice que f es <u>sobreyectiva</u>, si f(A)=B, e.i. f:A $\to$ B es sobreyectiva sii $\forall y \in B\ \exists\ x \in A / y=f(x)$.

<u>Definición 13:</u> Sea f:A $\to$ B, se dice que f es <u>biyectiva</u> o uno a uno sii es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f: \Re \to \Re / f(x) = \frac{3x-8}{4x-5}$ estudiar la función: Primero veremos si la función es inyectiva, e.i. si $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$, haciendo la igualdad $\frac{3x-8}{4x-5} = \frac{3x'-8}{4x'-5} \Rightarrow 12xx' - 15x - 32x' + 40 = 12xx' - 32x - 15x' + 40 \Rightarrow 32x - 15x = 32x' - 15x' \Rightarrow 17x = 17x' \Rightarrow x = x'$, $\therefore$, la función es inyectiva.

Veremos ahora si la función es sobreyectiva, $y = \frac{3x-8}{4x-5}$ $\Rightarrow 4xy - 5y = 3x - 8 \Rightarrow 4xy - 3x = 5y - 8 \Rightarrow x = \frac{5y-8}{4y-3}$ como Recf=$\Re - \{\frac{3}{4}\}$, $f(A) \neq B$, $\therefore$, f no es sobreyectiva, en consecuencia no es biyectiva.

<u>Definición 14:</u> Sea f:A $\to$ B y g:C $\Rightarrow$D se define la <u>*Suma de Funciones*</u> $\forall x \in A, \forall x \in B$, como $(f + g)x = f(x) + g(x)$ y Domf$\cap$Domg.

<u>Ejemplo:</u> f={(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... } y g={(3, 4), (6, 8), (9, 12) .... }. Hallar: (f + g).

Aplicando la definición de suma, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego sumamos sus recorridos.

$f:Z^+ \rightarrow Z^+$, $g:3Z^+ \rightarrow Z^+$, el $Domf=Z^+$ y $Domg=3Z^+ \rightarrow$

$Domf \cap Domg=3Z^+$ y $\therefore$, (f + g)={(3, 13), (6, 26), (9, 39) ,..... }, e.i., la función suma $(f + g):3Z^+ \rightarrow 13Z^+$.

<u>Ejemplo:</u> Dadas las gráficas: $f(x)=\frac{2}{3}x - 6$ y $f(x)=x^2$ como se muestra en la gráficas Nº 4 y Nº 5, hallar la suma de (f + g)x.

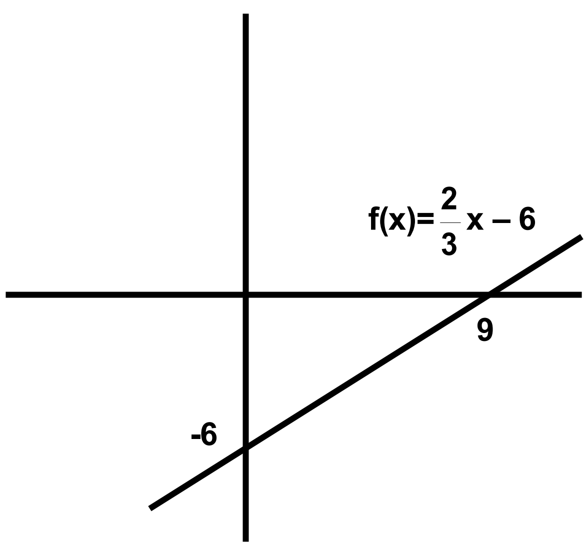


Fig. Nº 5

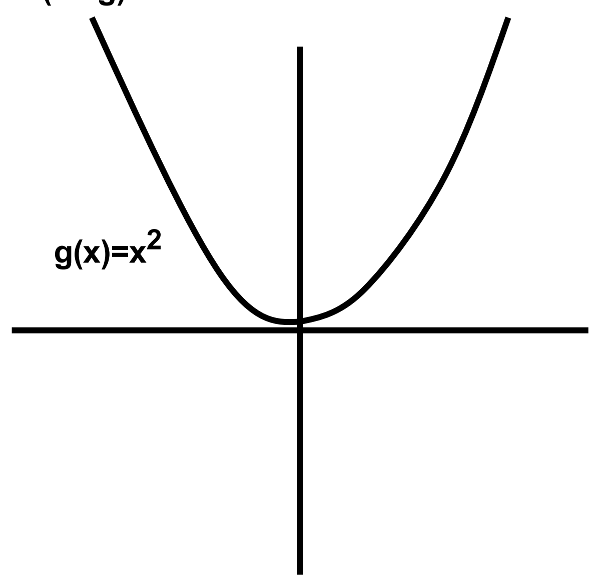


Fig. Nº 6

Según la definición de suma de funciones se tiene que buscar primero los dominios y luego sumamos los recorridos de los elementos comunes en dichos dominios, e.i. $Domf=\Re$ y $Recg=\Re$, luego la solución analítica para la suma de (f + g)x será: $(f + g)_x = x^2 + \frac{2}{3}x - 6$ y la solución geométrica será:

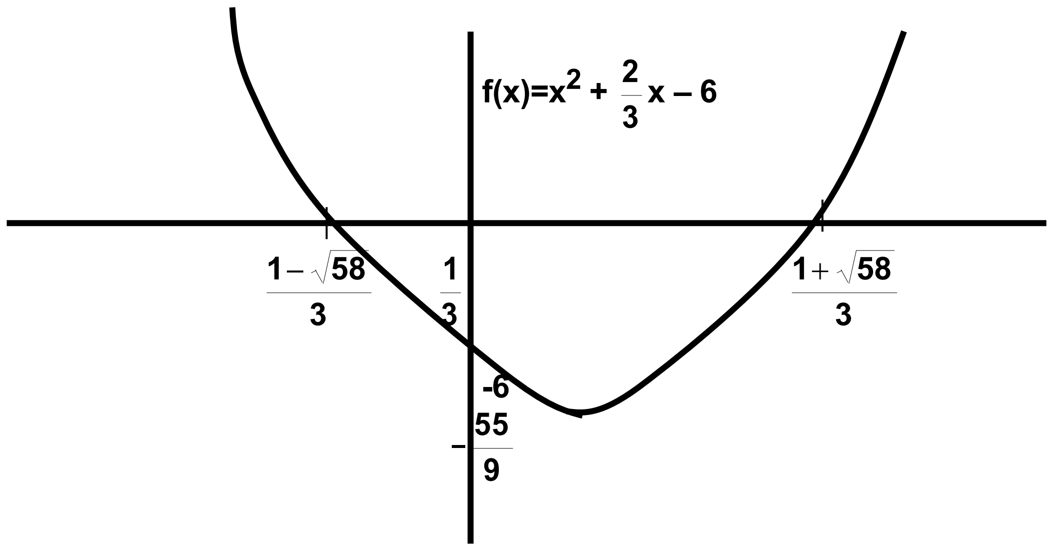


Fig. Nº 7

Para la solución geométrica procedemos de la siguiente manera: Según la gráfica Nº 4, se tiene que: $\frac{x}{9} - \frac{f(x)}{6} = 1 \Rightarrow 2x - 3f(x) = 18 \Rightarrow$

$f(x) = \frac{2}{3}x - 6$, y la gráfica Nº 5, tenemos: $g(x)=x^2$.

Aplicando la definición de suma de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g, luego sumamos sus recorridos, $Domf=\Re$ y $Domg=\Re$, luego $Domf \cap Domg=\Re$, con lo que, $(f + g)x = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{2}{3}x - 6$, $f: \Re \rightarrow \Re$, $g: \Re \rightarrow [0, +\infty]$ y

$(f + g): \Re \rightarrow [-\frac{55}{9}, +\infty]$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=2x + 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar $(f + g)x$, Aplicando la definición de suma de funciones, buscamos los dominios de las funciones f y g, luego sumamos sus recorridos.

$Domf=\Re$, $Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, luego $Domf \cap Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, $\therefore$,

$(f + g)x=f(x) + g(x)=\frac{6x^2+23x+13}{3x+5} \Rightarrow f:\Re \to \Re$ y $g: \Re - \{-\frac{5}{3}\} \to \Re$, y $(f + g): \Re - \{-\frac{5}{3}\} \to \Re$.

<u>Definición 15:</u> Sea $f:A \to B$ y $g:C \to D$ se define la ***<u>Resta de Funciones</u>***, $\forall x \in A$, $\forall x \in B$, como $(f - g)x=f(x) - g(x)$ y $Domf \cap Domg$.

<u>Ejemplo:</u> $f=\{(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... \}$ y $g=\{(3, 4), (6, 8), (9, 12) .... \}$ Hallar: $(f - g)$.

Aplicando la definición de resta, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego restamos sus recorridos.

$f:Z^+ \to 3Z^+$, $g:3Z^+ \to 4Z^+$, el $Domf=Z^+$ y $Domg=3Z^+ \Rightarrow Domf \cap Domg=3Z^+$ y $\therefore$, $(f - g)=\{(3, 5), (6, 10), (9, 15), ... \}$, e.i. la función resta, $(f - g):3Z^+ \to 5Z^+$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=2x - 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$ hallar $(f - g)x$, Aplicando la definición de resta de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego restamos sus recorridos, $Domf=\Re$, $Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, luego $Domf \cap Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, luego,

(f - g)x=f(x) - g(x) $\Rightarrow$ f(x) - g(x)= $\frac{6x^2-9x+10x-15-4x+2}{3x+5}=\frac{6x^2-3x-13}{3x+5}$,

f: $\Re\rightarrow\Re$, g: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\rightarrow\Re$, (f - g)x: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\rightarrow\Re$.

<u>Definición 16:</u> Sea f:A $\rightarrow$ B y g:C $\rightarrow$ D se define el *<u>Producto de Funciones</u>*, $\forall x\in A$, $\forall x\in B$, como (f.g)x=f(x).g(x) y Domf$\cap$Domg.

<u>Ejemplo:</u> f={(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... } y g={(3, 4), (6, 8), (9, 12) ....}. Hallar: (f.g).

Aplicando la definición de producto, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego multiplicamos sus recorridos, f:$Z^+\rightarrow 3Z^+$, g:$3Z^+\rightarrow 4Z^+$, el Domf=Z^+ y Domg=$3Z^+\Rightarrow$ Domf$\cap$Domg=$3Z^+$ y $\therefore$,

(f.g)={(3, 36), (6, 144), (9, 324), ... },

<u>Ejemplo:</u> f(x)=2x + 3, g(x)=$\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar (f.g)x, Aplicando la definición de producto de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g y luego multiplicamos sus recorridos, Domf=$\Re$, Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, luego Domf$\cap$Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, $\therefore$, (f.g)x=f(x).g(x)

$\Rightarrow$ f(x).g(x)=$\frac{(2x+3)(4x-2)}{3x+5}$ f: $\Re\rightarrow\Re$, g: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\rightarrow\Re$, y (f.g):$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\rightarrow\Re$

<u>Definición 17:</u> Sea f:A $\rightarrow$ B y g:C $\rightarrow$ D se define la *<u>División de Funciones</u>*, $\forall x\in A$, $\forall x\in B$, como ($\frac{f}{g}$)x=$\frac{f(x)}{g(x)}$ y Domf$\cap$Domg y g(x)$\neq$0.

<u>Ejemplo:</u> $f=\{(1, 3), (2, 6), (3, 9) \; ....\}$ y $g=\{(3, 4), (6, 8), (9, 12) \; .... \}$.

Hallar: $(\frac{f}{g})$.

Aplicando la definición de división, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego dividimos sus recorridos, $f:Z^+ \rightarrow 3Z^+$, $g:3Z^+ \rightarrow 4Z^+$, el $Domf=Z^+$ y $Domg=3Z^+ \Rightarrow Domf \cap Domg=3Z^+$ y $\therefore$, $(f/g)=\{(3, \frac{9}{4}), (6, \frac{9}{4}), (9, \frac{9}{4}), ...\}$ e.i. la función cociente es $(f/g):3Z^+ \rightarrow \{\frac{9}{4}\}$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=2x - 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar $(\frac{f}{g})x$, Aplicando la definición de división de funciones, buscamos los dominio de las funciones f y g, y luego dividimos su recorridos, $Domf=\Re$, $Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\}$, luego $Domf \cap Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\}$, $\therefore$, $(\frac{f}{g})x=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(2x-3)(3x+5)}{4x-2}$ $f:\Re \rightarrow \Re$, $g: \Re - \{-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\} \rightarrow \Re$, $(\frac{f}{g}):\Re - \{-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\} \rightarrow \Re$.

<u>Definición 18:</u> Sea $f:A \rightarrow B$, donde f es una función biyectiva. La correspondencia F^{-1}, de B en A, definida por $(y, x) \in F^{-1}$, sii $(x, y) \in F$, se define una función de B en A llamada <u>Función Inversa de F</u>. se denota por f^{-1}.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f: Z^+ \rightarrow 3Z^+ / f=\{(1, 3), (2, 6), (3, 9) \; ....\}$. Hallar la f^{-1}, Aplicando la definición de función inversa obtenemos:

$f^{-1}=\{(3, 1), (6, 2), (9, 3) \; ....\}$, $f^{-1}:3Z^+ \rightarrow Z^+$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $f:\Re - \{-\frac{5}{3}\} \to \Re - \{\frac{4}{3}\}/f(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar f^{-1},

Aplicando la definición de inversa de una función, obtenemos: $x=\frac{4f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)+5} \Rightarrow x[3f^{-1}(x) + 5]=4f^{-1}(x) - 2 \Rightarrow 3xf^{-1}(x) + 5x=4f^{-1} - 2 \Rightarrow$ $4f^{-1}- 3xf^{-1}=5x - 2 \Rightarrow f^{-1}=\frac{5x-2}{4-3x}$, de donde se deduce que $f^{-1}(x):\Re - \{\frac{5}{3}\} \to \Re - \{-\frac{4}{3}\}$.

<u>Definición 19:</u> Sea $f:A \to B$ y $g:B \to C$, la función $h:A \to C$ definida por $h(x)=g[f(x)]$, $\forall x \in A$, se denomina <u>***Función Compuesta***</u> de f y g o función composición de f y g y se escribe: $h(x)=(gof)x$.

<u>Ejemplo:</u> Sean $f:Z^+ \to 3Z^+/g:3Z^+ \to 4Z^+/f=\{(1 ,3), (2, 6), (3, 9), ...\}$ y $g =\{(3, 4), (6, 8), (9, 12) ....\}$ Hallar: (gof), Aplicando la definición de composición de funciones obtenemos: $(fog)=\{(1, 4), (2, 8), (3, 12) ......\}$ donde $(fog):Z^+ \to 4Z^+$.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(x)=2x + 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar (gof)x, Aplicando la definición de composición de funciones, obtenemos: $(gof)x=g[f(x)] \Rightarrow$ $g[f(x)]=\frac{4(2x+3)-2}{3(2x+3)+5} \Rightarrow (gof)x=\frac{8x+10}{6x+14} \Rightarrow (gof)x=\frac{4x+5}{3x+7}$.

<u>Definición 20:</u> Las funciones pueden representarse gráficamente como gráficas trazadas sobre un sistema de coordenadas rectangulares,

donde la variable independiente (x) se representa en el eje horizontal y la variable dependiente (y) se representa en el eje vertical.

<u>Definición 21:</u> Se define la *<u>Gráfica de una Función</u>*, como aquella que está constituida por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas (x_o, y_o) satisfacen la ecuación y=f(x).

<u>Ejemplo:</u> Representar gráficamente la parábola $f(x)=x^2$

<u>Solución:</u> Lo primero que hacemos es hallar el dominio de la función $f(x)=x^2$, que en este caso es todos los reales, e.i. Domf=$\Re$, luego le damos valores arbitrarios que pertenezcan a $\Re$, tomemos en este caso: {-2, -1, 0, 1, 2} y hallamos sus respectivas imágenes, y lo representamos en su forma sagital, es decir: las imágenes se hallan sustituyendo los elementos escogidos del dominio en la función $f(x)=x^2$, e.i. $f(\pm2)=(\pm2)^2=4$, $f(\pm1)=(\pm1)^2=1$, $f(0)=(0)^2=0$ como se ilustra en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

y su gráfica es:

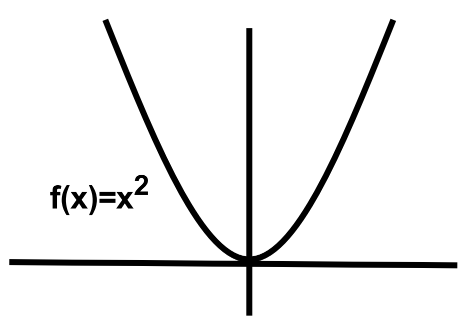


Fig. N° 8

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \Rightarrow (-\infty,0) \\ x^2 & \text{si } 0\leq x<2 \Rightarrow [0,2) \\ 4 & \text{si } 2\leq x<3 \Rightarrow [2,3) \\ 2x-2 & \text{si } 3\leq x<4 \Rightarrow [3,4) \\ -4 & \text{si } x\geq 4 \Rightarrow [4,+\infty) \end{cases}$$

Solución:

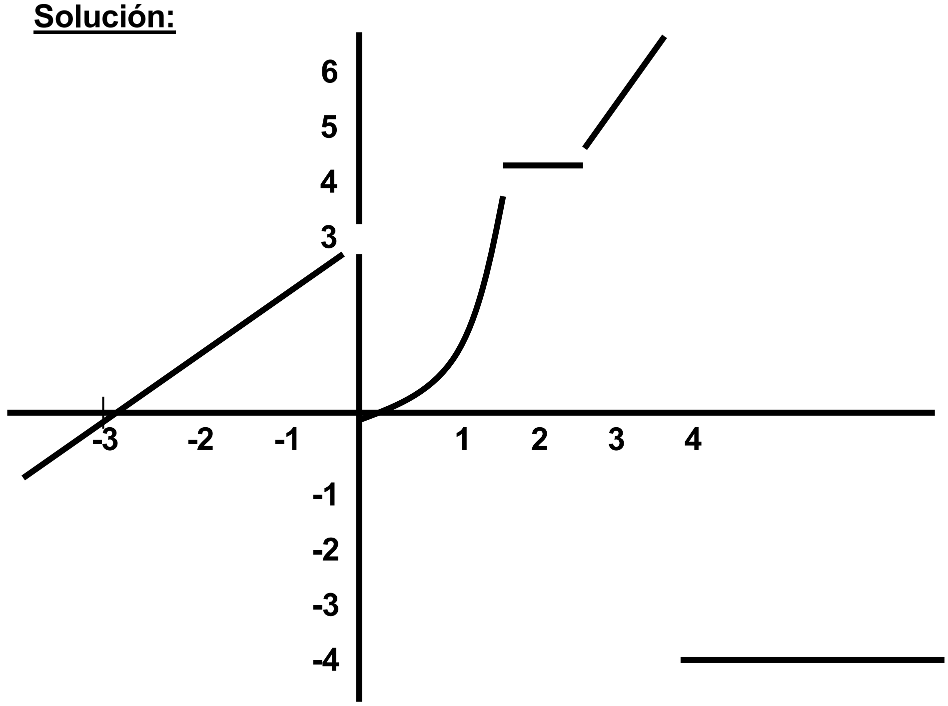


Fig.. N° 9

x	-3	0	2	3	4	5
f(x)	0	3	4	4	6	-4

Definición 22: Si g(x)=f(x) ± b para algún b∈ℜ, entonces, la gráfica g(x) se obtiene desplazando la gráfica de f(x) en sentido vertical ± b cantidades, si el signo de b es positivo, hay una traslación vertical hacia

arriba en b cantidades, si el signo de b es negativo, hay una traslación vertical hacia abajo en b cantidades.

<u>Ejemplo:</u> Graficar $f(x)=x^2$ y sin cálculos adicionales graficar:

a) $g(x)=x^2 + 1$, b) $h(x)=x^2 - 1$

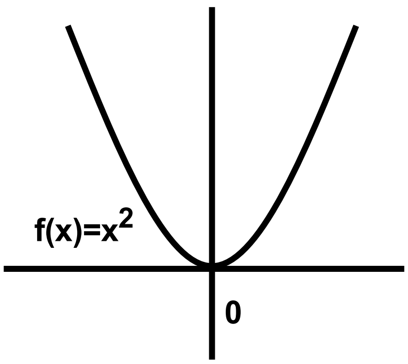


Fig. N° 10

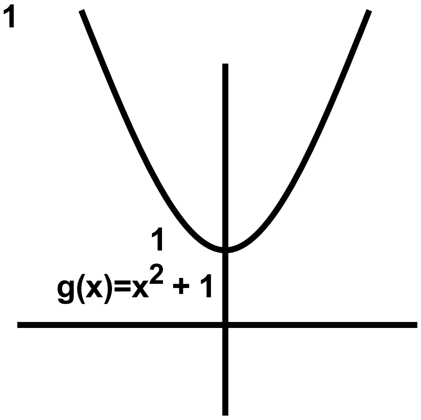


Fig. N° 11

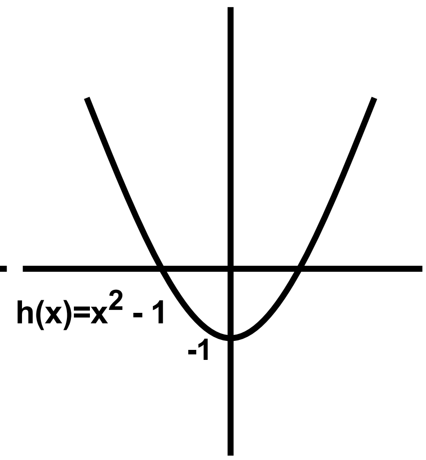


Fig. N° 12

<u>Definición 23:</u> Si $g(x)=f(x \pm b)$ para algún $b \in \Re$, entonces, la gráfica g(x) se obtiene desplazando la gráfica de f(x) en sentido horizontal ±b cantidades, si el signo de b es positivo, hay una traslación horizontal hacia la izquierda en b cantidades, si el signo de b es negativo, hay una traslación horizontal hacia la derecha en b cantidades.

<u>Ejemplo 27:</u> Graficar $f(x)=x^2$ y sin cálculos adicionales graficar:

a. $g(x)=(x + 1)^2$, b) $h(x)=(x - 1)^2$

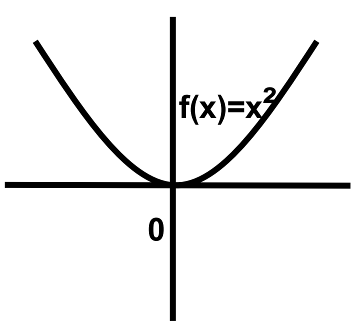


Fig. N° 13

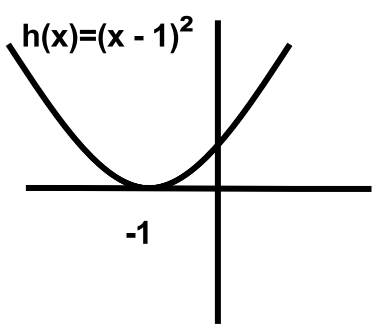


Fig. N° 14

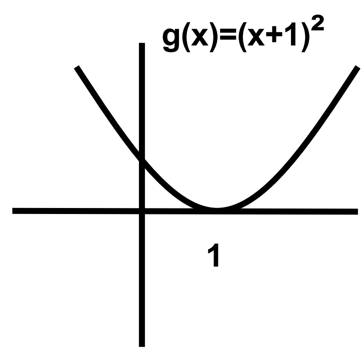


Fig. N° 15

<u>Definición 61:</u> Si g(x)=-f(x), entonces, la gráfica de g(x) se obtiene reflejando la gráfica de f(x) en el eje Y (180^0).

<u>Ejemplo:</u> Graficar $f(x)=x^2$ y sin cálculos adicionales graficar: $g(x)=-x^2$

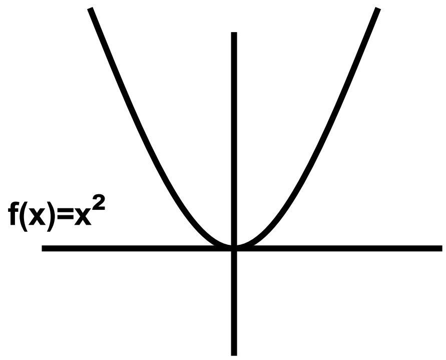


Fig. N° 16

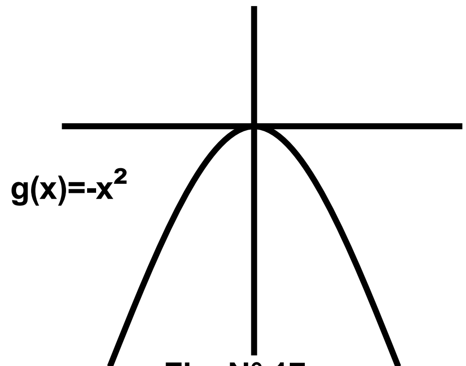


Fig. N° 17

<u>Definición 24:</u> En muchos casos de la vida real, la rata a la cual cambia una cantidad con respecto a otra cantidad recibe el nombre de <u>función lineal</u>.

<u>Ejemplo :</u> Un camión sale de San Fernando a Maracay, a una distancia de 300Km. Si se maneja el camión a una velocidad constante de 100Km/h, exprese la distancia del camión hasta su destino como una función del tiempo, Usando x para denotar el número de horas que ha estado el camión en la carretera y f(x) para la distancia correspondiente entre el camión y Maracay. Viajando a 100Km/h el camión recorrerá 100X kilómetros en x horas y, por lo tanto, $f(x)=300 - 100x$. Gráficamente:

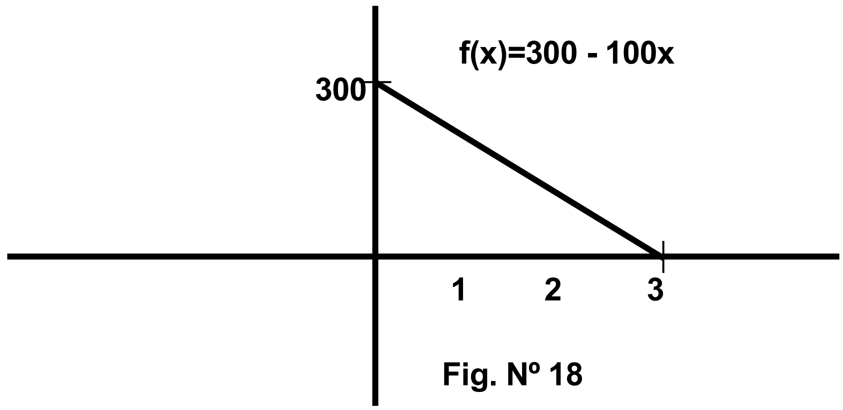


Fig. Nº 18

<u>Definición 25:</u> La función lineal se puede expresar de las siguientes formas:

a. $Ax + Bf(x) + C=0$, b. $f(x)=mx + k$, c. $f(x)=m(x - x_0) + f(x_0)$,

d. $\frac{x}{a}+\frac{f(x_0)}{b}=1$, e. $f(x)=\frac{y_1-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$,

f. $(x_1 - x_0)f(x)=(f(x_1) - f(x_0)) (x_1 - x_0) f(x_0)$,

La ecuación: a. y la f. es la ecuación general de la recta, la b. es la ecuación dada la pendiente y el corte con el eje Y, la c. es la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto, la d. es la ecuación paramétrica de la recta, la e. es la ecuación de la recta dada dos puntos.

En la ecuación a. A, B y C$\in\Re$, y el cociente $m=-\frac{A}{B}$, recibe el nombre de pendiente, que es la razón que existe en el cambio del eje Y a el cambio en el eje X es decir, $m=\frac{\text{Cambio en Y}}{\text{Cambio en X}} \Rightarrow m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

La ecuación b. se obtiene de la ecuación a., despejando en a. la variable dependiente y, luego sustituimos $m=-\frac{A}{B}$ y $k=-\frac{C}{B}$, y la ecuaciones

c. es obvio que se deduce de la ecuación b., lo mismo que la ecuación d, donde a es el corte con el eje X, y b es el corte con el eje Y.

Ejemplo: Hallar la pendiente de la recta que une los puntos $P_1(4, -2)$ y $P_2(-3, 4)$,

Solución: aplicando la fórmula de la pendiente tenemos: $m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Rightarrow m=\frac{4-(-2)}{-3-4}$, Si en la ecuación f. $f(x_1)=f(x_0)$ la pendiente vale 0, y en consecuencia nos resulta una recta paralela al eje de las X, y si $x_1=x_0$ la pendiente crece indefinidamente la recta que resulta es paralela el eje de las Y, gráficamente.

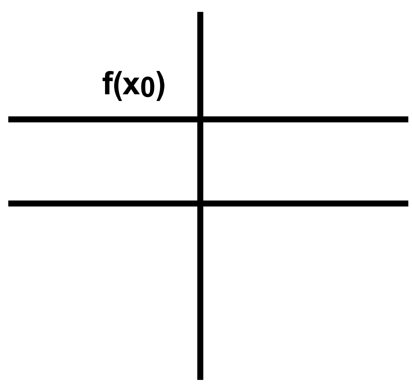


Fig. Nº 19

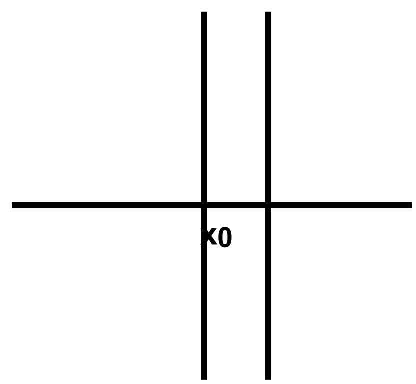


Fig. Nº 20

Ejemplo: Hallar la ecuación lineal si:

a. La pendiente es $\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $P_1(2, 9)$

b. Se pasa por los puntos $P_1(-2, 3)$ y $P_2(2, 9)$

c. Corta a los ejes en: $x_0=-2$ y $f(x_0)=3$

<u>Solución:</u> a. Sustituyendo el valor de la pendiente en la ecuación $f(x)=mx + k$, tenemos: $f(x)=\frac{3}{2}x + k$, como la ecuación pasa por el punto $P_1(2, 9)$, al sustituirlo en la ecuación $f(x)=\frac{3}{2}x + k$, hallamos el valor de k, es decir, $9=\frac{3}{2} + K \Rightarrow K=6$, luego la ecuación de la recta es: $f(x)=\frac{3}{2}x + 6$ y su representación gráfica es:

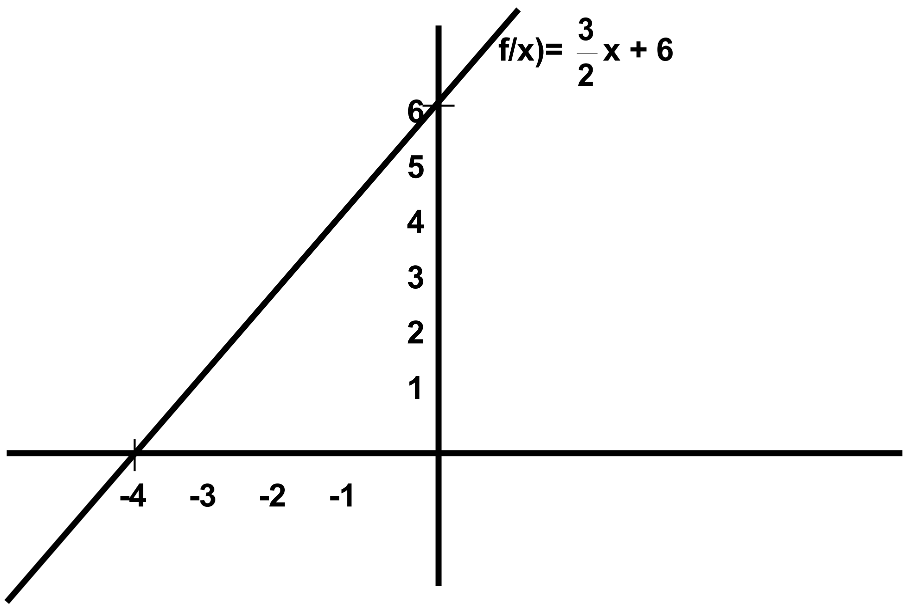


Fig. Nº 21

La solución de la parte b. y c. queda como ejercicio para el lector.

<u>Ejemplo:</u> Los estudiantes de la UNELLEZ pueden registrarse para sus clases de verano previamente por correo durante el mes de julio. Los que no se registren previamente deben hacerlo personalmente en agosto. El registrador puede procesar los datos de 40 estudiantes por hora durante este periodo de registro en agosto. Una vez transcurrida 4 horas en agosto, se han registrado 360 estudiantes.

a. **Exprese el número de estudiantes registrados como una función del tiempo.**

b. **¿Cuantos estudiantes fueron registrados después de transcurridas 3 horas?**

c. **¿Cuantos estudiantes se registraron en julio?**

<u>Solución:</u> a: Usando x para denotar el número de horas durante las cuales ha estado abierto el registro en agosto y f(x) para denotar el número total correspondiente de estudiantes registrados. El valor de f(x) aumenta en 40 cada vez que x aumente 1, así f(x) es una función lineal de x con pendiente m=40, que pasa por el punto (4,360), luego $f(x)=40x + K \Rightarrow f(4)=360 \Rightarrow 40(4) + k=360 \Rightarrow k=200$, y por lo tanto, la ecuación buscada es: $f(x)= 40x + 200$.

<u>Solución:</u> b. El número de estudiante registrado transcurridos 3 horas es cuando x=3, lo sustituimos en la ecuación encontrada en la parte a) $f(3)=40(3) + 200 \Rightarrow f(3)=320$, esto quiere decir, que transcurridos 3 horas se habían inscrito 320 estudiantes.

<u>Solución:</u> Para saber el número de estudiante que se escribió en julio, simplemente sustituimos en la ecuación x=0, con lo cual nos da que f(0)=200, que es el número de estudiantes que se inscribieron por correo en julio.

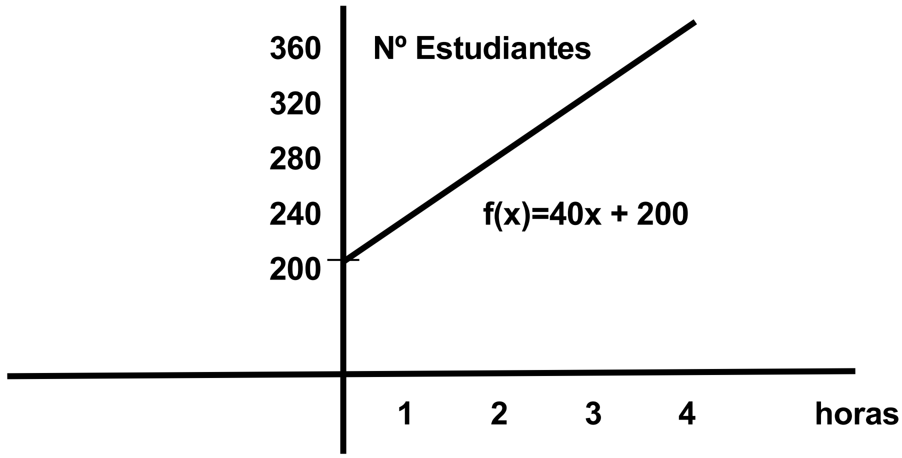


Fig. Nº 22

Ejemplo: La tarifa del Metro de Caracas por estación es de Bs. 200, Si el Metro tiene 7 estaciones. Exprese el pasaje como una función del transporte y realice su gráfica

Solución: Usaremos x para denotar cada estación y f(x) para el porte correspondiente.

$$f(X)=\begin{cases} 200 & \text{si } 0<X\leq 1 \\ 400 & \text{si } 1<X\leq 2 \\ 600 & \text{si } 2<X\leq 3 \\ \ldots & \\ \ldots & \\ \ldots & \\ 1.400 & \text{si } 6<X\leq 7 \end{cases}$$

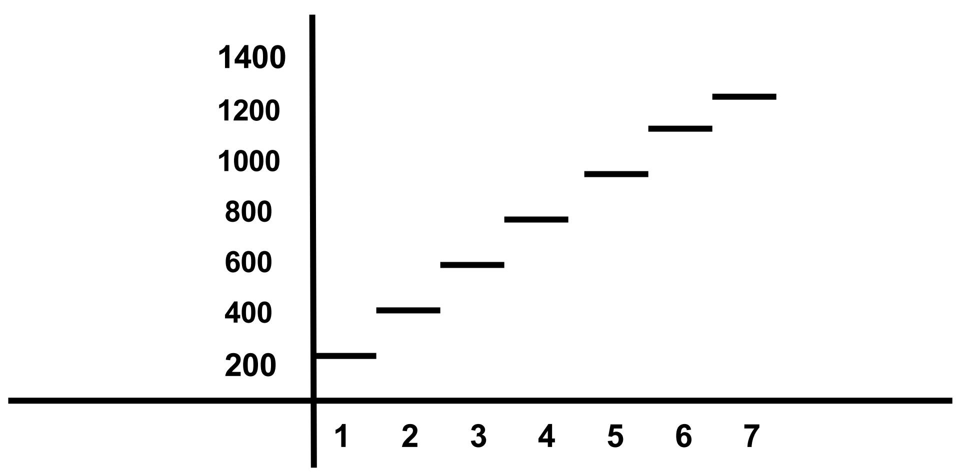


Fig. Nº 23

<u>Definición 26:</u> Un <u>polinomio</u> es una función:

a. $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_o$

b. $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$**, donde: n: grado del polinomio, si** $n \neq 0$ **y** $a_o, a_1, a_2, ... a_n$**: coeficientes del polinomio, x: variable o indeterminada del polinomio. Si el polinomio esta dado en la forma a. se dice que es *<u>decreciente</u>*, y en la forma de b. se dice que es *<u>creciente</u>*.**

<u>Ejemplo:</u> a. $f(x)=x^5 + 3x^2 - 2x + 5$**, es un polinomio decreciente de grado n=5**

$f(x)=-2 + 5x^2 + 3x^4 + 2x^6$**, se dice que es creciente de grado n=6.**

<u>Definición 27:</u> Para cualquier número $x_o \in \Re$**, para el cual** $f(x_o)=0$**, se dice que es una <u>raíz de f</u>. Si** x_o **es una raíz del polinomio f(x), entonces, el termino lineal** $x - x_o$ **es un <u>factor de f</u>, es decir, que podemos escribir:** $f(x)=(x - x_o)g(x)$**, donde g(x) es en sí mismo un polinomio, de un grado menor que f(x).**

<u>Ejemplo:</u> El polinomio $f(x)=x^3 - 3x^2 + 5x - 3$**, tiene como raíz a** $x_o=1$**, ya que** $f(1)=0$ **y** $f(x)=(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$**.**

<u>Observación:</u> En correspondencia entre las raíces y factores implica a lo más n raíces reales. Naturalmente un polinomio de grado n puede tener menos de n raíces. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$**, no tiene ninguna raíz real, ya que las raíces en este caso son raíces complejas.**

<u>Definición 28:</u> Si todos los coeficientes de los polinomios de la forma: $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_o=0$ ó

$f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots, + a_n x^n=0$ son ceros, decimos que f(x) es un ***polinomio nulo***.

<u>Definición 29:</u> Si en a) o b) $n=0$ y $a_o \neq 0$, entonces $f(x)=a_o$, se llaman <u>polinomios constantes.</u>

<u>Definición 30:</u> Si en el polinomio $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o$, con $a_n=1$, se dice que f(x) es un ***Polinomio Mónico***, es decir, un polinomio es Mónico si el coeficiente de la variable de mayor grado es igual a 1.

<u>Definición 31:</u> Sean $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_o$ y $g(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + b_o$ se define la ***suma (resta)*** como:

$(f \pm g)x= (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \ldots\ldots + (a_o \pm b_o)$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=x^3 – 3x^2 + 5x - 3$ y $g(X)=3x^3 – 5x^2 – 7x + 7$, entonces:

a. $(f + g)x=4x^3 – 8x^2 – 2x + 4$

$(f - g)x=-2x^3 + 2x^2 + 5x - 10$

<u>Definición 32</u> Sean $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_o$ y $g(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + b_o$ se define la ***multiplicación*** como:

$(f.g)x=a_o b_o + (a_o b_1 + a_1 b_o)x + (a_o b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_o)x^2 + \ldots + a_n b_n x^{m+n}$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ y $g(x)=3x + 3$, entonces:

$(f.g)x=(3x + 3)(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 15x - 9x^2 + 3x^3 - 9x + 15x^2 - 6x^3 + 3x^4 \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 6x + 6x^2 - 6x^3 + 3x^4$

Resolviendo por la fórmula tenemos:

1º. Hallamos el grado x del polinomio producto, grado $(f.g)x$=grado $f(x)$ + grado $g(x)=3 + 1=4$

2º. Ubicamos los coeficientes de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$: Coeficientes de $f(x)$: $a_o=-3$, $a_1=5$, $a_2=-3$, $a_3=1$, coeficientes de $g(x)$: $b_o=3$, $b_1=3$

3º. Hallamos los productos de los coeficientes distintos de cero: $a_ob_o=-9$, $a_ob_1=-9$, $a_1b_o=15$, $a_1b_1=15$, $a_2b_o=-9$, $a_2b_1=9$, $a_3b_o=3$, $a_3b_1=9$

4º. Sustituimos estos productos en la fórmula:

$(f.g)x=-9 + (-9 + 15)x + (-9 + 15)x^2 + (-9 + 3)x^3 + 3x^4 \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 6x + 6x^2 - 6x^3 + 3x^4$.

<u>Definición 33:</u> Dados dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$, llamamos <u>***Cociente***</u> de ambos a un polinomio $h(x)$, tal que, $f(x)=g(x)h(x)$, nada se puede afirmar sobre la existencia de este polinomio, pero si existe, decimos que $f(x)$ es <u>***Divisible***</u> por $g(x)$, o que $g(x)$ es <u>***Divisor***</u> de $f(x)$ y escribimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ que se lee "$g(x)$ <u>***Divide***</u> a $f(x)$.

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} \Rightarrow f(x)=x^2+x+1$, pues $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Definición 34: La división de polinomios con coeficientes ***Enteros*** solamente es posible en ciertos casos especiales. Dados dos polinomios f y g, la división entera de f por g consiste en determinar dos polinomios h y r con las condiciones siguientes: $f=g.h+r$, con el grado r< grado de g.

La determinación de los coeficientes del cociente h y el resto r se hace de la siguiente manera: particularizando el caso: el dividendo sea de tercer grado y el divisor sea de primer grado, lo que no quita generalidad a la demostración, ejecutamos el siguiente desarrollo:

$$
\begin{array}{l|l}
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o & b_1x + b_o = b_1\left(x+\dfrac{b_0}{b_1}\right) = b_1(x-c_o) \\ \hline
\underline{-a_3x^3 + c_1x^2} & a_3x^2 + c_2x + c_4 \\
\quad c_2x^2 & \\
\quad \underline{-c_2x^2 + c_3x} & c_1 = a_3c_o \\
\qquad c_4x & c_2 = a_2 + c_1 \\
\qquad \underline{-c_4x + c_5} & c_3 = c_oc_2 \\
\qquad\quad r & c_4 = a_1 + c_3 \\
 & c_5 = c_o + c_4 \\
 & r = a_o + c_5
\end{array}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{2} & 2x-1 \\ \hline
\underline{-6x^3 + 3x^2} & 3x^2 + 2x + \dfrac{1}{2} \\
4x^2 & \\
\underline{-4x^2 + 2x} & \\
x & h(x)=3x^2+2x+\dfrac{1}{2} \\
\underline{-x+\dfrac{1}{2}} & r=2 \\
2 &
\end{array}
$$

Definición 35: Regla de Ruffini: Sea $a \in Q$. Vamos a estudiar la división de un polinomio de Q(x) por el binomio x - a. Particularizando para el caso en que el dividendo sea de tercer grado, lo que no quita generalidad a la demostración, ejecutamos el siguiente desarrollo:

$\frac{Q(x)}{x-a} = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x-a}$, por la regla de Ruffini tenemos:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_o \\
a & & aa_3 & ac_1 & ac_2 \\
\hline
 & a_3 & c_1 & c_2 & \boxed{r}
\end{array}
$$

Donde, $c_1=a_2 + aa_3$, $c_2=a_1 + ac_1$ y $r=a_0 + ac_2$

Para aplicar el método de Ruffini se seguirán los pasos siguientes:

1º. Se colocan los coeficientes de las variables del polinomio en forma decrecientes

2º. Se baja el primer cociente del dividendo que lo es también del cociente

3º. Se multiplica por a y se suma con a_2. Se obtiene así c_1. Se multiplica c_1 por a y se suma con a_1 se obtiene c_2 que se multiplica por a y se suma con a_o, resultando r.

Observaciones:

1. El cociente es un polinomio en x cuyo grado es inferior en una cantidad al del dividendo.

2. El primer coeficiente del cociente es igual al primero del

dividendo.

3. Cada coeficiente, excepto el primero, es igual al correspondiente del dividendo más el anterior del cociente multiplicado por a.

Estas tres observaciones constituyen La Regla de Ruffini y los coeficientes del cociente y el resto se obtienen por medio del esquema anterior.

Ejemplo: Dividir: $x^3 - 2x + 1$ por $x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{5} \end{array}$$

Como la división se define como:

$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{N(x)}$ o $N(x)=C(x)D(x) + r(x)$, donde $N(x)$ recibe el nombre de dividendo o numerador, $C(x)$ cociente, $D(x)$ divisor o denominador y $r(x)$ resto o residuo, se tiene que:

$x^3 - 2x + 1 = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 + 2x + 2 + \frac{5}{x^3 - 2x + 1}$, e,i, el cociente es $x^2 + 2x + 2$, el resto es 5

Para factorizar o hallar las raíces de un polinomio por el método de Ruffini, se procede como en el caso anterior, pero las posibles raíces enteras las encontramos descomponiendo en factores primos a a_o, es decir, todos los divisores de a_o.

Ejemplo: Factorizar: $f(x)=x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

Solución: Primero colocamos los coeficientes de las variables y el término independiente, tomando en cuenta que si no aparece una potencia de la variable el coeficiente es cero. Las posibles raíces enteras de f son: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±36.

	1	0	-14	0	49	0	-36
1		1	1	-13	-13	36	36
	1	1	-13	-13	36	36	0
-1		-1	0	13	0	-36	
	1	0	-13	0	36	0	
2		2	4	-18	-36		
	1	2	-9	-18	0		
-2		-2	0	18			
	1	0	-9	0			
3		3	9				
	1	3	0				

Luego las raíces del polinomio son: ±1, ±2, ±3 y $\therefore$,

$x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3).$

Definición 36: Coeficientes *indeterminados o Fracciones Parciales*

Por definición, una función algebraica racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Teóricamente, toda función racional puede expresarse en términos de funciones elementales. Con frecuencia el método de fracciones parciales es útil para transformar la fracción racional en una suma de funciones más sencillas. El método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, esto es, aquellas en la que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador. Cualquier fracción impropia, e.i. aquella en la cual el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador, puede transformarse, por división, en la suma de un polinomio más una función propia. En este curso estudiaremos un sólo caso de las fracciones parciales ya que los otros son para niveles más avanzados.

La función H(x) puede ser expresada como la razón de dos polinomios f(x) y g(x). Considere que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendente de la potencia de x, e.i.

$$H(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x - a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

En donde a_0, a_1, ..., $a_m \in \Re$ y b_0, b_1, ..., $b_n \in \Re$, el denominador g(x) puede factorizarse en factores de primer orden y con coeficientes reales de la manera:

$$H(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (x - x_n)}$$

En donde x_1, x_2, ... x_n son las n raíces de la ecuación g(x)=0 y son llamadas ceros del polinomio g(x). H(x) puede ser entonces expresado como una serie de fracciones, e,i, $H(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$, el caso que vamos a estudiar aquí es que las raíces x_1, x_2, ..., x_n son distintas y el grado de g(x) es menor que el grado de f(x), Las A'es de la ecuación anterior son constantes y llamadas los residuos de H(x). Para determinar el valor de estos residuos, se aplica la siguiente fórmula:

$A_1=(x - x_1)H(x_1)$; $A_2=(x - x_2)H(x_2)$; ...... $A_n=(x - x_n)H(x_n)$

<u>Ejemplo:</u> Descomponer en fracciones parciales:

a. $H(X)=\dfrac{3x+5}{x^2+4x+3}$ Aplicando Ruffini para factorizar $H(x)=x^2 + 5x + 3$

las posibles raíces son: ±1, ±3

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 4 & 3 \\
-1 & & -1 & -3 \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$H(x)=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ $\Rightarrow$ $H(x)=\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{x+3}$, donde:

$A_1=(x+1)H(-1)=\dfrac{3(-1)+5}{(-1)+3}=1$; $A_2=(x+3)H(-3)\dfrac{3(-3)+5}{(-3)+1}=2$ $\Rightarrow$

$H(x)=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}= \Rightarrow H(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}$

b. $H(x)=\dfrac{3x^3+5x-7}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$, Aplicando Ruffini para factorizar a $H(x)=x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$, las posibles raíces son: ±1, ±2, ±3, ±6

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\
1 & & 1 & 6 & 11 & 6 \\
\hline
 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -5 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Luego H(x)=(x -1)(x + 1)(x + 2)(x + 3) y $H(x)=\dfrac{3x^3+5x-7}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow$ $H(x)=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{x+1}+\dfrac{A_3}{x+2}+\dfrac{A_4}{x+3}$, donde:

$A_1=(x-1)H(1)=\dfrac{3(1)^3+5(1)-7}{(1+1)(1+2)(1+3)}=\dfrac{1}{24}$;

$A_2=(x+1)H(-1)\dfrac{3(-1)^3+5(-1)-7}{(-1-1)(-1+2)(-1+3)}=-\dfrac{15}{4}$;

$A_3=(x+2)H(-2)\dfrac{3(-2)^3+5(-2)-7}{(-2-1)(-2+1)(-2+3)}=\dfrac{41}{3}$;

$A_4=(x+3)H(-3)=\dfrac{3(-3)^3+5(-3)-7}{(-3-1)(-3+1)(-3+2)}=\dfrac{103}{8}$, $\therefore$, tenemos que:

$H(x)=\dfrac{1}{24(x-1)}-\dfrac{15}{4(x+1)}+\dfrac{41}{3(x+2)}+\dfrac{103}{8(x+3)}$.

<u>Definición 37:</u> Factorización de la forma: $(x \pm y)^n$

$(x \pm y)^2=x^2 \pm 2xy + y^2$

$(x \pm y)^3=x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

$(x \pm y)^4=x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$

:

$$(x \pm y)^n = \binom{n}{0}x^n \pm \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{1}x^{n-2}y^2 \pm \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots \pm \binom{n}{n}y^n,$$

donde $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n(m-n)!}$, número combinatorio, los cuales se pueden calcular con la ayuda del triángulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{n}{0} & & & & \\
 & & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{0} & & & \\
 & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{0} & & \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{0} & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{6} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{0}
\end{array}$$

Este triángulo también toma la forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

<u>Ejemplo:</u> Factorizar:

a. $f(x)=(x + 2)^7$

<u>Solución:</u> Desarrollamos el triángulo de pascal hasta llegar al séptimo término, por lo tanto: las potencia del primer miembro, es decir, de las x, decrecen desde n=7, hasta n=0 y las potencia del segundo término es decir, el 2, va creciendo desde n=0, hasta n=7 y los coeficientes se obtienen por medio del triángulo de Pascal.

$f(x)=x^7 + 14x^6y + 84x^5y^2 + 280x^4y^3 + 560x^3y^4 + 672x^2y^5 + 448x^2y^6 + 128y^7$

b. Factorizar: $f(x)=(x - 1)^8$

<u>Solución:</u> Se aplicaran los mismos paso que se aplicó en el ejemplo anterior, desarrollamos el triángulo de pascal hasta llegar al octavo término, y colocando las potencias al primer miembro en forma descendente y al segundo miembro del binomio en forma ascendente, $\therefore$,

$f(x)=x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 – 8xy^7 + y^7$

<u>Definición 38:</u> Factorización de la forma: $x^n - y^n$:

$x^2 - y^2=(x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3=(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^4 - y^4=(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

$\vdots \qquad \vdots$

$x^n - y^n=(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$

<u>Ejemplo:</u> Factorizar: $f(x)=x^4 – 16 \Rightarrow f(x)=x^4 - 2^4$, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: $f(x)=x^4 - 2^4=(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$.

<u>Definición 39:</u> Factorización de la forma: $x^n + y^n$:

$x^2 + y^2=x^2 + 2xy + y^2 – 2xy \Rightarrow x^2 + y^2=(x + y)^2 – 2xy \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x + y)^2 - (\sqrt{2xy})^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x + y - \sqrt{2xy})(x + y + \sqrt{2xy}) \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x - \sqrt{2xy} + y)(x + \sqrt{2xy} + y)$

$x^3 + y^3=(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + y^4=(x^2)^2 + \sqrt{2}\ (y^2)^2 - 2x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2})^2 x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)$

: :

$$x^n + y^n=\begin{cases}(x^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}})(x^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}}) \text{ si n es par}\\ \\ (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ..... + y^{n-1}) \text{ si n es impar}\end{cases}$$

Ejemplo: Factorizar: a) $f(x)=x^4 + 16 \Rightarrow f(x)=x^4 + 2^4$, aplicando la fórmula para $y=2$, tenemos: $x^4 + 2^4=(x^2 - 2\sqrt{x} + 4)(x^2 + 2\sqrt{x} + 4)$

a. $f(x)=x^5 + 32 \Rightarrow f(x)=x^5 + 2^5$, aplicando la fórmula para $y=2$, tenemos:

$x^5 + 2^5=(x - 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x +16)$

Definición 40: Factorización de la forma $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

$x - y= (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Ejemplo: **Factorizar: f(x)=** $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}$ **, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: f(x)=** $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2} = \dfrac{x-2}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{2x^2}+\sqrt[4]{4y^2}+\sqrt[4]{8}}$.

Definición 41: **Factorización de la forma** $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

$$x - y = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}-\sqrt[4]{y^3}}$$

:

$$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^{2}}-\ldots\ldots\ldots-\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Ejemplo: Factorizar: $f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}$, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: $f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}=\dfrac{x-2}{\sqrt[4]{x^{3}}-\sqrt[4]{2x^{2}}+\sqrt[4]{4y^{2}}-\sqrt[4]{8}}$.

Definición 42: Gráfica aproximada de las funciones polinómicas de la forma: $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_o$.

Para graficar una función polinómica seguiremos los siguientes pasos:

1. Se halla el corte con el eje Y, e.i. $x=0 \Rightarrow f(x)=a_0$
2. Buscamos el corte con el eje X, e.i. cuando $y=0 \Rightarrow f(x)=0$, factorizamos f(x) aplicando el método de Ruffini, e.i. $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_o=a_n(x - x_o)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$
3. Ubicamos en los ejes de coordenadas las raíces de f(x).
4. Estudiamos el comportamiento de la gráfica, entre cada par de puntos donde la función corta al eje X. Como la función f(x) es continua y su gráfica es una curva continua, no hay ninguna forma de que f(x) pueda cambiar de signo entre dos puntos de intersección con el eje X, si $\alpha\in(x_o, x_1)$, con x_o y x_1 raíces de f(x) y $f(\alpha)>0$, entonces, la función es ***creciente*** en ese intervalo y en consecuencia está por arriba, si $f(\alpha)<0$, entonces la función es ***decreciente*** y por lo tanto, está por debajo.
5. Estudiamos la función cuando crece o decrece

indefinidamente, es decir, $x \to \pm\infty$, la función puede crecer o decrecer indefinidamente, veamos esto geométricamente:

1º. Cuando la variable x decrece indefinidamente, la función también decrece indefinidamente, es decir, ($x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$), ilustremos esto geométricamente,

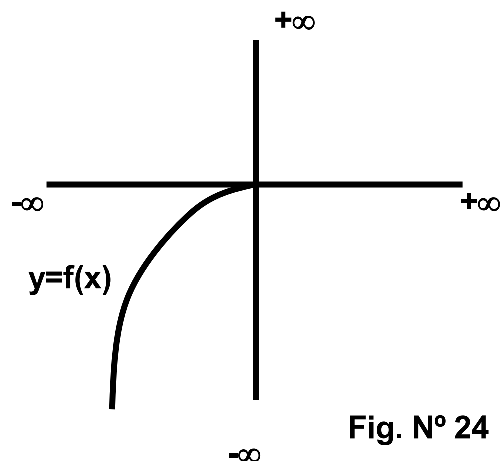


Fig. Nº 24

2º. Cuando la variable x decrece indefinidamente, la función y crece indefinidamente, es decir, ($x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$), ilustremos esto geométricamente,

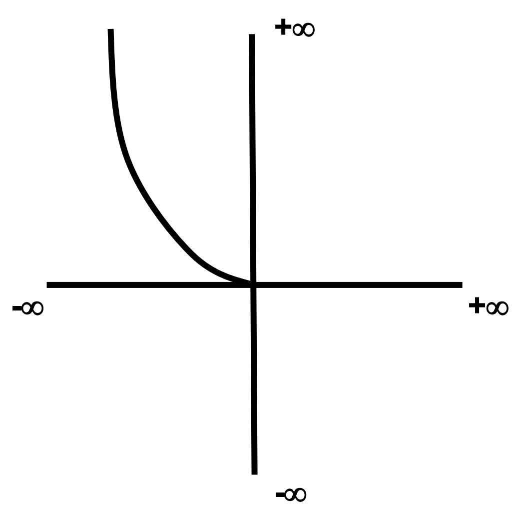


Fig. Nº 25

3º. Cuando la variable x crece indefinidamente, la función y decrece

indefinidamente, es decir, ($x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$), ilustremos esto geométricamente,

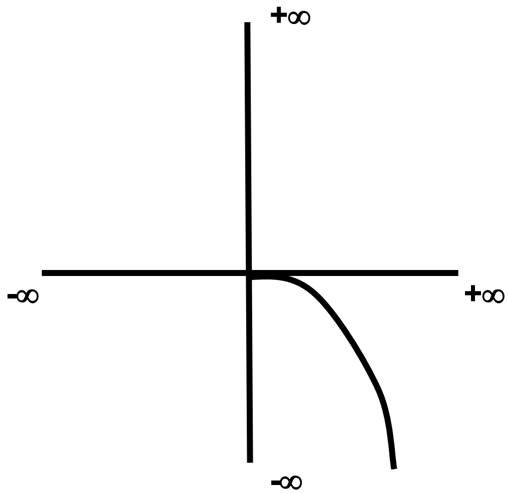


Fig. Nº 26

4º. Cuando la variable x crece indefinidamente, la función y también crece indefinidamente, es decir, ($x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$), ilustremos esto geométricamente,

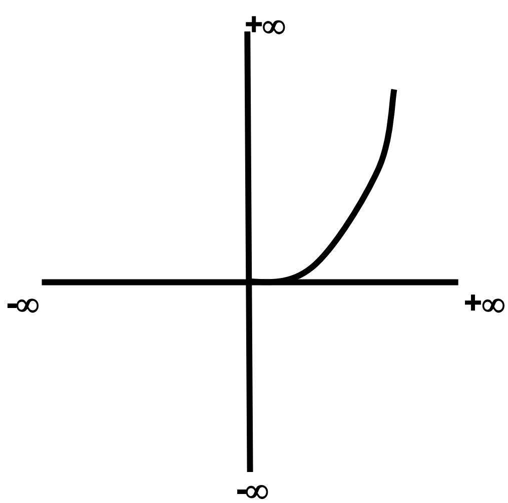


Fig. Nº 27

<u>Nota:</u> Para ver el comportamiento de la función cuando x crece o decrece indefinidamente, solamente sustituimos el valor de $\pm\infty$, en la

variable de mayor grado, ejemplo $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$, cuando $x \to +\infty$, entonces $f(+\infty)=a_n(+\infty)^n \Rightarrow f(x)=+\infty$, y $f(-\infty)=a_n(-\infty)^n$, será $f(x)=-\infty$ si n es impar y $f(x)=\infty$ si n es par.

6. Trazamos la gráfica.

<u>Ejemplo:</u> Graficar la función $f(x)=x^3 - 3x^2 - x + 3$

<u>Solución:</u> Aplicaremos los pasos descritos anteriormente:

1º. Hallamos el corte con el eje Y, es decir, $a_o=3$, luego corta al eje Y en el punto (0, 3)

2º. Hallamos los cortes con el eje X, aplicamos Ruffini para factorizar f(x)

3º.

	1	-3	-1	3
-1		-1	4	-3
	1	-4	3	0
1		1	-3	
	1	-3	0	

Luego $f(x)=x^3 - 3x^2 - x + 3=(x - 1)(x + 1)(x - 3)$, es decir, la función f corta al eje X en los puntos: (-1, 0), (1, 0) y (3, 0).

4º. Estudiamos la función entre cada par de puntos donde la función corta al eje X: entre los puntos (-1, 0) y (1, 0), escogemos $\alpha=0$, ya que $0\in(-1, 1)$, $f(0)=3$, $\therefore$, en este intervalo la función es creciente, e.i. está por arriba, entre los puntos (1, 0) y (3, 0), escogemos $\alpha=2$, ya que $2\in(1, 3)$, $f(2)=(2)^3 - 3(2)^2 - 2 + 3=-3$, $\therefore$, en este intervalo la función es decreciente, e.i. esta por abajo.

5º. Vemos que pasa cuando x crece o decrece indefinidamente, $x \to -\infty$, implica que $f(-\infty)=(-\infty)^3 \Rightarrow f(-\infty)=-\infty$, es decir la función decrece indefinidamente, $x \to +\infty$, implica que $f(+\infty)=(+\infty)^3 \Rightarrow f(+\infty)=+\infty$, e.i. la función crece indefinidamente.

6º. Realizamos la gráfica con los datos obtenidos.

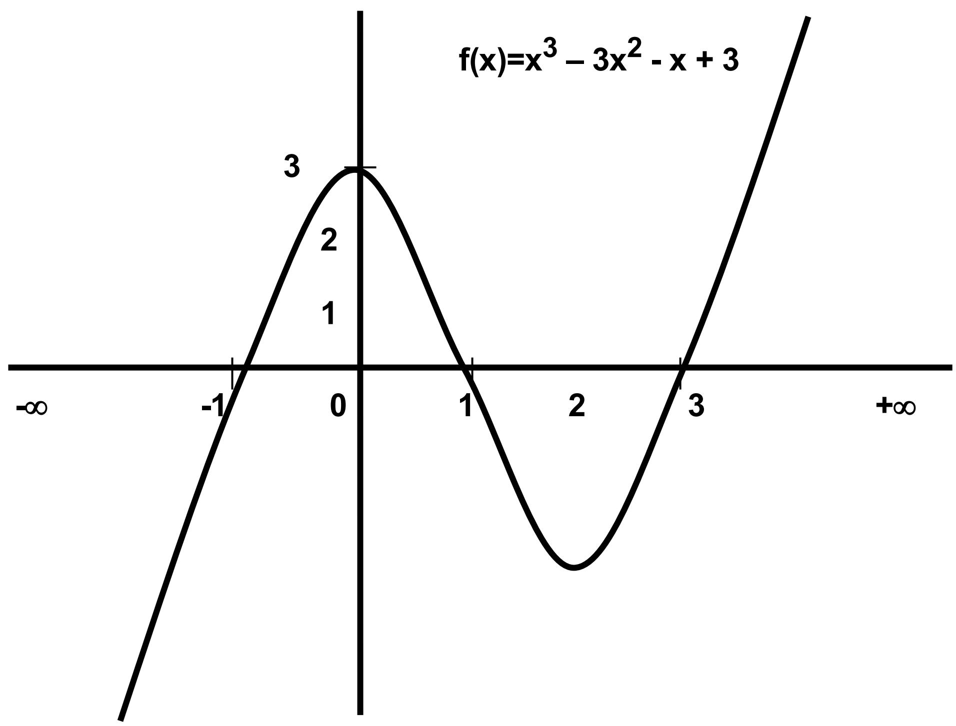


Fig. N° 28

Ejemplo: Graficar la función $f(x)=x^3 - 9x + 1$

Solución: Aplicaremos los pasos descritos para realizar la gráfica de una función:

1º. Hallamos el corte con el eje Y, e.i. a_o= 1, luego corta al eje Y en el punto (0, 1)

2º. Hallamos los cortes con el eje X, como la función f(x), no tiene raíces enteras, trasladamos la función, e.i. $f(x)=g(x) + 1$, donde $g(x)=x^3 – 9x$, factorizando $g(x)=x(x - 3)(x + 3)$, la función g(x) corta al eje X en los puntos: (-3, 0), (0, 0) y (3, 0)

3º. Estudiamos la función entre cada par de puntos donde la función corta al eje X: entre los puntos (-3, 0) y (0, 0), escogemos $\alpha=-1$, ya que $-1\in(-3, 0)$, $f(-1)=(-1)^3 - 9(-1)=10$, $\therefore$, en este intervalo la función es creciente, es decir, está por arriba, entre los puntos (0, 0) y (3, 0), escogemos $\alpha=2$, ya que $2\in(1, 3)$, $f(2)=(2)^3 - 9(2)^2=-10$, $\therefore$, en este intervalo la función es decreciente, e.i. esta por abajo.

4º. Vemos que pasa cuando x crece o decrece indefinidamente, $x \to -\infty$, implica que $f(-\infty)=(-\infty)^3 \Rightarrow f(-\infty)=-\infty$, e.i. la función decrece indefinidamente, $x \to +\infty$, implica que $f(+\infty)=(+\infty)^3 \Rightarrow f(+\infty)=+\infty$, e.i. la función crece indefinidamente.

5º. Realizamos la gráfica de g(x) con los datos obtenidos

6º. Gráfica

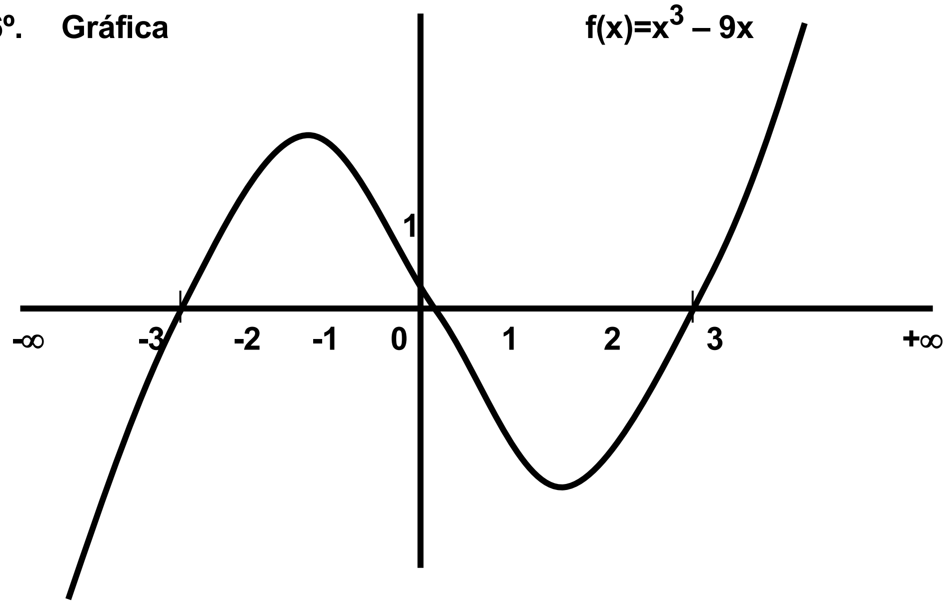


Fig. Nº 29

Trasladando verticalmente g(x) una cantidad hacia arriba obtenemos f(x)

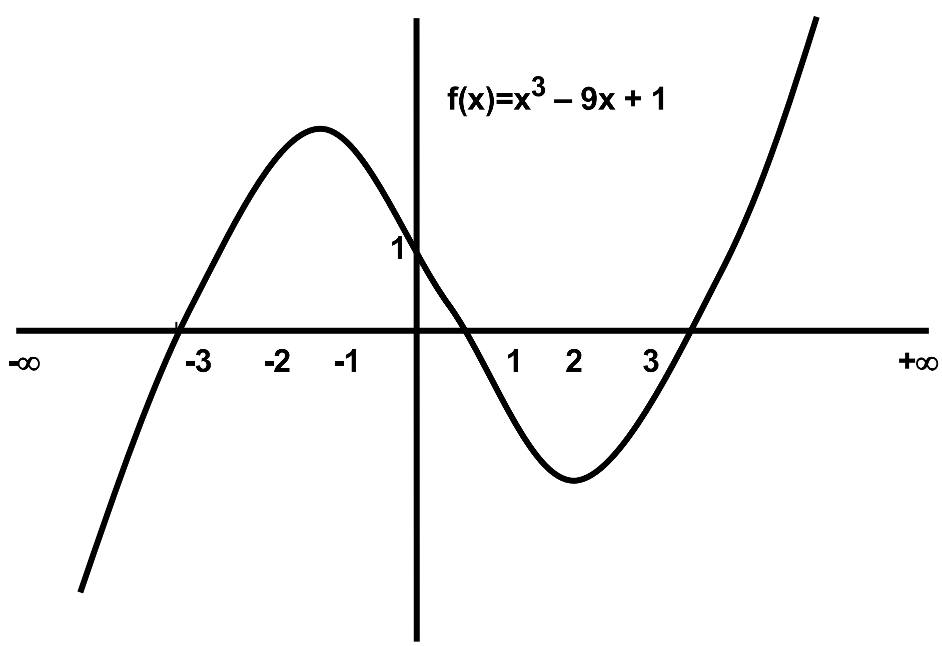


Fig. Nº 30

Definición 43: **Sea $f:\Re \rightarrow \Re^+ / f(x)=a^x$, $\forall x \in \Re$ y $\forall a \in \Re^+$, $a \neq 1$, f(x) recibe el nombre de *Función Exponencial*, donde *a* recibe el nombre de base y x de exponente, y f(x) posee las siguientes características:**

1. La función está definida en todo el conjunto de los números reales es decir, $Domf=\Re$

2. El recorrido de la función son los reales positivos $Recf=\Re^+$

3. Si $a \in (1,+\infty)$, la función es estrictamente creciente "una función f es *creciente* si $\forall x_i \in Domf$ y $\forall i \in Z^+$ se tiene que $x_i < x_{i+1} \Rightarrow f(x_i) < f(x_{i+1})$"

4. Si $a \in (0,1)$, la función es estrictamente decreciente "una función f es *decreciente* si $\forall x_i \in Domf$ y $\forall i \in Z^+$ se tiene que $x_i > x_{i+1} \Rightarrow f(x_i) > f(x_{i+1})$"

5. La función exponencial es inyectiva, ya que $f(x')=a^{x'}=a^x \Rightarrow x'=x$

6. La función exponencial no es sobreyectiva, ya que $Recf=\Re^+$, no contiene al conjunto de los números reales.

Propiedades de la función exponencial: **ver propiedades de los números reales.**

Gráfica de la función exponencial. **$f:\Re \rightarrow \Re^+ / f(x)=a^x$, con $a \in (1, 0)$, hallamos el grafo de f(x)**

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

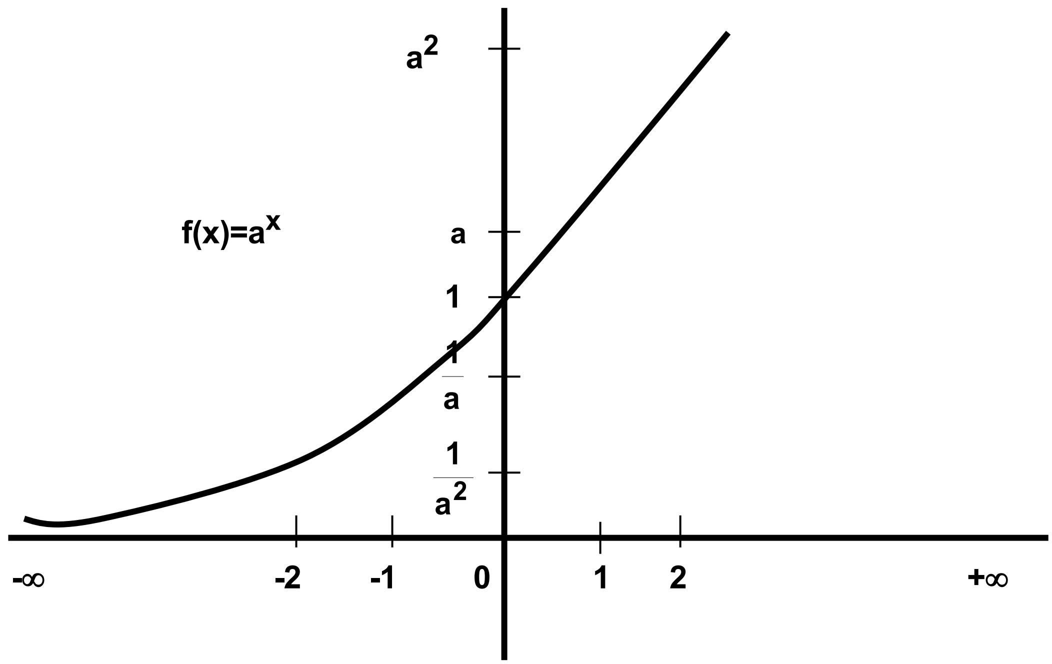


Fig. Nº 31

<u>Ejemplo:</u> **Graficar $f(x)=3^x$**

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

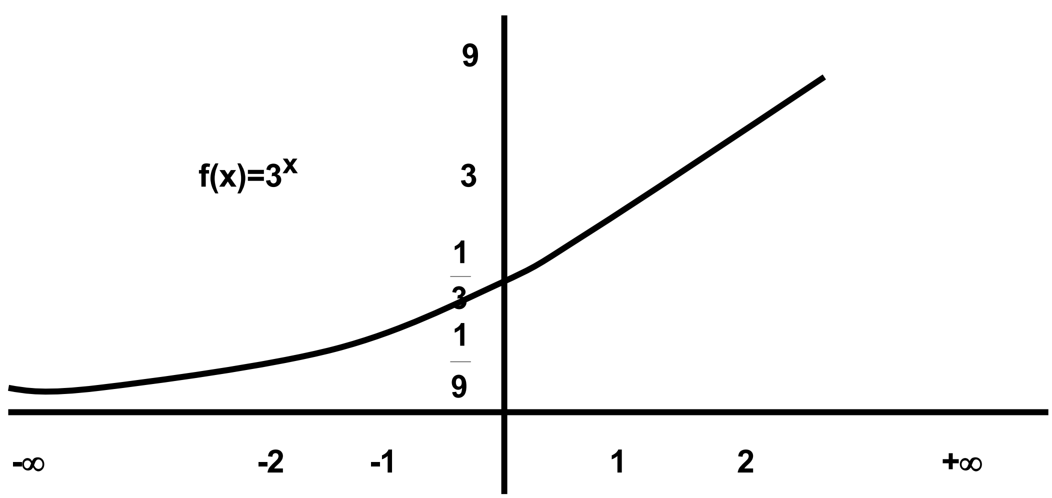


Fig. Nº 32

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> $f:\Re \to \Re^{+}/f(x)=a^{x}$, con $a\in(0,1)$, hallamos el grafo de f(x)

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	a^2	a	1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$

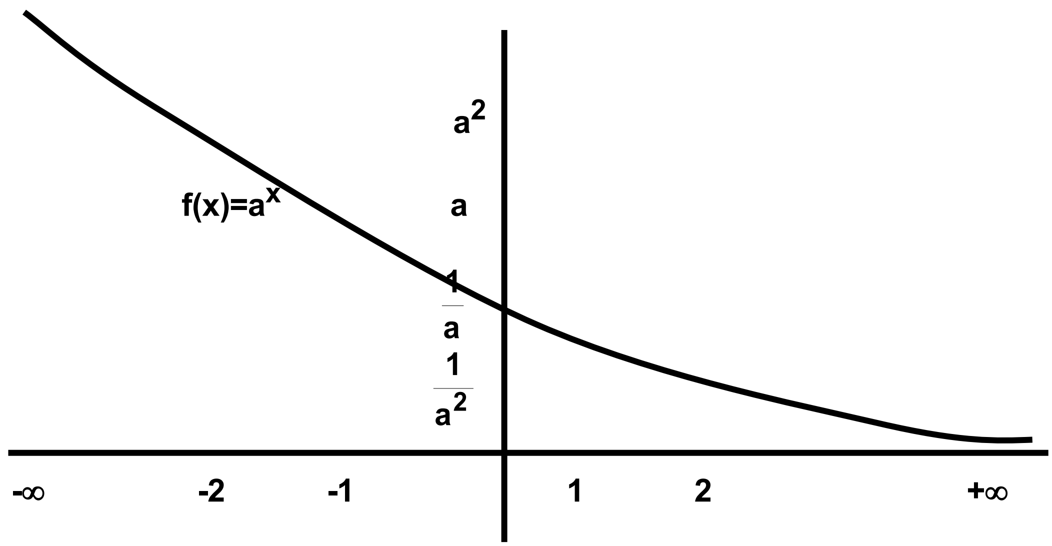


Fig. Nº 33

<u>Ejemplo:</u> Graficar $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

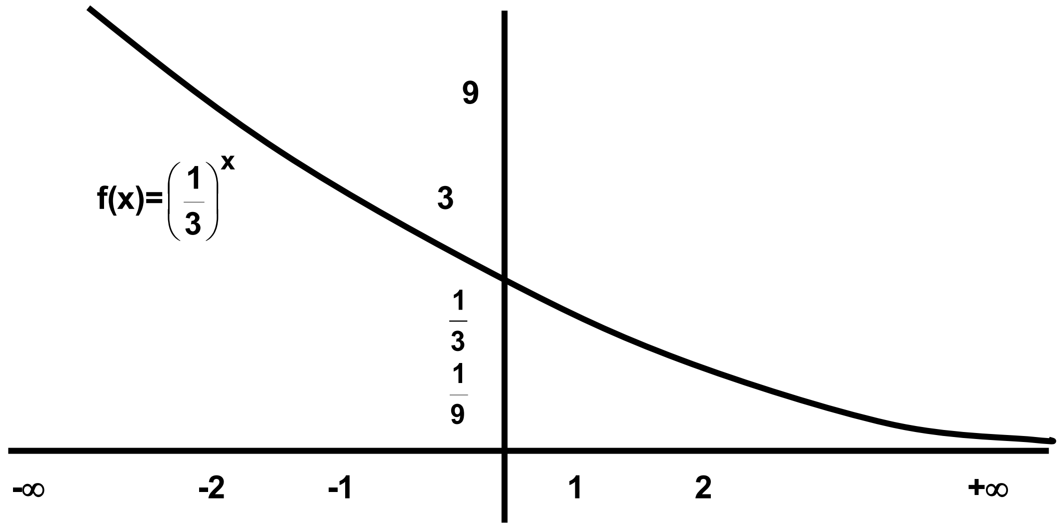


Fig. Nº 34

Si la base es el número e=$(1 + \frac{1}{n})^n$ cuando n → +∞, e.i. cuando n crece indefinidamente, e=2,71828..., llamado el número neperiano en honor a Nepper su descubridor. La función $f(x)=e^{kx}$, es un caso particular de la función exponencial de base e.

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> $f:\Re \rightarrow \Re^+/f(x)=e^{kx}$, $\forall k \in Z^+$ hallamos el grafo de f(x)

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	e^{-2k}	e^{-k}	1	e^{k}	e^{2k}

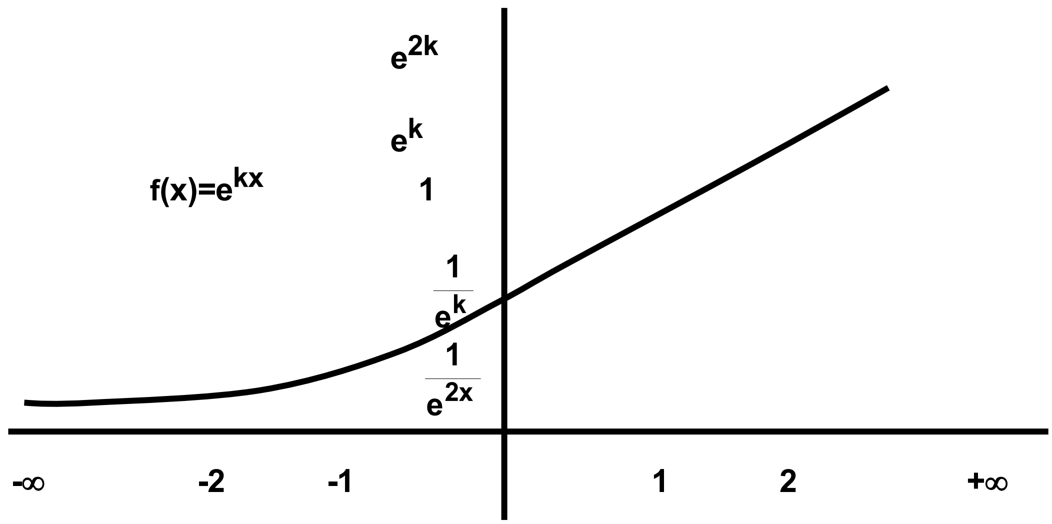


Fig. Nº 35

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> $f:\Re \rightarrow \Re^{+}/f(x)=e^{kx}$, $\forall k \in Z^{-}$ hallamos el grafo de f(x)

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	e^{-2k}	e^{-k}	1	e^{k}	e^{2k}

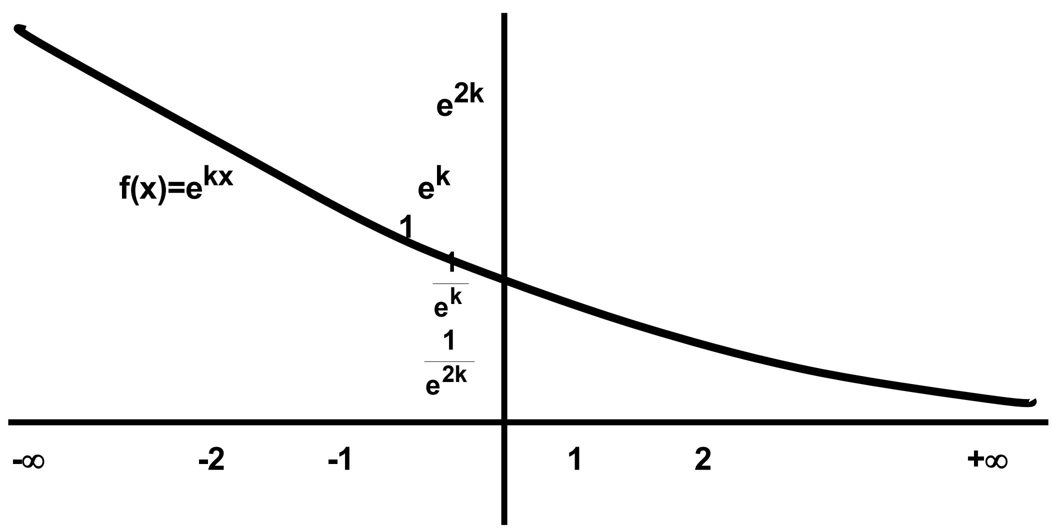


Fig. Nº 36

<u>Definición 44:</u> Se resuelve una ecuación exponencial, hallando el valor de la variable independiente x, que satisface a la variable dependiente f(x).

<u>Ejemplo</u> Hallar el valor de x, que satisface la ecuación:

a. $3^x=81$, en este caso la variable dependiente f(x)=81, como $81=3^4$, la ecuación nos queda $3^x=3^4$, lo que implica que x=4.

b) $5^{x^2-9x+12}=\frac{1}{25}$, en este caso la variable dependiente f(x)=$\frac{1}{25}$ $\Rightarrow$

$5^{x^2-9x+12}=5^{-2} \Rightarrow x^2 - 9x + 12=-2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0$ $\Rightarrow$ x=2 o x=7

<u>Definición 45:</u> Se llama <u>*Función Logarítmica*</u> a la inversa de la función exponencial, definida por la expresión $y=\lg_a x$ o $f(x)=\{(x,y)/y=\lg_a x \text{ y } 0<x<\infty,\}$ y f(x) posee las siguientes características:

1. La función está definida el conjunto de los números reales positivos e.i. Domf=$\Re^+$

2. El recorrido de la función son los reales Recf=$\Re$

3. Si $a\in(1,+\infty)$, la función es estrictamente decreciente

4. Si $a\in(0,1)$, la función es estrictamente creciente

5. La función logarítmica no es inyectiva, ya que $f(x')=a^{x'}=a^x \Rightarrow x'\neq x$

6. La función logarítmica es sobreyectiva, ya que Recf=$\Re$, contiene al conjunto de los números reales.

<u>Propiedades de la función logarítmica:</u> **ver propiedades de los números reales.**

<u>Gráfica de la función logarítmica.</u> **$f:\Re^+ \rightarrow \Re / f(x)=lg_a x$, con $|a|<1$, hallamos el grafo de f(x)**

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2
f(x)	-2	-1	0	1	2

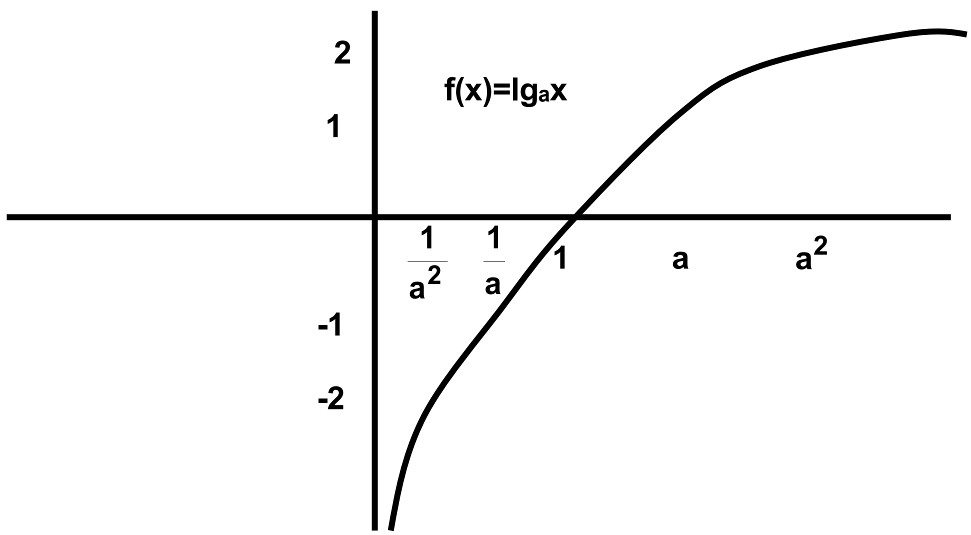


Fig. Nº 37

<u>Gráfica de la función logarítmica.</u> **$f:\Re^+ \rightarrow \Re / f(x)=lg_a x$, con $|a|>1$, hallamos el grafo de f(x)**

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2
f(x)	-2	-1	0	1	2

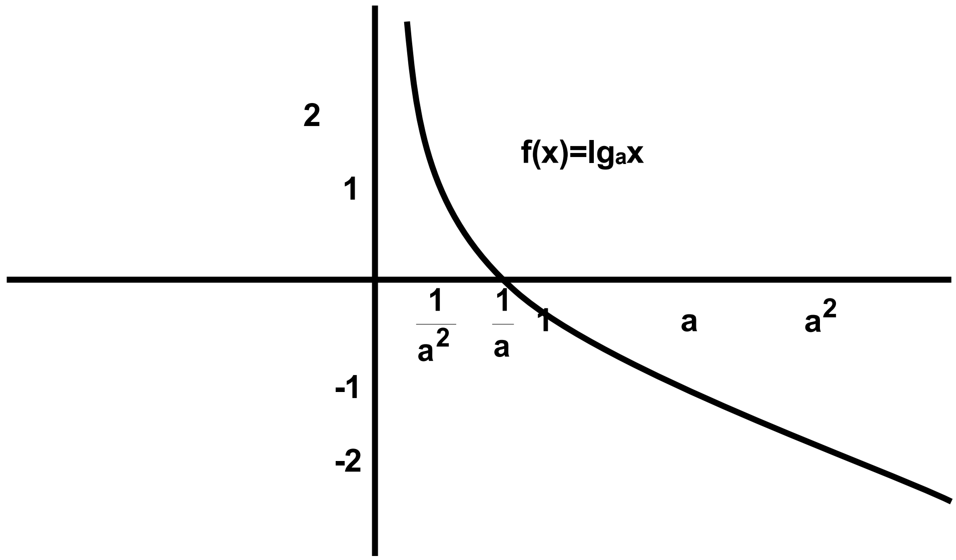


Fig. Nº 38

<u>Gráfica de la función logaritmo natural</u> **f:$\Re \rightarrow \Re^+$/f(x)=lnx, $\forall$k$\in$Z$^+$ hallamos el grafo de f(x)**

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	a	e^2
f(x)	-2	-1	0	1	2

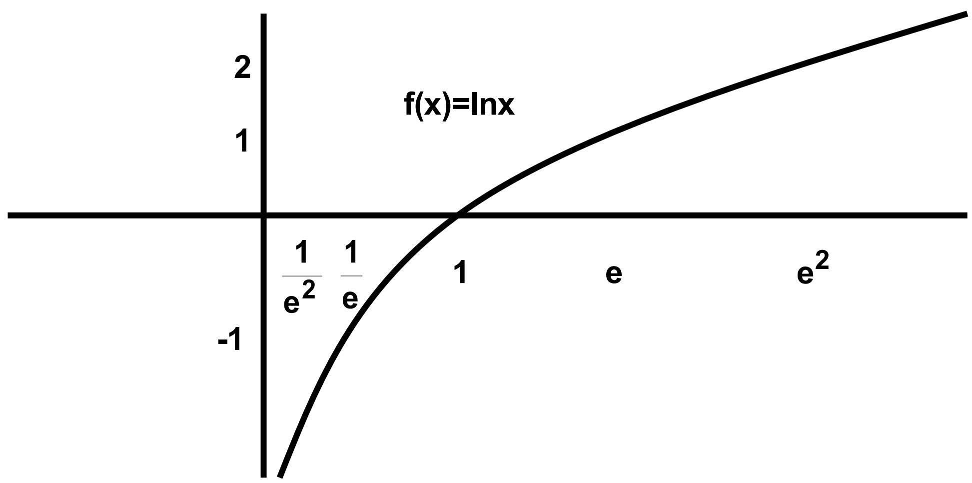


Fig. Nº 39

<u>Ejemplo:</u> Graficar f(x)=lg$_3$x

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
f(x)	-2	-1	0	1	2

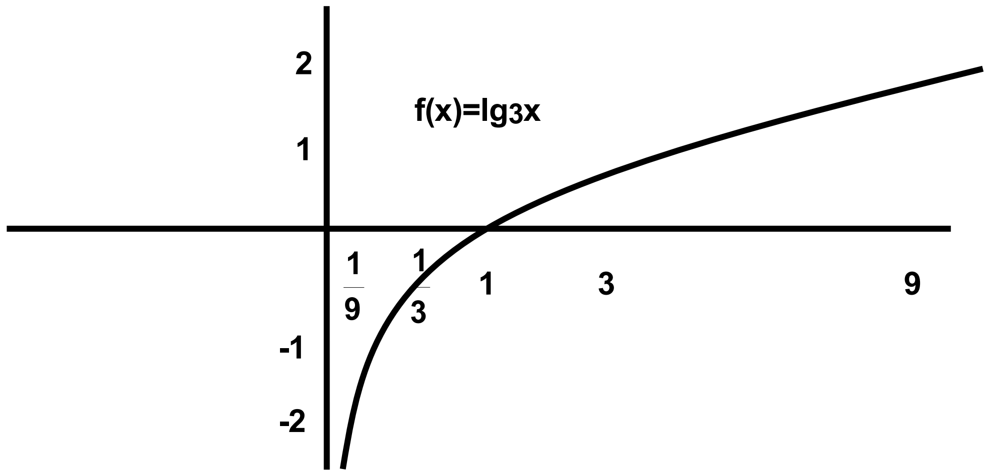


Fig. Nº 40

Ejemplo: Graficar $f(x)=\lg_{\frac{1}{3}}x$

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
f(x)	-2	-1	0	1	2

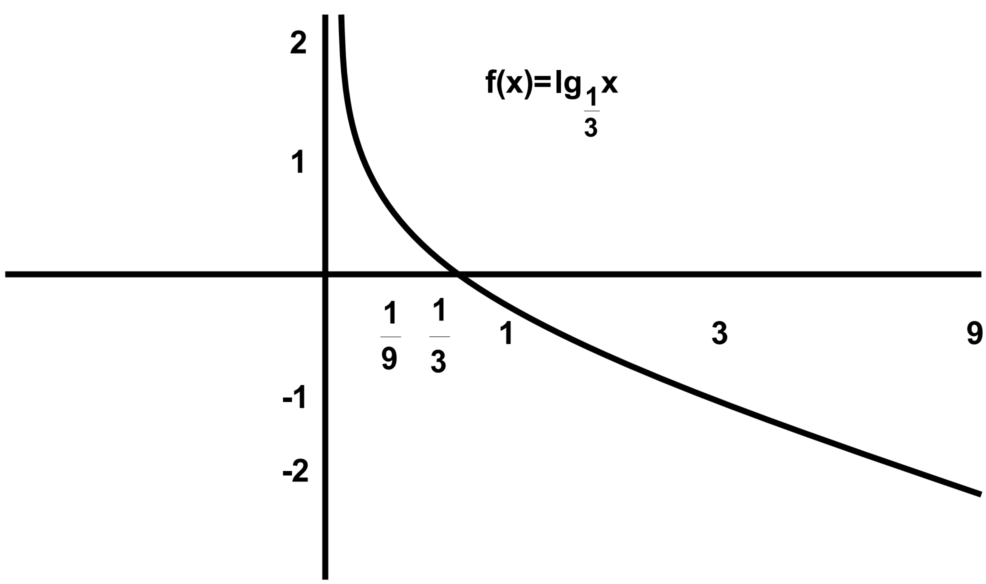


Fig. Nº 41

<u>Definición 46:</u> Se define una <u>*Ecuación Logarítmica*</u> como aquella que implica el logaritmo de una expresión que contiene una incógnita.

<u>Ejemplo 54:</u> Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\lg(2x+1)=\lg(x+6)$

<u>Solución:</u> aplicando a ambos miembros la exponencial de base 10 se tiene: $10^{\lg(2x+1)}=10^{\lg(x+6)} \Rightarrow 2x+1=x+6 \Rightarrow x=5$

b) $\lg x+\lg 3=\lg 5$

<u>Solución:</u> Pasando al miembro de la derecha el logaritmo en base 3 y luego aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos: $\lg x=\lg 5-\lg 3$ $\Rightarrow \lg x=\lg\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

c) $\ln x-\ln(x+1)=\ln 4$

<u>Solución:</u> Aplicando las propiedades de los logaritmos y aplicando a ambos miembro la exponencial de base e se tiene: $\ln\frac{x}{x+1}=\ln 4 \Rightarrow$ $\frac{x}{x+1}=4 \Rightarrow x=4x+4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$

d) $\lg_2 x+3=\lg_2\frac{2}{x}$

<u>Solución:</u> Aplicando las propiedades de los logaritmos y pasando las variables para el miembro izquierdo se tiene que: $\lg_2\frac{2}{x}-\lg_2 x=3\lg_2 2 \Rightarrow \lg_2\frac{2}{x^2}=\lg_2 8 \Rightarrow \frac{2}{x^2}=8 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$, como el dominio de los logaritmos son los reales positivos, entonces $x=\frac{1}{2}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los conjuntos:

A, B$\subset\Re$/ A={x$\in$Z/ $\sqrt{x^2+8}$ =3} y B={x$\in$Z/$x^3 + x^2 - 9x - 9=0$}, hallar:

a. AxB

b. BxA

c. aRb, a$\in$Ay b$\in$B, con la relación "a es mayor que b"

d. Hallar el dominio en cada caso

e. Hallar el recorrido en cada caso

f. La representación tabular y sagital de AxB

<u>Solución</u>: lo primero que haremos es expresar por extensión los conjuntos A y B. Para el conjunto A tenemos que: $\sqrt{x^2+8}$ =3, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos: $x^2 + 8=9 \Rightarrow x^2 + 8 - 9=0 \Rightarrow x^2 -1=0$ $\Rightarrow (x - 1)(x + 1)=0 \Rightarrow x=-1$ y $x=1$, entonces tenemos, A={-1,1}, para el conjunto B tenemos: $x^3 + x^2 - 9x - 9=0$, aplicando Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -9 & -9 \\
-1 & & -1 & 0 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Por lo tanto, B={-3, -1, 3}

Solución a): AxB={(-1, -3), (-1, -1), (-1, 3), (1, -3), (1, -1), (1, 3)}

<u>Solución</u> b): BxA={(-3, -1), (-3, 1), (-1, -1), (-1, 1), (-3, -1), (-3, 1)}

<u>Solución</u> c): aRb={(-1, 3), (1, 3)}

<u>Solución</u> **d): DomAxB=A, DomBxA=B, DomaRb=A**

<u>Solución</u> **e)**

Representación Tabular **Representación Sagital**

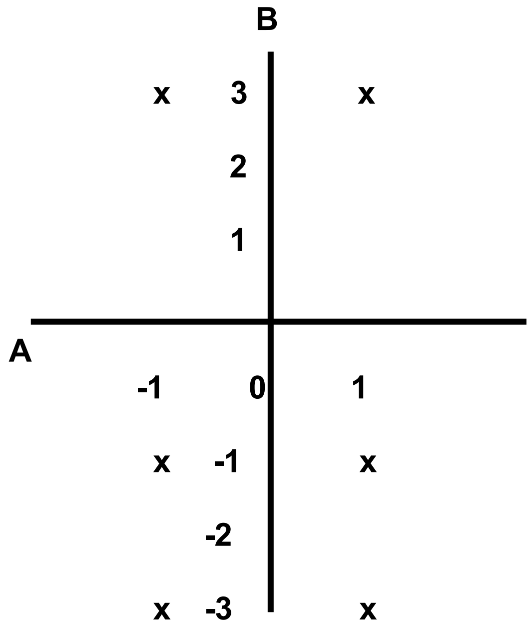


Fig. Nº 62

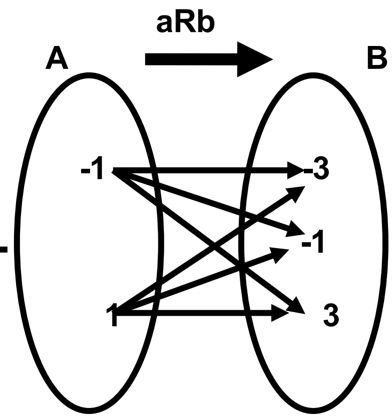


Fig. Nº 63

2. Sea f={(1,3),(3 4),(5,6),(7,7),(9,12)} y g={(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)}, hallar:

- **a. (f + g)**
- **b. (f – g)**
- **c. (fxg)**
- **d. (f/g)**
- **e.** f^{-1}
- **f.** g^{-1}

<u>Solución</u>**: como la suma, la resta, la multiplicación y la división de funciones se definen de la siguiente manera:**

$(f + g)=f + g \wedge Domf \cap Domg$

$(f - g)=f - g \wedge Domf \cap Domg$

$(fxg)=fxg \wedge Domf \cap Domg$

$(f/g)=f/g \wedge Domf \cap Domg \wedge g \neq 0$

Buscamos el dominio de A y el de B, lo intersectamos y luego súmanos o restamos o multiplicamos o dividimos según sea el caso los recorridos de los elementos que pertenecen a la intersección.

Domf={1, 3, 5, 7, 9} y Domg={1, 2, 3, 4, 5} $\Rightarrow$ Domf$\cap$Domg={1, 3, 5]

<u>Solución</u> a): (f + g)={(1, 5), (3, 10), (5, 16)}

<u>Solución</u> b): (f - g)={(1, 1), (3, -2), (5, -5)}

<u>Solución</u> c): (fxg)={(1, 6), (3, 24), (5, 60)}

<u>Solución</u> d): (f/g)=$\{(1, \frac{3}{2}), (3, \frac{2}{3}), (5, \frac{3}{5})\}$

Para la solución e) y f), aplicamos la definición de función inversa, la cual nos dice que si la función es biyectiva, entonces la inversa es la función donde el recorrido se convierte en dominio y viceversa

<u>Solución</u> e): f^{-1}={(3, 1), (4, 3), (6, 5), (7, 7), (12, 9)}

<u>Solución</u> f): g^{-1}={(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5)}

3. Realizar la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y luego sin cálculos adicionales hallar:

a. $g(x)=2 + x^2$

b. $h(x)=(x - 2)^2$

c. $t(x)= -x^2 – 2x + 2$

<u>Solución</u>: grafiquemos la función $f(x)=x^2$, esta función es una parábola que pasa por el origen y como su dominio está definido en todos los reales, podemos realizar la gráfica dándole cinco (5) valores:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

Luego la gráfica es:

-

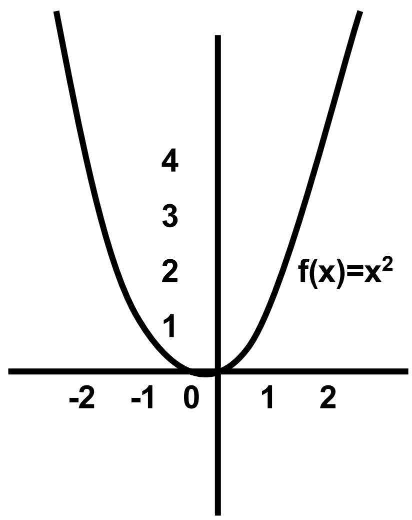


Fig. Nº 64

<u>Solución</u> a): $g(x)=2 + x^2$, como hay una traslación vertical se traslada la función f(x) dos cantidades hacia arriba, para la solución b) $h(x)=(x - 2)^2$ hay una traslación horizontal, la función se traslada dos (2) cantidades hacia la derecha y para la solución c) $t(x)=-x^2 - 2x + 2$, completando cuadrado, tenemos: $t(x)=-[x^2 + 2x - 2] \Rightarrow t(x)=-[(x + 1)^2 - 2 -1]$ $\Rightarrow$ $t(x)=-(x + 1)^2 + 3$, lo que quiere decir que la función f(x) se traslada

verticalmente tres (3) cantidades hacia arriba, horizontalmente una cantidad hacia la izquierda, y luego rota 180°, veamos esto gráficamente

Solución a) $g(x)=2 + x^2$ solución b) $h(x)=(x-2)^2$ solución c) $t(x)=-x^2 - 2x + 2$

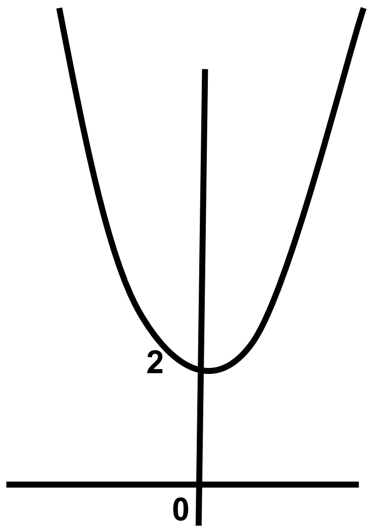


Fig. Nº 65

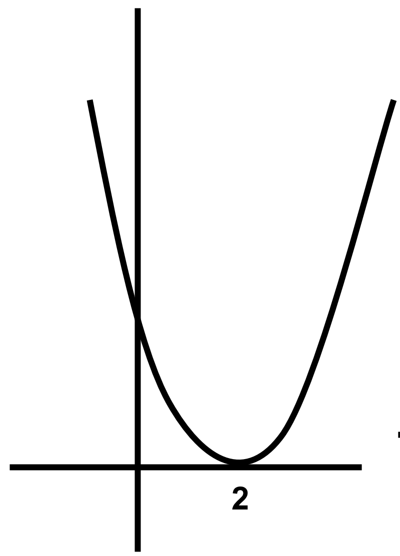


Fig. Nº 66

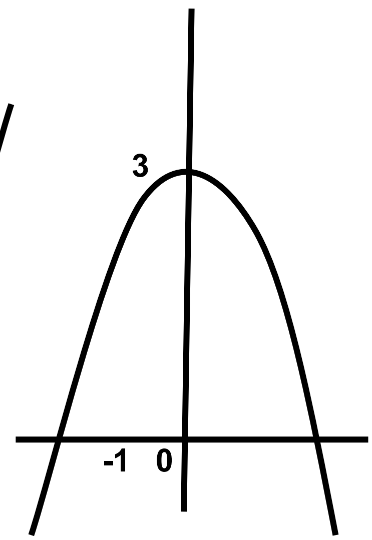


Fig. Nº 67

4. Encuentre una ecuación para la recta que satisface las condiciones que se dan a continuación:

a) Pasa por el punto p(1, -6) y tiene pendiente $m=-\frac{1}{3}$

b) Pasa por el punto p(2, 3) y pasa por el punto p(-2, 4)

c) Corta al eje X en x=3 y al eje Y en y=4

d) Pasa por el punto p(-4, 5) y es perpendicular a la recta $3x + 4y - 2=0$

<u>Solución</u> a): la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto está determinada por: $y=m(x - x_0) + y_0$, donde $x_0=1$, $y_0=-6$ y $m=-\frac{1}{3}$, $\therefore$,

$$y=-\frac{1}{3}(x - 1) - 6 \Rightarrow 3y=-(x - 1) - 18 \Rightarrow 3y=-x - 17 \text{ o } x + 3y + 17=0$$

<u>Solución</u> b): la ecuación de la recta dados dos puntos es:

$y(x_1 - x_0)=(y_1 - y_0)(x - x_0) + y_0(y_1 - y_0)$, donde $x_0=2$, $x_1=-2$, $y_0=3$ e $y_1=4$, tenemos: $y(-2 - 2)=(4 -3)(x - 2) + 3(-2 - 2) \Rightarrow -4y=x - 2 - 12 \Rightarrow -4y=x - 14$ o $x + 4y - 14=0$

<u>Solución</u> c): la ecuación simétrica de la recta está determinada por: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, donde a es el corte con el eje X y b el corte con el eje Y, $\therefore$,

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 4x + 3y=12$ o $4x + 3y - 12=0$

<u>Solución</u> d): como la recta que buscamos es perpendicular a la recta $3x + 4y - 2=0$ y como dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una es la inversa opuesta de la otra, tenemos que si $m_1=-\frac{3}{4}$, entonces la pendiente de la recta que buscamos es $m_2=\frac{4}{3}$ y como $y=m(x - x_0) + y_0$, donde $x_0=-3$, $y_0=5$ $\Rightarrow y=\frac{4}{3}(x -(-3)) + 5 \Rightarrow 3y=4(x + 3) + 5 \Rightarrow 3y=4x + 17$ o $3x - 4y - 17=0$

i. Sea $f(x)=\frac{2x+3}{5x-2}$ y $g(x)=\sqrt{2x+3}$, hallar:

a. $(f + g)x$

b. $(f- g)x$

c. $(fxg)x$

d. $(f/g)x$

e. $f^{-1}(x)$

f. $g^{-1}(x)$

g. ¿Qué condición debe cumplir f(x) para que sea biyectiva?

h. ¿Qué condición debe cumplir g(x) para que sea biyectiva?

Solución: Aplicamos las definiciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones:

Solución a. $(f + g)x=f(x) + g(x) \wedge Df\cap Dg$, buscando el dominio de $f(x)=\frac{2x+3}{5x-2}$ tenemos que $5x - 2\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{2}{5} \Rightarrow Domf=\Re - \{\frac{2}{5}\}$, para el dominio de $g(x)=\sqrt{2x+3}$, $2x + 3\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{2} \Rightarrow Domg=[-\frac{3}{2}, \infty) \Rightarrow$ $Domf\cap Domg=[-\frac{3}{2}, \infty) - \{\frac{2}{5}\}$, ahora sumamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e,i, $(f + g)x=\frac{2x+3}{5x-2} + \sqrt{2x+3}$

Solución b. $(f - g)x=f(x) - g(x) \wedge Df\cap Dg$, por la solución a) tenemos que: $Domf\cap Domg=[-\frac{3}{2}, \infty) - \{\frac{2}{5}\}$, ahora restamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. $(f + g)x=\frac{2x+3}{5x-2} - \sqrt{2x+3}$

Solución c. $(fxg)x=f(x)g(x) \wedge Df\cap Dg$, por la solución a) tenemos que: $Domf\cap Domg=[-\frac{3}{2}, \infty) - \{\frac{2}{5}\}$, ahora multiplicamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. $(fxg)x=\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{5x-2}$

Solución d. (f/g)x=f(x)/g(x) $\wedge$ Df$\cap$Dg y además g$\neq$0, por la solución a. tenemos que: Domf$\cap$Domg=$(-\frac{3}{2}, \infty) - \{\frac{2}{5}\}$, ahora dividimos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. $(f/g)x=\dfrac{(2x+3)}{(5x-2)\sqrt{2x+3}}$

Solución e. Aplicando la definición de inversa de una función, suponiendo que la función es biyectiva, entonces despejamos x en función de y, e.i. $y=\dfrac{2x+3}{5x-2} \Rightarrow (5x-2)y=2x+3 \Rightarrow 5xy-2y=2x+3 \Rightarrow$

$5xy-2x=2y+3 \Rightarrow x(5y-2)=2y+3 \Rightarrow x=\dfrac{2y+3}{5y-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)=\dfrac{2x+3}{5x-2}$

Solución f. Aplicando la definición de inversa de una función, suponiendo que la función es biyectiva, entonces despejamos x en función de y, e.i. $y=\sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2=2x+3 \Rightarrow 2x=y^2-3 \Rightarrow x=\dfrac{y^2-3}{2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-3}{2}$

Solución g. para que la función $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x-2}$ sea biyectiva tiene que estar definida de la siguiente manera: $f:\Re - \{\frac{2}{5}\} \to \Re - \{\frac{2}{5}\}$/ $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x-2}$

Solución h. para que la función $g(x)=\sqrt{2x+3}$ sea biyectiva tiene que estar definida de la siguiente manera: $f:[-\frac{3}{2}, \infty) \to \Re\}$/ $f(x)=\sqrt{2x+3}$

5. Un fabricante puede producir celulares a un costo de Bs. 43.000

cada uno. Calcula que si los vende a x bolívares cada uno podrá vender aproximadamente 150.000 – x celulares al mes. La ganancia mensual del fabricante es una función del precio x al cual vende los celulares.

a. Exprese esta función matemáticamente

b. ¿Cuál será la ganancia si vende los celulares a Bs. 90.000 cada uno.

Solución a. como la ganancia es el ingreso menos el costo, e.i. G=I – C, donde en este caso el I=N°de celulares por el precio de venta unitario de los celulares, entonces, I=(150.000 – x)x, y C=43.000(150.000 –x), e.i.

N° de celulares=150.000 – x

Precio de venta unitario= Bs. x

Costo unitario por celular=Bs. 43.000

$\therefore$ el modelo matemático será: G(x)=(150.000 – x)x – 43.000(150.000) $\Rightarrow$ G(x)=(150.000 - x)(x – 43.000)

Solución b): como el precio de los celulares es de Bs. 90.000, sustituimos este valor por el valor de x en la función ganancia y obtenemos que:

G(x)=(150.000 – 90.000)(x – 90.000) $\Rightarrow$ G(x)=18.404.000.000 Bs.

6. Factorice aplicando Rufini:

a. $x^3 + 2x^2 - 5x + 6=0$

b. $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - x + 6=0$

<u>Solución</u> a. $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=0$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	

Luego, $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=(x + 2)(x – 1)(x – 3)$

<u>Solución</u> b. $x^4 + 3x^3 – 7x^2 – x + 6=0$

	1	1	-7	-1	6
-1		-1	0	7	-6
	1	0	-7	6	0
1		1	1	-6	
	1	1	-6	0	
2		2	6		
	1	3	0		

Luego, $x^4 + 3x^3 – 7x^2 – x + 6=((x + 3)(x + 1)(x – 1)(x – 2)$

7. Aplique fracciones parciales a: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^3-2x^2-5x+6}$

<u>Solución</u>: como $x^3 - 2x^2 - 5x + 6=(x + 2)(x - 1)(x - 3)$, ver problema anterior, tenemos que: $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x-3)} \Rightarrow f(x)= \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-3}$, donde los valores de A, B y C, se calculan de la siguiente manera:

$$A=\left(\frac{2x+3}{(x-1)(x-3)}\right)_{x=-2} \Rightarrow A=\frac{2_x2+3}{(-2-1)(-2-3)} \Rightarrow A=\frac{7}{15}$$

$$B=\left(\frac{2x+3}{(x+2)(x-3)}\right)_{x=1} \Rightarrow B=\frac{2_x1+3}{(1+2)(1-3)} \Rightarrow B=-\frac{5}{6}$$

$C=\left(\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)}\right)_{x=3} \Rightarrow C=\dfrac{2_x3+3}{(3+2)(3-1)} \Rightarrow C=\dfrac{9}{10}$, $\therefore$ f(x) se puede escribir como: $f(x)= \dfrac{7}{15(x+2)} - \dfrac{5}{6(x-1)} + \dfrac{9}{10(x-3)}$

8. Factorizar aplicando las fórmulas: $x^n - y^n$, $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$

a. $2x^2 - 5$

b. $4x^4 - 1$

c. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}$

d. $\sqrt[5]{x}-2$

Solución: Aplicando las identidades:

$x^n - y^n=(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$ y

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}+.........+\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Solución i. $2x^2 - 5 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \Rightarrow (x - \sqrt{\frac{2}{5}})(x + \sqrt{\frac{2}{5}})$

Solución ii. $4x^4 - 1 = x^4 - \frac{1}{16} \Rightarrow$

$$x^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = (x - \frac{1}{2})(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8})$$

Solución iii. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5} = \dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}$

Solución iv) $\sqrt[5]{x} - 2 = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{32} \Rightarrow$

$$\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{32} = \frac{x-32}{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{32x^3} + \sqrt[5]{1204x^2} + \sqrt[5]{32768x} + \sqrt[5]{1048576}}$$

9. Representar gráficamente el siguiente polinomio:

$f(x)=x^3 - 3x^2 - x + 3$

Solución: para realizar la gráfica seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos el dominio de la función: Domf=$\Re$

2. Buscamos el corte con el eje Y, (x=0) $\Rightarrow$ f(0)=3, cota al eje Y en el punto (0, 3)

3. Buscamos el corte con el eje X, (y=0) $\Rightarrow$ $x^3 - 3x^2 - x + 3=0$, aplicando Rufini

<u>Solución</u> a): $x^3 - 2x^2 - 5x + 6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Luego, $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=(x + 1)(x – 1)(x – 3)=0$, $\therefore$, la función corta al eje X en: x=-1, x=1 y x=3, entonces corta al eje X en los puntos (-1, 0), (1, 0) y (3, 0) estos puntos que cortan al eje de las X, son puntos de separación, e.i. como existen tres puntos de separación, tenemos cuatro intervalos, en los cuales vamos a tomar un punto de prueba para determinar si la función está por encima o por debajo del eje X y así poder hacer la gráfica aproximada.

4. Puntos de prueba: $-2\in(-\infty, -1)$; $0\in(-1, 1)$; $2\in(1, 3)$ y $4\in(3, +\infty)$

5. Estudio de la función por medio de los puntos de prueba:

Para x=-2 $\Rightarrow$ $f(-2)=(-2)^3 – 2(-2)^2 – 5(-2) + 6 \Rightarrow f(-2)=-15$, esto quiere decir que cuando los valores de x crecen indefinidamente la función f(x), también crece indefinidamente

Para x=0 $\Rightarrow$ f(0)=6, esto nos indica que en el intervalo (-1, 1) la función está por encima del eje X.

Para x=2 $\Rightarrow$ $f(2)=(2)^3 – 2(2)^2 – 5(2) + 6 \Rightarrow f(2)=1$, $\therefore$, la función en el intervalo (1, 3) está por debajo del eje X

Para x=4 $f(4)=(4)^3 – 2(4)^2 – 5(4) + 6 \Rightarrow f(4)=15$, esto nos indica que cuando

los valores de x crecen indefinidamente, la función f(x) también crece indefinidamente

6. Con los datos obtenidos realizamos la gráfica:

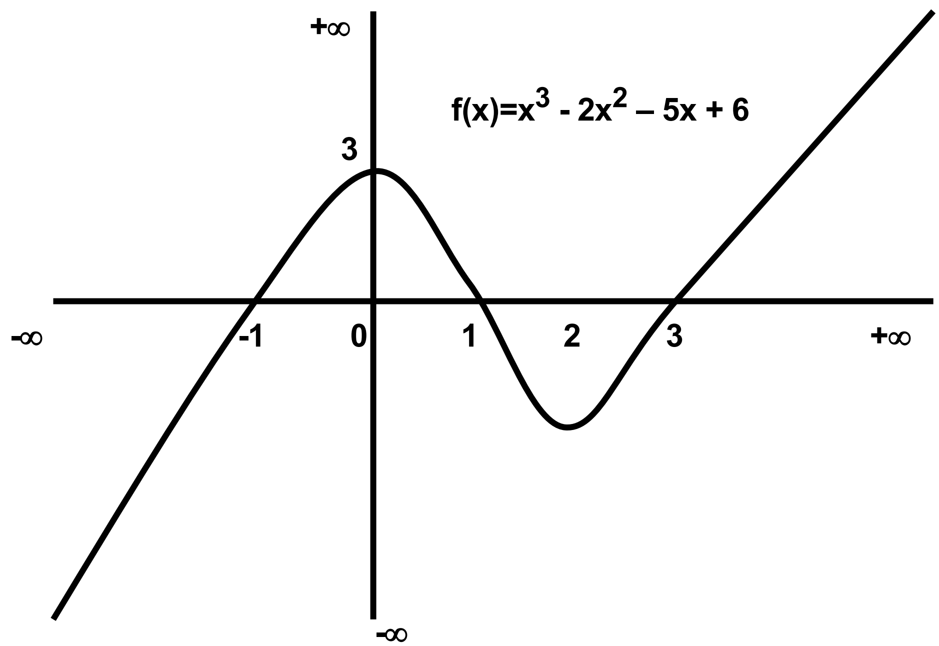


Fig. N° 68

10. Use la traslación en sentido vertical adecuada para representar gráficamente el siguiente polinomio: $f(x)=x^3 + 7x^2 – 30x + 2$

<u>Solución:</u> aplicando la definición de traslación vertical, hacemos f(x)=g(x) + 2, e.i. grafiquemos g(x) y luego la trasladamos 2 lugares hacia arriba, para realizar la gráfica g(x) seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos el dominio de la función: Domg=$\Re$

2. Buscamos el corte con el eje Y, (x=0) $\Rightarrow$ g(0)=0, cota al eje Y en el punto (0, 0)

3. Buscamos el corte con el eje X, (y=0) $\Rightarrow$ $x^3 + 7x^2 – 30x=0$, $\Rightarrow$

$x(x + 10)(x - 3)=0 \Rightarrow x=0$, $x=-10$ y $x=3$, como existen tres puntos de separación, tenemos cuatro intervalos, en los cuales vamos a tomar un punto de prueba para determinar si la función está por encima o por debajo del eje X y así poder hacer la gráfica aproximada.

4. Puntos de prueba: $-11\in(-\infty, -10)$; $-1\in(-10, 0)$; $1\in(0, 3)$ y $4\in(3, +\infty)$

5. Estudio de la función por medio de los puntos de prueba:

Para $x=-11 \Rightarrow g(-11)=(-11)^3 + 7(-11)^2 - 30(-11) \Rightarrow g(-11)=-924$, esto quiere decir, que cuando los valores de x decrecen indefinidamente la función g(x), también decrece indefinidamente

Para $x=-1 \Rightarrow g(-1)= (-1)^3 + 7(-1)^2 - 30(-1) \Rightarrow g(-1)=36$, esto nos indica que en el intervalo (-10, 0) la función está por encima del eje X.

Para $x=1 \Rightarrow g(1)=(1)^3 + 7(1)^2 - 30(1) \Rightarrow g(1)=-22$, $\therefore$, la función en el intervalo (0,3) está por debajo del eje X

Para $x=4$ $g(4)=(4)^3 + 7(4)^2 - 30(4) \Rightarrow g(4)=56$, esto nos indica que cuando los valores de x crecen indefinidamente, la función f(x) también crece indefinidamente

6. Con los datos obtenidos realizamos la gráfica:

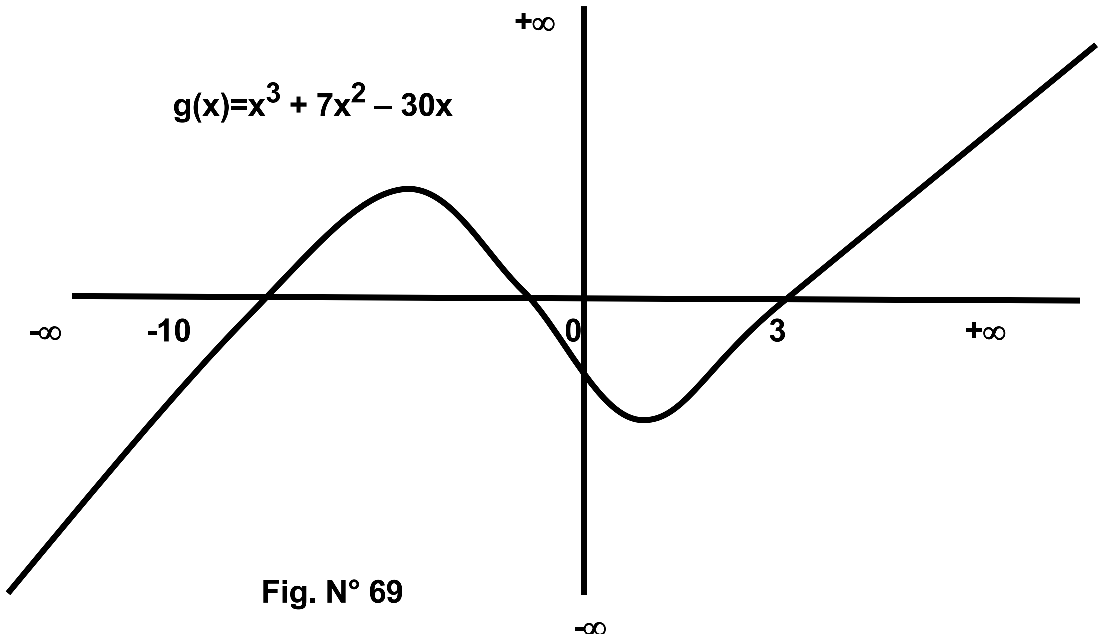


Fig. N° 69

Trasladando g(x) 2 cantidades hacia arriba tenemos:

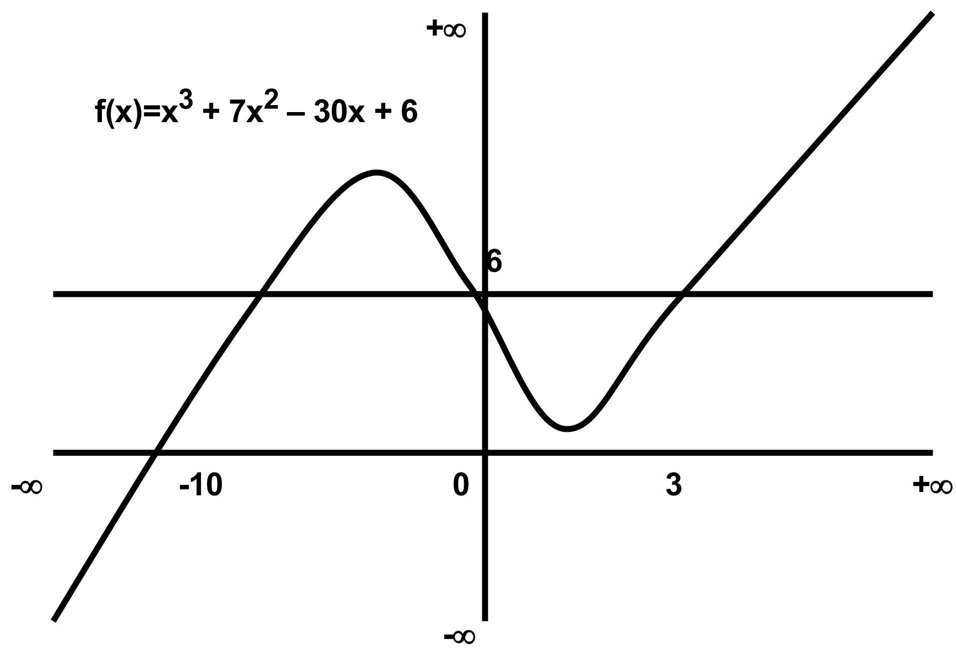


Fig. N° 70

11. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales

a. $2^x + 4^x = 72$

b. $3^{x+1} + 9^x = 108$

c. $2^{x^2-3x}=16$

<u>Solución</u> a. $2^x + 4^x=72 \Rightarrow 2^x+\left(2^x\right)^2-72=0$, haciendo un cambio, $y=2^x$ obtenemos que $y^2 + y - 72=0$, factorizando esta ecuación tenemos: $(y + 9)(y - 8)=0 \Rightarrow y=-9$ o $y=8$, como el valor de y no puede ser negativo, tenemos entonces que $y=8 \Rightarrow 8=2^x \Rightarrow 2^3=2^x \Rightarrow x=3$

<u>Solución</u> b. $3^{x+1} + 9^x=108 \Rightarrow \left(3^x\right)^2+3_x3^x-108=0$, haciendo un cambio, $y=3^x$, obtenemos que $y^2 + 3y - 108=0$, factorizando esta ecuación tenemos: $(y + 12)(y - 9)=0 \Rightarrow y=-12$ o $y=9$, como el valor de y no puede ser negativo, tenemos entonces que $y=9 \Rightarrow 9=2^x \Rightarrow 3^2=3^x \Rightarrow x=2$

<u>Solución</u> c. $2^{x^2-3x}=16 \Rightarrow 2^{x^2-3x}=2^4 \Rightarrow x^2 - 3x=4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4=0$ factorizando esta ecuación tenemos: $(x + 1)(x - 4)=0 \Rightarrow x=-1$ o $x=4$,

12. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas

a. $\lg_3(x - 2) + \lg_3 x=\lg_3 8$

b. $\lg(x^2 - 15x)=3$

c. $\lg(x + 5) - \lg(x - 4)=1$

<u>Solución</u> a. $\lg_3(x - 2) + \lg_3 x=\lg_3 8 \Rightarrow \lg_3(x - 2)x=\lg_3 8 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 8=0$, completando cuadrado tenemos que: $(x-1)^2 - 8 - 1=0$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 9=0 \Rightarrow (x-1-3)(x-1+3)=0 \Rightarrow (x-4)(x-2)=0 \Rightarrow x=-2$ o $x=4$,

pero x no puede ser negativo, $\therefore$ la solución es: $x=4$

Solución b. $\lg(x^2 - 15x)=3 \Rightarrow 10^{\lg(x^2-15x)} = 10^3 \Rightarrow x^2 - 15x - 1000=0$, factorizando tenemos que: $(x-40)(x+25)=0$, luego $x=40$ o $x=-25$, pero x no puede ser negativo, entonces para este caso la respuesta es: $x=40$

Solución c. $\lg(x + 5) - \lg(x - 4)=1 \Rightarrow \lg\frac{x+5}{x-4} = \lg 10 \Rightarrow$

$\frac{x+5}{x-4} = 10 \Rightarrow x + 5=10x - 40 \Rightarrow 10x - x - 40 - 5=0 \Rightarrow 9x - 45=0 \Rightarrow x=5$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dados los conjuntos:

$A \subset \mathscr{R} / A=\{x \in Z^- / -3 \leq x \leq 4\}$ y $B \subset \mathscr{R} / B=\{x \in Q / 15x^2 - x - 2=0\}$. Hallar:

a. AxB, b. BxA, c. a$\mathscr{R}$b con la relación "a es el triple de b", d. a$\mathscr{R}$b con la relación "a es el inverso multiplicativo de b", e. hallar el dominio, el recorrido, la representaciones sagital y tabular, en cada caso.

2. Dado el conjunto $A C \mathscr{R} / A=\{x \in \frac{Z}{3} \leq x \leq 5\}$ y la relación $\mathscr{R}=\{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 3)\}$, probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia.

3. Probar que el conjunto $\mathscr{R}$ con la relación "$\frac{a}{b}$" es una relación de orden.

En las relaciones dadas a continuación:

f=$\{$(4,2), (0,11), (3,5), (7,20), (9,15)$\}$

g=$\{$(5,-20), (0,30), (3,16), (7,11), (8,7)$\}$

h=$\{$(3,2), (5,5), (3,7), (-2,0), (8,9)$\}$

t=$\{$(5,-3), (0,7), (4,3), (8,9), (9,10), (11,16)$\}$

a. Obtener sus gráficas

b. ¿Cuales de estas son funciones?

c. Hallar el dominio

d. Hallar el recorrido

e. Realizar la suma: (f + g)

f. Realizar la resta: (f – h)

g. Realizar el producto (fxt)

h. Realizar el cociente ($\frac{f}{s}$)

i. Realizar las operaciones [(f + g) – (h + t)]

j. Realizar las operaciones [(gxt) + (f*h)]

4. En cada uno de los ejercicios siguientes decir si las relaciones dadas son o no funciones y dar una razón para su respuesta. En cada ejercicio hallar su dominio y recorrido

a) $y^2=4x$

b) $y=-3x + 2$

c) $y=\frac{3}{x}$

d) $x^2 + y^2=16$

e) $y=5 – x$

f) $x=y$

g) $y^2=4x^2$

h) $y=-x^2 –x – 6$

i) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

j) $y=3^x$

k) $y=\lg_{\frac{1}{5}}x$

l) $y=\lg 5x \lg_5 x$

m) $y=\lg x^3$

n) $y=e^{-x^2}$

o) y=sen(2x + 3)

p) $y=tg(x+\pi)$

q) y=sec(3x – 45º)

5. **Hallar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:**

a) $f:[0,\infty] \rightarrow [0,\infty]/f(x)=\sqrt{-x}$

b) $f: \mathfrak{R}R \rightarrow \mathfrak{R}/f(X)=2x^2 - 5$

c) $f:\mathfrak{R} - \{\frac{1}{5}\} \rightarrow \mathfrak{R} - \{\frac{2}{3}\}/f(x)=\frac{2x-7}{3x-5}$

d) $f:\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}/f(x)=\sqrt{x+5}$

6. **Estudiar las siguientes funciones:**

a) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}/f(x)=x^2 - 16x - 25$

b) $f:(-\infty,5] \rightarrow \mathfrak{R}/f(x)=x^2 - 16x - 25$,

c) $f:(-\infty,5] \rightarrow [0,\infty]/f(X)=x^2 - 16x - 25$

d) $f:(0,\infty] \rightarrow \mathfrak{R} - \{-1\}/f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

7. En Renta Car el alquiler de un automóvil es de Bs. 25.500 más Bs. 2.500 por Km.

a) ¿Cual es el costo del alquiler de un automóvil para un viaje de 50 Km?

b) Exprese el costo del alquiler como una función del número de Km.

de viaje.

8. Sean f={($\frac{1}{2}$, 3), ($\frac{3}{2}$, 3), ($\frac{5}{2}$, 3), ...} y

g={(0, 1), ($\frac{1}{2}$, 2), (1, 3), ($\frac{3}{2}$, 4) ..,....}, hallar:

a) (f + g)

b) (f - g)

c) (f.g)

d) (f/g)

e) f^{-1}

f) (fog)

9. Sean f(x)=2x + 3, g(x)=$\sqrt{3x+5}$, h(x)=$3x^2$ – 5x + 7 y t(x)=$\frac{4x-3}{5x-7}$, hallar:

a) (f + g)x, b) (f - t)x, c) (g^2.t)x, d) (h/t)x, e) (g^{-1})x, f) (t^{-1})x, g) (fog)x,

h. (hog)x, i) (tog)x

10. Comprobar que (fogoh)x=[fo(goh)x]x=[(fog)xoh]x, e.i. que la composición de funciones cumple con la propiedad asociativa.

11. Represente gráficamente las siguientes funciones:

a) f(x)=x

b) g(x)=x^3

c) h(x)=$\sqrt[3]{x}$

d) t(x)=$\frac{1}{x}$

e) $s(x)=\sqrt{x}$

f) $v(x)=\frac{1}{x^2}$,

12. Pepe Ganga ofrece la siguiente venta especial. Si se compra 5 camisas al precio total de 10.400 Bs. por camisa, entonces pueden comprarse camisas adicionales a mitad de precio. Hay un límite de 9 camisas por cliente. Exprese el costo de la compra de las camisas como una función del número comprado y grafique esta función.

13. La línea aérea Avior cobra por viaje de San Fernando a Maiquetía a los niños según la siguiente política: niños menores 2 años no pagan, niños con edades comprendidas entre 2 y 12 años pagan Bs. 50.000 y todo niño mayor de 12 años paga Bs. 80.000. Exprese el precio como una función de la edad de la persona y graficar esta función.

14. Basándonos en el ejercicio (11) sin cálculos adicionales graficar:

a) $g(x)=(x-3)^3$, $h(x)=x^3+5$, $t(x)=5-(x-2)^3$

b) $g(x)=\sqrt[3]{x}-2$, $h(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $t(x)=3-\sqrt[3]{x}$,

c) $g(x)=\frac{1}{x}+2$, $h(x)=3-\frac{1}{2-x}$

d) $g(x)=\sqrt{x+3}$, $h(x)=2-\sqrt{x}$,

e) $g(x)=2-\frac{1}{(x+2)^2}$, $h(x)=\frac{1}{(x+2)^2}-1$

15. Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas y trazar su grafica:

a. $y=3x$

b. $y=2x-2$

c. $x+y=0$

d. $2x+4y=12$

e. $x=-3$

f. $y=2$

16. Escribir la ecuación de la recta que tiene las siguientes propiedades:

a) Pasa por el punto (2, 1), con pendiente 3

b) Pasa por el punto $(\frac{12}{13}, \frac{1}{3})$ paralela al eje X

c) Pasa por el punto $(\frac{1}{4}, -1)$ paralela al eje Y

d) Pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5)

e) Corta a los ejes de coordenadas en $x=3$ e $y=5$.

17. Encuentre un número real k tal que $p(-1, 2)$ esté sobre la recta $kx-5y+2=0$

18. Encuentre una ecuación para la recta que satisface las condiciones que se dan a continuación:

a) Pasa por el punto $p(2, -6)$ y tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$

b) Pasa por el punto $p(10, -6)$ y es paralela al eje X

c) Pasa por el punto $p(10, -6)$ y es perpendicular al eje Y

d) Pasa por el punto $p(7, -3)$ y es perpendicular a la recta $2x-5y-8=0$

e) Pasa por el punto $p(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2})$ y es paralela a la recta $x+3y-1=0$

19. Hallar (f + g)x, ($f_x g$)x y ($\frac{f}{g}$)x con los siguientes pares de funciones:

a) f(x)=x + 1 y g(x)=$\frac{3}{x+1}$

b) f(x)=$\sqrt{x+3}$ y g(x)=x^3 + x

c) f(x)=x^2 – 1 y g(x)=$\sqrt{x+1}$

20. Muestre que las funciones: f(x)=$\sqrt{x^2-1}$ y g(x)=$|x|$ - 1, no son inyectivas.

21. Muestre que las funciones: f(x)=x + 1 y g(x)=$\frac{3}{x+1}$, son inyectivas

22. Supóngase que se han restringido los dominios de las funciones que se dan, de tal forma que se puede definir fog y gof. En cada caso hallar (fog)x y (gof)x:

a) f(x)=5x + 10 y g(x)=x^2 + 1

b) f(x)=$\sqrt{x+\sqrt{x}+1}$ y g(x)=x^2

c) f(x)=x^2 - 4 y g(x)=$\sqrt{2x-1}$

d) f(x)=$\frac{4x+2}{3x+5}$ y g(x)=2x +3

e) f(x)=$|x|$ - 2 y g(x)=-5

f) f(x)=x^2 + 1 y g(x)=$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+2}$

23. Hallar g de manera tal que fog=F, suponiendo que:

a) $f(x)=x^2$ y $g(x)=\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^2$

b) $f(x)=x^2 + 1$ y $g(x)=(2x^3 - 1)^2 + 1$

24. **Para cada una de las funciones dadas, encuentre funciones f y g tales que h(x)=(gof)x:**

a) $h(x)=\sqrt{2x-1}$

b) $h(x)=6(x - 3)^2 - x + 2$

25. **En cada una de las funciones F dadas, encuentre funciones f, g, y h tales que F(x)=h(g(f(x))):**

a) $f(x)=\sqrt{(x-3)^3}$

b) $f(x)=\sqrt{(2x-3)^3}$

c) $f(x)=\ln(2x - 5)^4$

d) $f(x)=\operatorname{sen}^2(x + 5)$

26. **Las siguientes funciones pueden ser expresadas como una composición (fog)x. Determine las funciones f y g que forman dicha función:**

a) $f(x)=(x - 3)^5$

b) $f(x)=(x + 3)^2 + 2$

c) $f(x)=\sqrt{x-5}$

27. **Determinar si cada una de las funciones siguientes es inyectiva o**

no y halle su inversa en caso de que lo sea:

a) $f(x)=3x+1$

b) $f(x)=x^3-1$

c) $f(x)=\frac{1}{1-x}$

d) $f(x)= 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

e) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

f) g) $f(x)=x^2-3x+2$

28. Obténgase la función inversa f^{-1} en cada caso:

a) $f(x)=3x+1$

b) $f(x)=x^2+2x-1$ con $x \geq -1$

c) $f(x)=x^4$ con $x \geq 0$

d) $f(x)=\sqrt{x-3}$,

e) $f(x)=\frac{4x+5}{3x+1}$

f) $f(x)=x^3+1$

g) $f(x)=\frac{5x+2}{x}$

29. Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x-1$. Calcular: a) $(fog)x$, b) $(gof)x$ c) f^{-1} d) g^{-1}

30. Cierto pozo de petróleo rinde 500 barriles de petróleo crudo por mes, que pueden ser vendidos a $ 30 por barril.

a) Establezca una función que exprese el ingreso total proveniente del pozo de petróleo.

b) ¿A cuánto ascenderán los ingresos provenientes del pozo de petróleo durante los próximos 6 meses?

31. Un alpinista asciende a la rata de 46.8 m/h. Después de 4 horas ha llegado a una altura de 1.435,2 mts.

a) Exprese la altura a que esta el alpinista como una función del tiempo y represente gráficamente esta función.

b) ¿A qué altura se encontraba cuando comenzó a escalar?

c) ¿A qué altura se encontrará al finalizar 6 horas?

32. Un constructor compra una maquinaria por un valor de Bs. 34.000 que deprecia linealmente de manera que su valor comercial después de 10 años será de Bs. 1.700

a) Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad.

b) ¿Cuál es el valor de la maquinaria después de transcurridos 4 años?

c) ¿Cuál es el tiempo de vida comercial de la maquinaria?

33. El valor de cierto libro raro se duplica cada 10 años. El libro costaba originalmente Bs. 510.

a) ¿Cuánto vale el libro cuando tenga 30 años?, ¿cuándo tenga 40 años?

b) ¿Puede expresarse el valor del libro como una función de su antigüedad? Explique su respuesta.

34. El museo de Historia natural local cobra la entrada de grupos de acuerdo con la siguiente política: a los grupos menores de 50 personas, se les cobra una tarifa de Bs. 25 por persona, mientras que a los grupos de 50 personas o más se le cobra una tarifa reducida de Bs. 17 por persona.

a) Exprese la suma que ha de pagar un grupo por su entrada al museo como una función del tamaño del grupo y grafique.

b) ¿Para cuáles valores de la variable independiente tiene esta función una interpretación práctica?

c) ¿Cuánto dinero ahorrará un grupo de 49 personas en los costos de entrada si puede conseguir un miembro adicional?

35. Dadas las funciones definidas mediante $f(x)=x^2 - 2$, $g(x)=3x + 1$ y $h(x)=x$: hallar:

a) $(f + g)x$,

b) $(f - h)x$

c) $(g*h)x$

d) $\left(\frac{g}{h}\right)x$

e) $(g - f)x$

36. Los gráficos que se dan a continuación corresponden a las funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$, Determinar:

a) Dominio y recorrido de $f(x)$ y $g(x)$

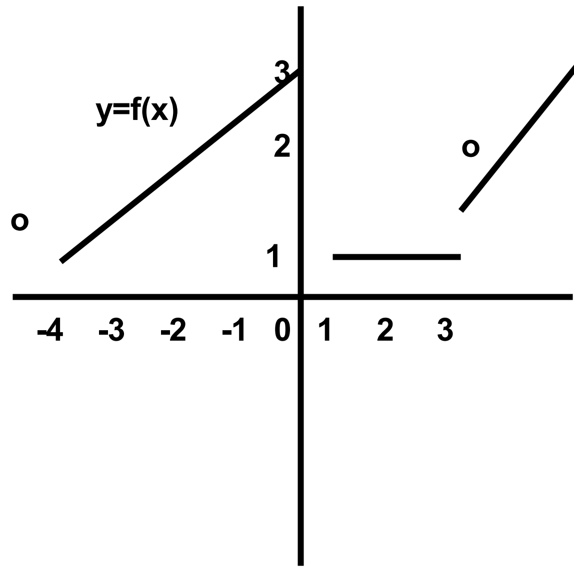
b) $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, y $f(-6)$

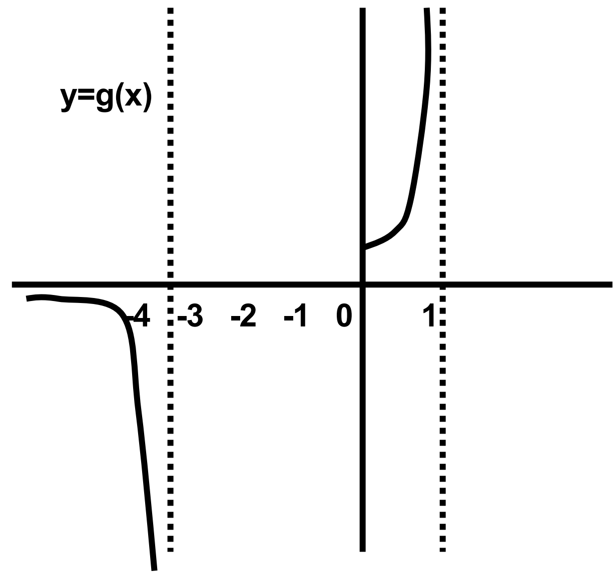
c) $g(-4)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ y $g(6)$

d) Si y=f(x)=3, ¿Cuál es el valor de x?

e) si y=g(x)=3 ¿Qué valores de x la satisfacen?

f) ¿Es f una función inyectiva? De no serlo, cuales son las restricciones a su dominio que permiten a f ser inyectiva





37. Dados los polinomios $f(x)=3x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 7$

$g(x)=4x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ y $h(x)=x^6 - 3x^2 + 5$ Hallar:

a) $(f + g)x$

b) $(f - g)x$

c) $(f + g - 2h)x$

d) $(f - 3g - 2h)x$

e) $(f.g)x$

f) $h^2(x)$,

g) $(g.h)x$

h) $(g.f - h)x$

38. En cada una de las funciones que se dan a continuación, determine su dominio y trace su grafica

a) f(x)= $|x-7|$

b) f(x)=- $|x-2|$

c) f(x)=-$|x|$ + 2

d) f(x)=2$|x|$ - 3

e) f(x)= $\frac{4x^2-1}{3x^2+1}$,

f) f(x)= $\sqrt{x+2}$

g) f(x)= $\frac{2x-1}{3x^2+1}$

h) f(x)= $\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$

i) f(x)= $\frac{\sqrt{x}}{x^2-9}$,

j) f(x)= $\frac{x^3+9x^2+27x+35}{x+5}$

k) f(x)= $\frac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5}$

l) f(x)= $\frac{x}{x^2-1}$

m) f(x)= $\begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x>3 \\ 2x - 1 \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

n) $f(x)=\begin{cases} 6x + 7 \text{ si } x\leq -2 \\ 4 - x \text{ si } x>-2 \end{cases}$

o) $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 3 \\ -2 \text{ si } x<-3 \end{cases}$

p) $f(x)=\begin{cases} -1 \text{ si } x\leq 0 \\ 2 \text{ si } 0<x<3 \\ 4 \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

q) $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\leq 2 \\ -x \text{ si } x>2 \end{cases}$

r) $f(x)=\begin{cases} -x + 4 \text{ si } x<-2 \\ |x| \quad \text{si } -2\leq x<3 \\ 5 \quad \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

39. Dados los polinomios $f(x)=2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x -3$, $g(x)=x - 3$, $h(x)=2x + 1$ Hallar:

a) $(\frac{f}{g})x$

b) $(\frac{f}{h})x$

38. Determine Q(x) y R(x) tales que P(x)=R(x)*Q(x). Si P(x) es la expresión dada en cada caso:

a) $P(x)=2x^2 - 3x + 1$

b) $P(x)=-3x^2 + 5x + 2$

c) $P(x)=7x^2 – 34x – 5$

d) $P(x)=3x^2 + 2x – 1$

e) $P(x)=x^3 – 3x^2 + x – 3$

f) $P(x)=x^3 – 2x^2 – 5x + 6$

g) $P(x)=2x^3 – 3x^2 – 5x + 6$

h) $P(x)=2x^4 – 5x^3 – 5x^2 + 5x + 3$

39. Determine en cada caso: R(x) tal que $R(x)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ Si:

a) $P(x)= 2x^4 – 5x^3 – 5x^2 + 5x + 3$, $Q(x)= 2x^2 – 3x + 1$

b) $P(x)=x^3 – 3x^2 + x – 3$, $Q(x)=3x^2 + 2x – 1$

c) $P(x)=x^3 – 2x^2 – 5x + 6$, $Q(x)=-3x^2 + 5x + 2$

40. Factorice, aplicando Ruffini:

a) $f(x)=-x^3 + 3x – 2$

b) $f(x)=2x^3 + 3x^2 - 11x – 6$

c) $f(x)=2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x – 3$,

d) $f(x)=24x^4 + 14x^3 – 13x^2 – 2x + 1$

e) $f(x)=x^6 - 1$

41. Aplique fracciones parciales a:

a) h(x)= $\dfrac{2x-2}{x^2-2x-15}$

b) h(x)= $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+6x^2+11x+6}$

c) h(x)= $\dfrac{3x^2-2}{6x^3+2x^2-24x-8}$

d) h(x)= $\dfrac{x^3-4x^2-3x}{5x^4+19x^3-9x^2-19x+4}$

e) h(x)= $\dfrac{4x^2-5x+1}{24x^3-14x^2-x+1}$

42. Factorizar, aplicando las formulas: $x^n \pm y^n$, $\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$

a) $f(x)=x^5 + 1$

b) $f(x)=3x^4 + 2$

c) $f(x)=x^6 + 6$

d) $f(x)=2 - x^5$

e) $f(x)=x^4 - 3$,

f) f(x)= $\sqrt[4]{x}-5$

g) f(x)= $\sqrt[5]{x}+4$

h) f(x)= $\sqrt[6]{x}+\sqrt[n]{2}$

43. Use la traslación en sentido vertical adecuada para representar gráficamente los siguientes polinomios:

a) $f(x)=x^2 + 3x + 4$

b) $f(x)=x^3 + x^2 + 5$

c) $f(x)=x^5 - 3x^3 + 3$

44. Represente Gráficamente los polinomios:

a) $f(x)=(x + 3)(x - 1)^2$

b) $f(x)=(x + 3)(x - 1)^3$

c) $f(x)=(x - 3)(x - 1)^4$

d) $f(x)=(x - 3)(x - 1)^5$

e) ¿Qué puede decir, sobre el comportamiento de cada gráfica en el apartado a) hasta el d) cerca del punto de Intersección (1,0)?

ii) Se dice que una raíz x_o de un polinomio f(x) es una <u>raíz de orden k</u>, si k es el mayor entero para el cual $(x - x_o)^k$ es un factor de f(x). Sobre la base de las observaciones hechas por usted en la parte i) ¿qué conclusión puede obtener acerca del comportamiento de la gráfica de un polinomio cerca del punto de intersección con el eje X proveniente de una raíz de orden par?, ¿qué conclusión puede obtener acerca del comportamiento de la gráfica de un polinomio cerca del punto de intersección con el eje X proveniente de una raíz de orden impar? De una justificación para las conclusiones obtenidas por usted

45. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $e^{2x}e^{5x}=e^{14}$

b) $\left(e^{5x+1}\right)^2 = e$

c) $(27)^{2x+1} = \frac{1}{3}$

d) $3e^{3x+1} = 5$

e) $6e^{1-x+1} = 25$

f) $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$

g) $4^{x+3} = 7$

h) $5^{2x-5} = 9$

i) $5(3^x - 6) = 10$

j) $4.5^{3-x} - 7 = 2$,

k) $\frac{8}{3^x} = 4$

l) $3^{x^2-5x+6} = 1$

m) $2^{x+1} + 4^x = 288$

n) $2^x + 2^{x+1} + 2_x 2^{x+2} = 56$,

o) $5^{2x+2} + (25)^x + (25)^{x-1} = 651$

p) $\sqrt[5]{8^{3x+2}} = \sqrt{3^{2x-1}}$

q) $169^{\sqrt{x}} - 14.13^{\sqrt{x}} + 13 = 0$,

r) $3^x{}_x 3^{x+1}{}_x 3^{x-2} = 243$

s) $5^{2x-2} + 5^{2x-3} + 5^{2x-4} = \frac{155}{625}$

t) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} - 5.2^{x+2} = -56$

a. $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 64$

46. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmica:

a) $\lg(x-3)=3$

b) $\lg_2(x+1)=4$

c) $\lg_4(3x-4)=2$

d) $\lg_4(2x+4)-3=\lg_4 3$,

e) $\lg(3x-1)-\lg(x-3)=2$

f) $\lg x+\lg(x-5)=2$

g) $\lg_3(2x+3)=4-\lg_3(x+6)$,

h) $\lg(x+2)^2=2$

i) $\lg_3 \frac{2}{x} = 3 + \lg_2 x$

j) $\ln x=\ln(3x+1)+1$

k) $\lg(x^2-x-5)=0$,

l) $\lg(3x+1)+\lg(6x-1)=\lg(9x-1)$

m) $(\lg x)^2+6\lg x+9=0$

n) $\lg_{27} x+\lg_9 x=10$,

o) $\lg(x-1)=0.25$

p) $\lg_{\sqrt{x+2}} 130 = 16$

CAPÍTULO III

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiaran: Punto de Acumulación, Límites, Límites Laterales, Límites Infinitos, Límites en el Infinito, Propiedades de los Límites, infinitesimales, Límites Indeterminados de la Forma: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty.0$ $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞, $1^{\pm\infty}$, Límites Logarítmicos, Límites Exponenciales, Continuidad, Puntos de Discontinuidad, Asuntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas, Gráfica aproximada de las funciones por medio de los límites.

LÍMITES

Expresaremos dando unos ejemplos de límite para introducirnos en este campo:

Ejemplo: Sea f(x)=4x - 3; ¿hacia que punto se aproximan los valores de esta recta cuando x se aproxima al punto x=5?.

x	4.9	4.99	4.992	5.001	5.01	5.1
f(x)	16.6	16.96	16.968	17.004	17.04	17.4

Cuadro Nº 1

Cuando x se aproxima a 5, observamos que: 4x - 3 se aproxima al 17.

Se dice que el límite de f(x)=4x - 3, cuando x se aproxima a 5 es 17 y se escribe: $\lim_{x \to 5}(4x - 3) = 17$

Geométricamente lo veremos en clase.

Ejemplo: Sea $f(x)=\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ ¿a que valor se aproxima f(x) cuando x se acerca a 5?

X	4.9	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
f(x)	9.9	9.99	9.995	10.001	10.01	10.1

Cuadro Nº 2

Cuando x se aproxima a 5, se observa que $f(x)=\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$, se aproxima a 10.

Vemos que esta función se comporta de manera semejante a la función f(x)=x + 5, para valores distintos de 5, por lo tanto, es lo mismo escribir:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \Rightarrow L = \lim_{x \to 5}(x + 5), \Rightarrow L \to 10$$

Nótese que: $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = x + 5$

Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{x + 5}{|x + 5|}$. Estudiemos el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima al -5.

x	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1
f(x)	-1	-1	-1	1	1	1

Cuadro Nº 3

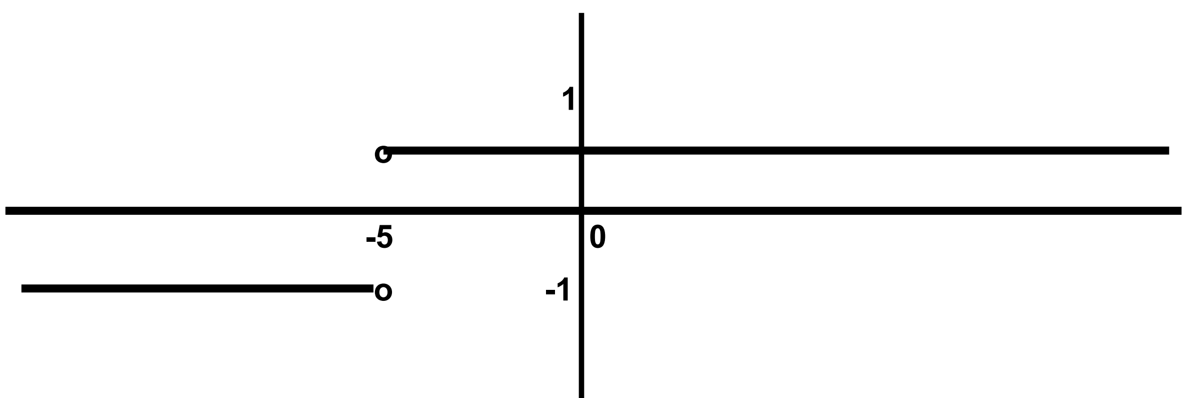


Fig. Nº 1

Como podemos observar, cuando x<-5, f(x) se aproxima a –1 y cuando x>-5, f(x) se aproxima a 1, de esta manera no podemos asegurar hacia qué número real se aproxima f(x), cuando x tiende a -

5, es decir, que no existe $L \in \Re$ tal que: $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x+5}{|x+5|}$ =L, Luego el límite de la función f(x) = $\dfrac{x+5}{|x+5|}$, cuando x se aproxima a -5, no existe.

Supongamos que el dominio de una función f(x) contiene intervalos (x_0,x_1) y (x_1, x_2), si al aproximarse x hacia x_1, tanto como sea posible, f(x) tiende a un número L, entonces, L será el límite de f(x) cuando x tiende a x_1, lo cual se escribe como: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = L$

<u>Ejemplo:</u> L= $\lim\limits_{x \to 5} (7x+5) = 40$

Esto significa que la expresión 7x + 5 se aproxima al valor 40, cuando x se aproxima a 5, por la izquierda y por la derecha, esto lo pueden ustedes observar en los tres ejemplos anteriores, es conveniente que estos valores estén en un entorno de x_1= 5 de radio δ, es decir, que los valores de x que tienden a 5, sean tales que $x \in (5 - \delta, 5 + \delta)$ y $0<\delta<1$.

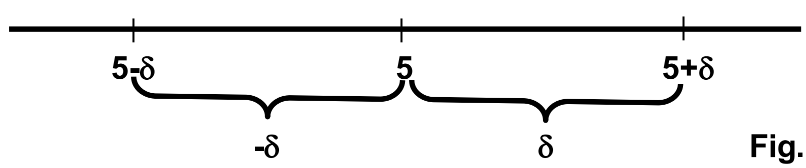


Fig. Nº 2

Existe una dependencia de f(x) respecto a x que hace que f(x) se encuentre en un entorno de L=40 de radio ξ, es decir, los valores de f(x) próximos a 40, resultan tales que $f(x) \in (40 - \xi, 40 + \xi)$.

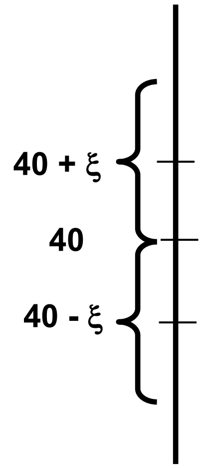


Fig. Nº 3

Si damos un valor de $\xi=0{,}01$, tenemos que $f(x)\in(39{,}99;40{,}01)$ cuando $x\in(5-\delta, 5+\delta)$. Así dado $(\xi>0)$, existe $(\delta>0)$ que garantiza que la distancia de $f(x)$ a 40 sea menor que 0,01. En símbolos:

Dado $(\xi>0)$, $(\exists\,\delta>0)$: $(\forall x\in\Re)$, $\wedge$ $0<|x-5|<\delta<1 \Rightarrow |f(x)-40|<\xi$. Si relacionamos las distancias $d_1=|x-5|$ y $d_2=|f(x)-40|$, obtenemos la relación entre ξ y δ veamos que si: $|f(x)-40|=|7x+5-40| \Rightarrow$ $|f(x)-40|=|7x-35| \Rightarrow |f(x)-40|=7|x-5|<\xi$, si y solo si, (sii), $|x-5|<\frac{\xi}{7}$,

de esta manera $|f(x)-40|\leq\xi$, sii, $|x-5|<\frac{\xi}{7}$.

Definición 1: Se dice que $x_o\in\Re$ es un punto de acumulación (p.a) o punto límite (p.l) de $D\subseteq\Re$, si para cada intervalo abierto I, tal que $x_o\in I$, se tiene que: $(I-\{x_o\})\cap D\neq\phi$. Geométricamente.

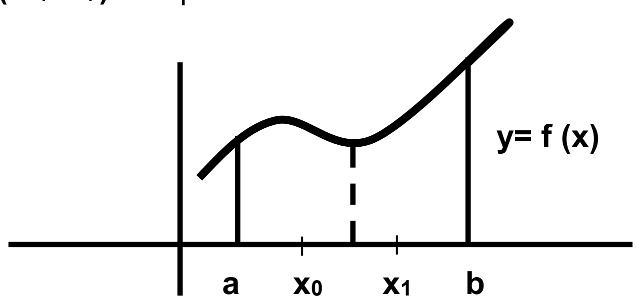


Fig. Nº 4

Por la definición de conjunto vacío, esto quiere decir que si al intervalo abierto le quitamos el punto x_0, debiera existir por lo menos otro punto x_1, que también pertenece a D, si esto es cierto, entonces x_o, es un punto de acumulación de D.

<u>Definición 2</u>: Sea $f: D \to \Re$, con $x_0 \in \Re$, x_0 es un (p.a) de $D \subseteq \Re$, decimos que <u>f posee límite L en x_0</u>, sii, $(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0):(\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta < 1) \Rightarrow |f(x) - L| < \xi$ y se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Geométricamente:

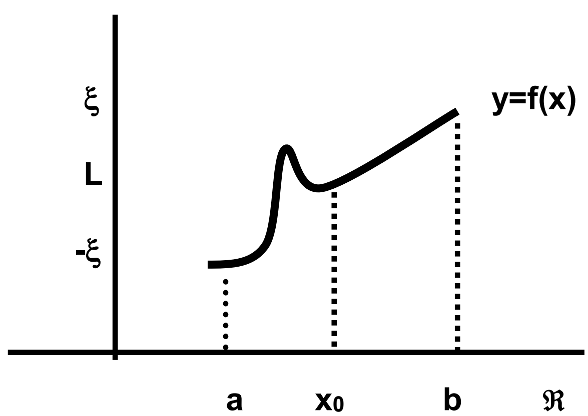


Fig. Nº 5

<u>Ejemplo</u>: Estudiar la función f(x)=3x + 10, en el punto de acumulación x=4, e.i. L=$\lim_{x \to 4}(3x + 10) = 22$

<u>Solución:</u> Hay que hallar una relación entre él δ y ξ, e.i. aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=4$, $f(x)=3x + 10$ y $L=22$, se tiene: $(\forall \xi > 0), (\exists \delta > 0): (\forall x \in D \wedge 0 < |x - 4| < \delta < 1) \Rightarrow |3x + 10 - 22| < \xi$

Como $|3x + 10 - 22| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < \xi$, entonces $3\delta < \xi$ $\Rightarrow \delta < \xi/3$. Si $\xi = 0{,}01 \Rightarrow \delta = 0{,}003$, si $\xi = 0{,}001 \Rightarrow \delta = 0{,}0003$

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que L=$\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 5x - 3) = 4$

<u>Solución:</u> Al igual que en el ejemplo anterior sustituimos en la definición 2 los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=1$, $f(x)=2x^2 + 5x - 3$ y $L=4$, se tiene:

$(\forall \xi>0)(\exists \delta>0):(\forall x \in D \wedge 0<|x - 1|<\delta<1) \rightarrow |2x^2 + 5x - 3 - 4|<\xi$

Como: $|2x^2 + 5x - 7| = |\frac{1}{2}[(2x)^2 + 5(2x) - 14]| \Rightarrow$

$\frac{1}{2}|(2x + 7)(2x - 2)| = \frac{1}{2}|2(2x+7)(x - 1)| \Rightarrow |2x + 7||x - 1|<\xi \Rightarrow |2x + 7|\delta<\xi$

Cómo $|x - 1|<\delta<1 \Rightarrow -1<x - 1<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow 0<2x<4 \Rightarrow 7<2x + 7<11$; cómo 7 es menor que 2x + 7, se puede acotar $|2x - 7|$ por el 7, lo que implica, que $7\delta<\xi \Rightarrow \delta<\xi/7$ si le damos valores a ξ, obtenemos la dependencia del δ.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que L=$\lim\limits_{x \to 3}(\sqrt{2x+3} + 4) = 7$

Solución: Al igual que en los ejemplos anteriores sustituimos en la definición 2 los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=3$, $f(x)=\sqrt{2x+3} + 4$ y $L=7$, se tiene:

$(\forall \xi>0)(\exists \delta>0):(\forall x \in D \wedge 0<|x - 3|<\delta<1) \Rightarrow |(\sqrt{2x+3} + 4 - 7|<\xi$ Tenemos que

$$\left|\sqrt{2x+3} - 3\right| = \left|\sqrt{2x+3} - \sqrt{9}\right| = \left|\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}\right| = \frac{2|x-3|}{\sqrt{2x+3}+3} < \xi \qquad \Rightarrow$$

$\frac{2\phi}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|} < \xi$, Como $|x - 3|<\delta<1 \Rightarrow -1<x - 3<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow 4<2x<8 \Rightarrow$

$7<2x+3<11 \Rightarrow \sqrt{7} < \sqrt{2x+3} < \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{7}+3 < \sqrt{2x+3}+3 < \sqrt{11}+3$,

entonces podemos acotar: $\left|\sqrt{2X+3}+3\right|$ por $\sqrt{11}+3$ ya que este término es mayor que $\sqrt{2x+3}+3$, lo que hace que, $\frac{2\delta}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|} = \frac{2\delta}{\sqrt{11}+3} < \xi \Rightarrow$

$\delta < \frac{(\sqrt{11}+3)\xi}{2}$

<u>Definición 3</u>. Sea f: D → $\Re$ x_0 es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, se dice que <u>f posee límite a la izquierda de x_0</u>, sii $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x_0 - x<\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\xi$, Análogamente se dice que <u>f tiene límite a la derecha de x_0</u>, sii, $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x - x<\delta) \Rightarrow |f(x) - L|<\xi$ y se denota respectivamente como: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

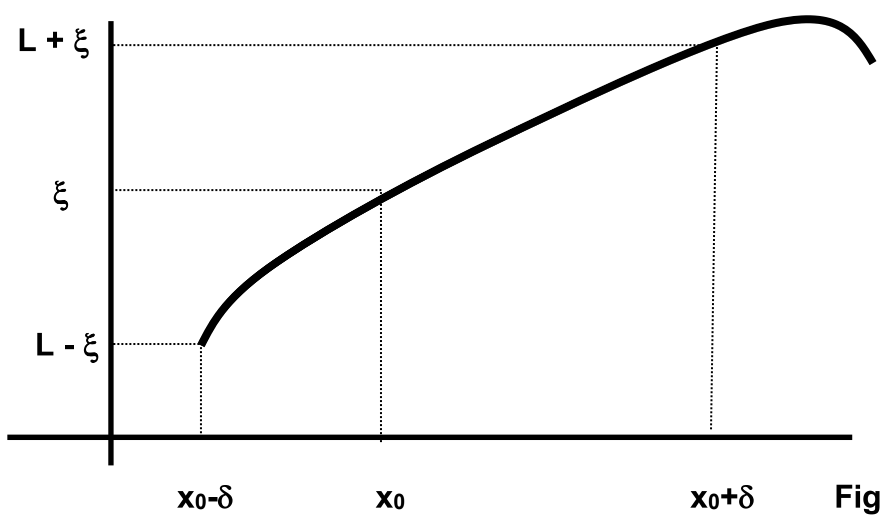


Fig. Nº 6

<u>Teorema 1</u>: (Unicidad del Límite) Si f:D → ℜ, x_0, es (p.a) de D y f tiene límite L_1 y L_2, entonces, $L_1 = L_2$, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$, lo mismo vale para el límite a la izquierda de x_o y para el límite a la derecha de x_o, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ Veremos este teorema con un ejemplo:

<u>Ejemplo:</u>

Sea $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 3 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

<u>Solución:</u> L=$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+1) = 4$ **ya que (∀ξ>0), se tiene entonces que** $|x + 1 - 4|=|x - 3|<\xi$ **cuando** $o<3 - x<\delta$ **y para ello basta tomar** $\delta=\xi$**, Análogamente,** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-1) = 4$**, En efecto:**

$|(x - 1)^2 - 4|=|(x - 1)^2 - 2^2|=|(x - 1 - 2)(x - 1 + 2)|=|(x - 3)(x + 1)|=|x - 3||x + 1|<\xi \Rightarrow \delta\, |x + 1|<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{|x+1|}$**, como** $|x - 3|<1 \Rightarrow -1<x - 3<1 \Rightarrow 3< x+1<5 \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{3}$**, por lo tanto, el L=**$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **existe.**

<u>Ejemplo</u>: $f(x)=\frac{x-3}{|x-3|}$

L=$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$ **y L=**$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ **como los límites laterales son distintos entonces, L=**$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{|x-3|}$ **no existe.**

<u>Definición 4.</u> Sea $f:D \to \Re$, x_0, es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, <u>Diremos que f posee límite infinito en el punto x_0,</u> sii $(\forall M(\xi)>0)$, $(\exists\delta>0)$:

$(\forall x\in D \wedge 0<|x - x_0|<\delta<1) \Rightarrow |f(x)|> M$ y se denota: $L=\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Si en la definición anterior $f(x)<M$, entonces $L=\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

<u>Ejemplo</u>: El $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \infty$, para probar esto debemos observar $M>0$, se haya $(\delta>0)$: $0<|X - 3|<\delta$, entonces $\left|\frac{1}{x-3}\right|>M$ como $\left|\frac{1}{x-3}\right|>M$, si $|x - 3|<\frac{1}{M}$, tomamos $\delta = \frac{1}{M}$, se Concluye que $0<|x - 3|<\frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}\right|>M$.

<u>Ejemplo:</u> $L=\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = \frac{2(3)+3}{3^2+5(3)-24} = \frac{9}{0} = \infty$, es decir, $L=\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ y $L=\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ $=+\infty$, por lo tanto, $L=\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$, no existe.

<u>Definición 5</u>: $(+\infty)$ es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, sii $(\forall n\in z^+)$, $(\exists x\in D)$: $(x\leq n)$, Análogamente $(-,\infty)$, es un (p a) de $D\subseteq\Re$, sii-$(\forall n\in z^+)$, $(\exists x\in D)$: $(x\leq -n)$.

<u>Definición 6:</u> Sea $f:D\to \Re$ y $(-\infty)$ es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, <u>decimos que f posee límite L en $-\infty$</u>, sii, $(\forall\xi>0)$, $(\exists M=M(\xi))$: $(\forall x\in D \wedge x<M) \Rightarrow |f(x) - L|>\xi$. Análogamente, <u>f posee límite L en $-\infty$</u> sii, $(\forall\xi>0)$, $(\exists M=M(\xi))$: $(\forall x\in D \wedge$

x>M) $\Rightarrow$ |f(x) - L|>ξ se denotan respectivamente como : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

<u>Ejemplo</u>: Demostrar que L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1} = 5$

<u>Solución:</u> ($\forall\xi$>0) ($\exists$M=M(ξ)): ($\forall$x$\in$D$\wedge$x>M) $\Rightarrow$ $\left|\frac{5x+5}{x+1} - 5\right| < \xi$ como

$$\left|\frac{5x+3}{x+1} - 5\right| = \left|\frac{5x+3-5x-5}{x+1}\right| = \left|\frac{-2}{x+1}\right| = \left|\frac{2}{x+1}\right| < \xi \text{ si } \frac{2}{x+1} < \xi \Rightarrow x > \frac{2}{\xi} - 1$$

haciendo M(ξ)=$\frac{\xi}{2} - 1$. Se nota que para cada número positivo ξ se puede encontrar un número M=$\frac{\xi}{2} - 1$, tal que x>M, por lo tanto, el número 5 es el Límite de la función f(x)=$\frac{5x+3}{x+1}$ e.i. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1}$=5

<u>Teorema 2:</u> Sea H(x)=$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0}$, Entonces, cuando x → ∞, H(x)=$\frac{\infty}{\infty}$ y

$$L = \lim_{x \to \infty} H(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n<m \\ \infty & \text{si } n>m \end{cases}$$

<u>Demostración:</u> Sea n= m, entonces,

$$L=\lim_{x\to\infty} H(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^n+.....+b_0}$$

Aplicando la propiedad del elemento neutro del producto de los numeros reales 1=$\frac{x^n}{x^n}$ obtenemos:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n\frac{x^n}{x^n}+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n}+.....+\frac{a_0}{x^n}}{bm\frac{x^n}{x^n}+b_{m-1}\frac{x^{n-1}}{x^n}+......+\frac{b_0}{x^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+.....+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+......+\frac{b_0}{x^n}}=\frac{an}{bm}$$

y cuando x → ∞, nos queda: L $\rightarrow\frac{a_n}{b_m}$

Para los casos n<m y n>m, la demostración es similar.

<u>Ejemplo</u>. Hallar el L=$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

<u>Solución:</u> L=$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$ **= (∞ - ∞), como**

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-(x^3-x^2+1)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}\right)}\Rightarrow$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Cómo cumple con las condiciones del teorema 2, buscamos los valores de n y m, n=2 y m=6/3 $\Rightarrow$ m=2, entonces a_n=2 y b_m=1+1+1= 3 $\Rightarrow$ L $\rightarrow$2/3

Ejemplo: Hallar L= $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 3}{\sqrt{2x^8 + 5x - 4}}$

Solución: Como cumple con las condiciones del teorema, buscamos los valores de n y m, n=2 y m=$\frac{8}{2} = 4$, como n<m = > L $\rightarrow$0.

Ejemplo: Hallar L= $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt[3]{x} + 7}$

Solución: Como cumple con las condiciones del teorema buscamos n y m, n=$\frac{1}{2}$, m=$\frac{1}{3}$, como n>m $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ ∞

Propiedades de los Límites:

Sean L_1=$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, L_2=$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ y K$\in\Re$, se tiene que :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} K = K$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} Kf(x) = K\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = KL_1$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^n$ = $(L_1)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \left(L_1\right)^{L_2}$

<u>Ejemplo:</u> Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} 4$, por la propiedad N° 1, L=$\lim\limits_{x \to 2} 4$ =4 $\Rightarrow$ L→ 4

<u>Ejemplo:</u> Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} 3x$, por la propiedad N° 2, se tiene L=3$\lim\limits_{x \to 2} x$ $\Rightarrow$ L→ 6

<u>Ejemplo</u>: Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 5x - 3)$, Por las propiedades 1,2,3 y 4, tenemos: L=2$\lim\limits_{x \to 2} x \lim\limits_{x \to 2} x$ + 5$\lim\limits_{x \to 2} x$ - $\lim\limits_{x \to 2} 3$ $\Rightarrow$ L= 2.2.2. + 5.2.-3 $\Rightarrow$ L= 8+10-3 $\Rightarrow$ L→ 15

<u>Ejemplo</u>: Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x+5}{3x+2} =$

por la propiedad Nº 5, tenemos:

$$L=\lim_{x \to 2} \frac{4x+5}{3x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(4x+5)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x+5)} = \frac{4.2+5}{3.2+5} = \frac{13}{11} \Rightarrow L \to \frac{13}{11}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar L= $\lim\limits_{x \to 2} (3x+5)^{4x-3}$ por las propiedades Nº 6 y 7, tenemos:

$$L=\left[\lim_{x\to 2}(3x+5)\right]^{\left|\lim_{x\to 2}(4x-3)\right|} \Rightarrow L=(3.2+5)^{4.2-3} \Rightarrow L=11^5 \Rightarrow L\to 161.051$$

<u>Definición 7</u>: Si $L=\lim_{x\to x_0}(\sigma(x))$, es decir, $|\alpha(x)|<\xi$ cuando $0<|x-\alpha|<\delta(\xi)$, la función $\alpha(x)$ se llama Infinitesimal (infinitamente pequeña) cuando $x \to x_o$. Análogamente se determina la función infinitesima (Infinitesimalmente pequeña) $\alpha(x)$, cuando $x \to \infty$.

<u>Definición 8</u>: La suma y el producto de un número limitado de infinitésimos, cuando $x \to x_o$, es también un infinitésimo cuando $x \to x_o$, si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimos cuando $x \to x_o$, y $L=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, donde $0<|C|<+\infty$, si $L=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman equivalentes cuando $x \to x_o$; es decir, $\alpha(x) \sim \beta(x)$, por ejemplo, si $x \to 0$, tenemos $Ln(1+x) \sim x$, e.i. $L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, el limite de la razón de dos infinitesimos no se altera, si los téminos de la misma se sustituyen por otros cuyos valores respectivos son equivalentes. De acuerdo con esto, al hallar el $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, donde $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to x_o$, al numerador y al denominador de la fracción pueden restársele (o sumarsele) infinitesimos de orden superior, elegidos de tal forma, que las cantidades resultantes son equivalentes a las anteriores.

De este límite se deduce el siguiente límite:

$L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, Por medio un cambio de variable $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

$\Rightarrow (x\to\infty \Rightarrow t\to 0) \quad \Rightarrow \quad `L=\lim(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad \Rightarrow \; Ln(L)=\lim_{t\to 0} \ln\frac{1+t}{t} \quad \Rightarrow Ln(L)=1$

$\Rightarrow L\to e$

En conclusión: $L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow L\to e$ y $L=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} \Rightarrow L\to e$

<u>Definición 9</u>: Se denomina número e al límite de la variable

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}$, cuando $x \to \infty$ $(n \geq N)$, es decir: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, con $e\in Q'$ y

tiene un valor aproximado a 2,7188281828.

<u>Ejemplo:</u> Hallar $L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}=1^{\infty}$ Solución: Haciendo $\frac{1}{5x}=t \Rightarrow$

$x=\frac{1}{5t}$ cuando $(x\to\infty \Rightarrow t\to 0)$; $L=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{5t}} \Rightarrow L=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}$

<u>Ejemplo</u>: Hallar $L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=1^{\infty} \Rightarrow L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^{x} \Rightarrow$

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$, haciendo $t=\frac{-2}{x+1}\Rightarrow x=-\frac{2}{t}-1$, (cuando $x\to\infty\Rightarrow t\to 0$) $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}-1}\Rightarrow L=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-2}\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}\Rightarrow L\to e^{-2}$$

<u>Definición 10</u>. Se definen los límites indeterminados como aquellos límites que al sustituirle al punto de acumulación toman la forma siguiente: $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^{0}, 0^{∞}, ∞^{0}, ∞^{∞}, $1^{\pm\infty}$ y se le rompe la indeterminación aplicando las herramientas vistas en el precálculo como son propiedades de los números reales, factorización, racionalización, etc.

<u>Ejemplo</u>: Hallar $L=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}$

<u>Solución:</u> por medio del teorema N° 3, tenemos que n=1, m=1, an=1, bm= 1, lo que implica que L→1.

<u>Ejemplo</u>: Hallar $L=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

<u>Soluciòn:</u> Por las propiedades de los números reales se tiene que: $L=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{16}}{x-16}$, **Racionalizando tenemos:** $L=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}\Rightarrow$

$$L=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}\Rightarrow L\to\frac{1}{8}$$

CONTINUIDAD

Una idea intuitiva de continuidad es que la curva que representa la gráfica de una función debe estar sin interrupciones en toda ella. Por el contrario si esta presenta interrupciones o saltos se dice que la función es discontínua y los puntos donde se producen las interrupciones o saltos reciben el nombre de puntos de discontinuidad.

Ilustramos estos dos casos geométricamente:

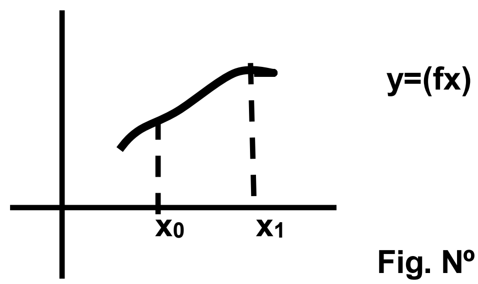


Fig. Nº 7

Esta función es continua en todo el intervalo (x_0, x_1)

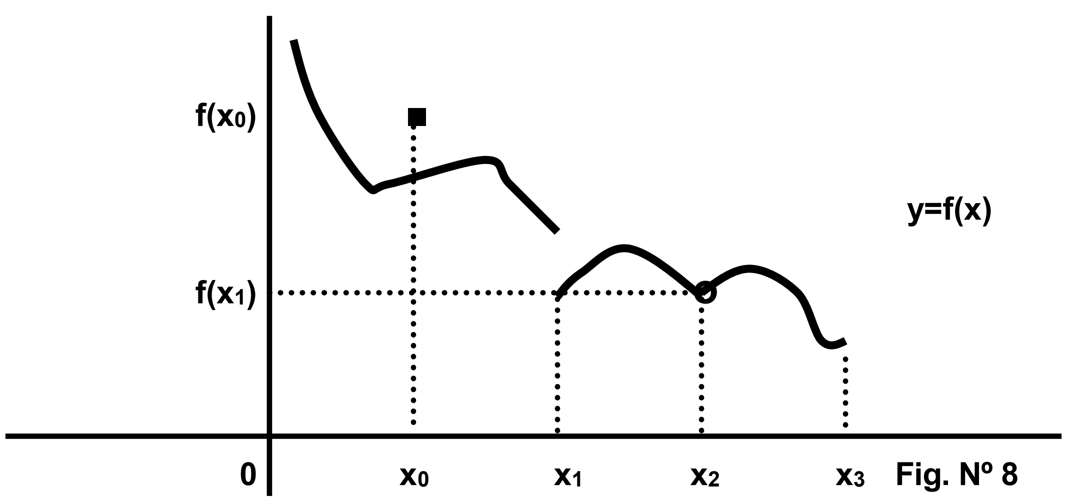


Fig. Nº 8

Supongamos que la gráfica dada en la figura anterior corresponda a una función y=f(x). Esta función representa una función de salto. El $\lim_{x \to x_1} f(x)$, no existe porque no hay un número L para el cual f(x) se encuentre muy próximos a L, cuando x se aproxima suficientemente a x_1.

Podemos observar también en la gráfica que no existe el $\lim_{x \to 0} f(x)$. En x_2. se aprecia que f(x) no esta definida, pero pareciera que el hueco que hay se puede tapar con solo incluir en la grafica el punto (x_2, f(x_2)), de esta manera se romperia la discontinuidad en el punto (x_2, f(x_2)), haciendo que el $\lim_{x \to x_2} f(x) = f(x_2)$. En x_0 el valor de f(x) no resulta apropiado para la continuidad de f(x), el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, pero su valor no es igual a f(x_o).

Conclusión: De todas estas observaciones se desprende que la discontinuidad surge cuando el límite de una función no existe ó si el límite aunque existe no es igual al valor de la función.

<u>Definición 11</u>: Sea f: D $\rightarrow \Re$, $x_0 \in \Re$, la función <u>f es continua en x_0</u> sii $(\forall \xi>0), (\exists \delta>0): (\forall x \in D \wedge 0<|x - x_0|<\delta<1) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|<\xi$

<u>Observación:</u> En la definición anterior vemos que $x_0 \in D$, esto es la función f debe estar definida en x_0, entonces, x_0 es un (p.a) de D, o x_0 es un punto aislado de D, entonces $\exists \delta>0$ tal que x_0 es el único punto

común a D y $|x-x_0|$<δ. Asi que para x= x_0, entonces, $|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0$, para cada ξ>0. Por lo tanto, cualquier punto aislado $x_0 \in D$ es un punto de continuidad de f(x), es decir, f es continua en x_0.

La definición anterior se traduce de la siguiente manera: Una función f es continua en un punto x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Así la función es continua x_0 si cumple con las siguientes condiciones:

1) La función está definida en x_0

2) El $\lim_{x \to x_0} f(x)$= L existe y sea finito

3) El $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definición 12: Si f(x) es una función, f será continua, si es continua en cada uno de sus puntos donde este definida (intervalo, segmento, etc.).

Definición 13: Se dice que una función f(x) no es continua en el punto x_0, sii, este punto no verifica las tres condiciones de continuidad citadas anteriormente.

Ejemplo: f(x)=$\frac{3}{2x-5}$, esta función es discontinua en el punto x=$\frac{5}{2}$, ya que la función no cumple la primera condición de continuidad.

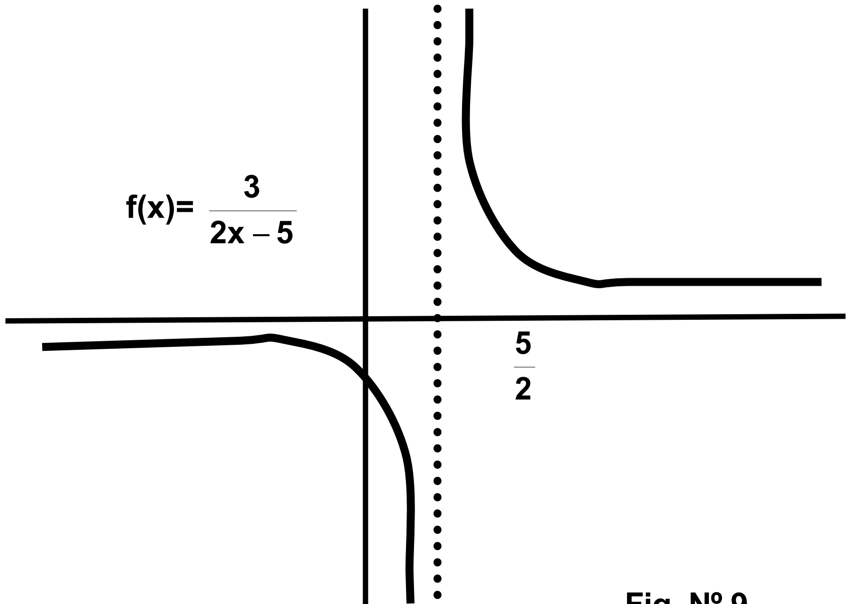
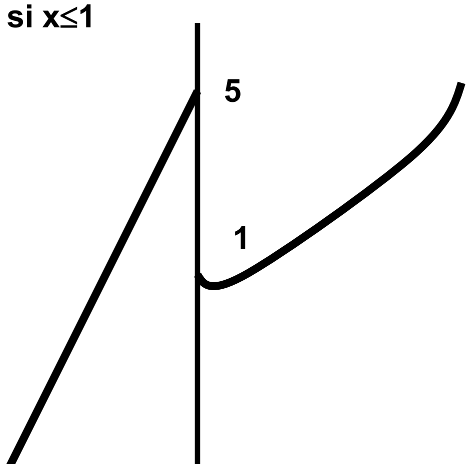


Fig. Nº 9

Definición 14: **Si la función f(x) tiene limites finitos: $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, con $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, entonces, x_0 recibe el nombre discontinuidad de primera especie.**

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$$



$$\frac{5}{2}$$

Fig. Nº 10

Definición 15: Si x_0 no esta definida, pero $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad evitable y la discontinuidad se evita (se redefine), dándole al valor de x0 el valor al cual el limite tiende, es decir, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18}$, esta función no esta definida en x=-3, pero $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{(x-6)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-6} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\dfrac{1}{3}$, por lo tanto, hay una discontinuidad evitable en el punto x=-3 y la función se redefine

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18} & \text{si } x \neq -3 \\ -\dfrac{1}{9} & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

Definición 15: Los puntos de discontinuidad que no son de primera especie se llaman de segunda especie, que son aquellos puntos donde la función no esta definida y los limites laterales no existen.

Ejemplo: $f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}$, en x=2 hay una discontinuidad inevitable de segunda especie, ya que $\lim_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$, es decir, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

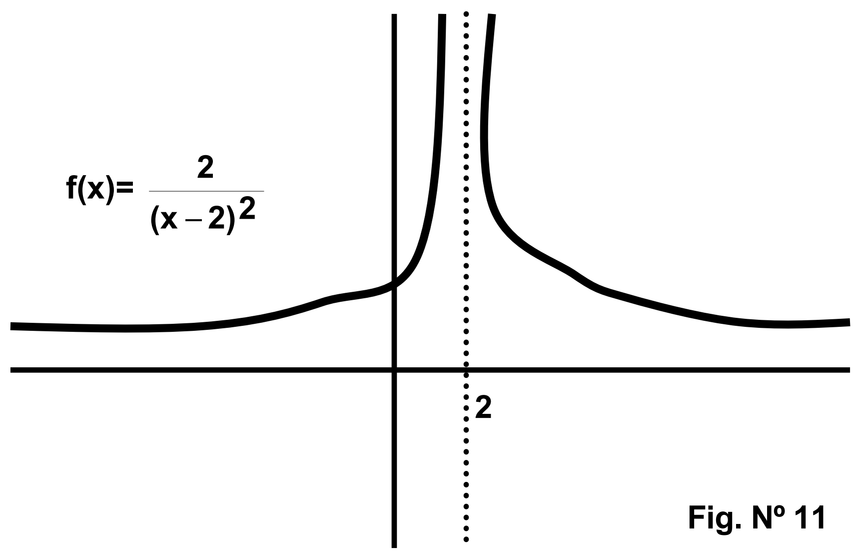


Fig. Nº 11

Propiedades de las funciones continuas

1) La Suma (resta) de dos funciones continuas f y g, en un punto x_0, es otra función continua.

En efecto $L=\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))$ $\Rightarrow$ $L=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)\pm g(x_0)=(f\pm g)x_0$

2) El producto de dos funciones continuas f y g en el punto Xo, es una función continua. En efecto: L=$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)g(x)]$ $\Rightarrow$ L=$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ $\Rightarrow$ f(x).g(x)=(f.g)x_o

3) El cociente de dos funciones continuas en el punto x_o, es otra función continua, excepto en donde x anula al denominador.

$$\text{En efecto, L=}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \text{L=} \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right) x_0$$

4) La función f(x) =K (función constante) es continua en cualquier punto.

5) La función f(x)= x, (función identidad) es continua en cualquier punto.

6) La función polinomica f(x)=$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ es continua en cualquier punto.

Las funciones irracionales f(x) definidas por f(x)=$\sqrt[m]{g(x)}$, donde g(x) es un polinomio, es continua en todos los puntos de su dominio.

7) Un punto de acumulación (aislado), también se considera como una función continua.

Para estudiar la continuidad de cualquier función y=f(x) y realizar su gráfica aproximada, seguiremos los siguientes pasos:

1. Se halla el dominio de la función, es decir, Domf

2. **Se buscan los puntos de discontinuidad si es que los hay.**

3. **Si hay puntos de discontinuidad se estudian el comportamiento cerca de ellos**

4. **Se clasifican los distintos tipos de discontinuidad, es decir, si es evitable (se redefine la función) o inevitable, (de primera o de segunda especie).**

5. **Se estudia la función en sus extremos.**

6. **se hallan los cortes con los ejes de coordenadas, si es posible.**

7. **se realiza la gráfica aproximada.**

<u>Ejemplo:</u> Representar gráficamente las siguientes funciones y localice los puntos de discontinuidad (si los hay) y use la notación de límite para describir el comportamiento de f cerca de estos puntos de discontinuidad.

a. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 3 & \text{si } x>3 \end{cases}$

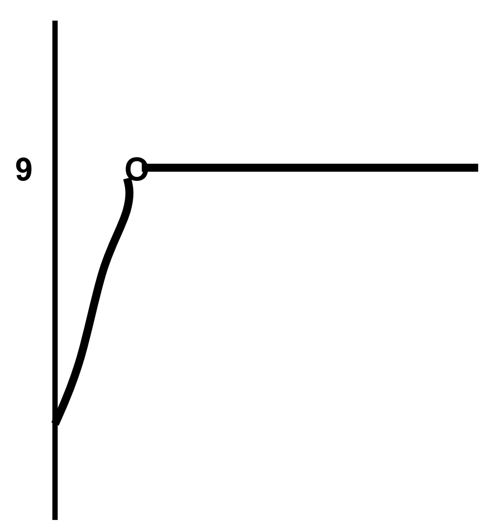


Fig. Nº 12

1. **Domf=$[0,\infty)$**

2. **Puntos de discontinuidad $\{x=3\}$**

3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad:** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=9$ **y** $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=9$

4. **Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=3), no se cumple la tercera condición de discontinuidad, ya que** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=9$ **y f(3)=6.**

b. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

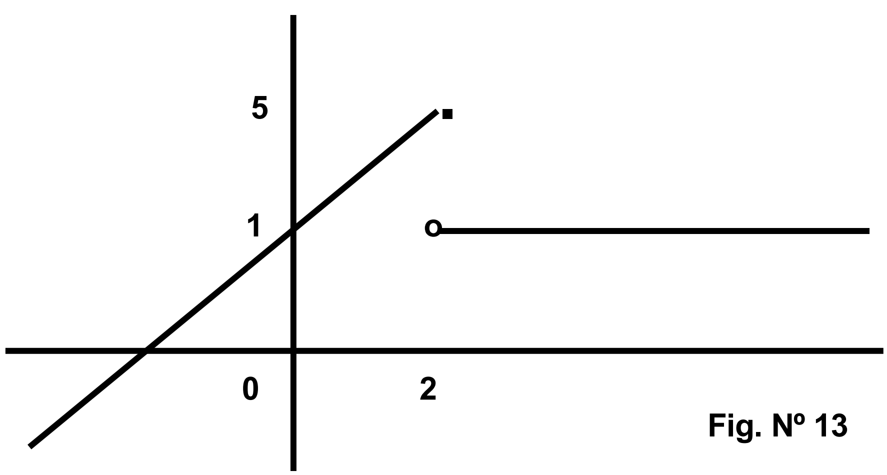


Fig. Nº 13

1. **Domf=$\Re$**

2. Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

4. Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

<u>Ejemplo:</u> Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

a. f(x)= $\dfrac{x^2}{x-2}$

1. Domf=$\Re$ -{2}

2. Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

4. Existe un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

5. Estudio de la función en los extremos: $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto,

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

6. Corte con los ejes de coordenadas: X=0 $\Rightarrow$ Y=0, es decir, (0,0)

7. Su gráfica:

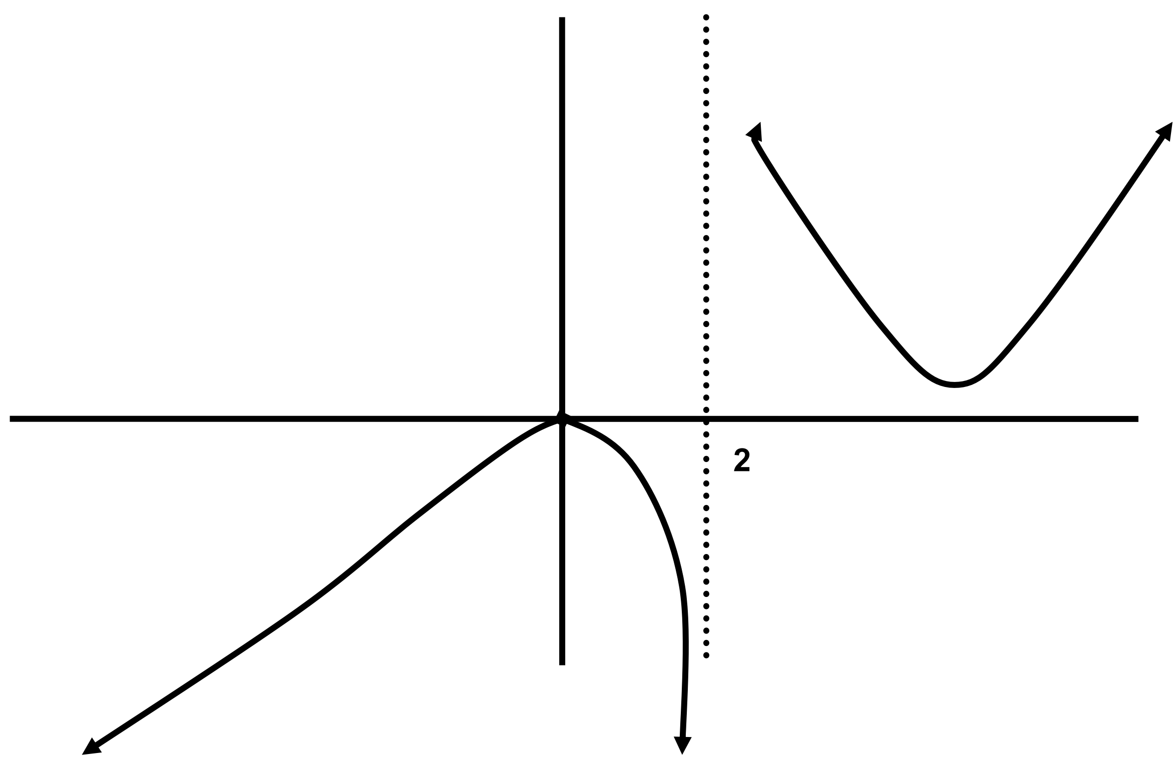


Fig. Nº 14

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$

1. Domf=[-7,∞) – {±2}

2. Puntos de discontinuidad {x=-2 y x=2}

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: a)

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{\sqrt{5}-3}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{-}{+} - \infty \text{ y } \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-}{-} + \infty, \quad \text{b)}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{(x+7)-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 24} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \Rightarrow L \to \frac{1}{24}$$

4. Existe dos puntos de discontinuidad; a) En x=-2 hay un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie b) en el punto (x=2), hay una discontinuidad evitable y como , $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4} = \frac{1}{24}$ la función se redefine de la siguiente manera:

$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{24} & \text{si } x=2 \end{cases}$$

5. Estudio de la función en los extremos: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$, por el teorema Nº 2 tenemos que: n=$\frac{1}{2}$, y m=2, como n>m, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$=0 y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$=0

6. Cortes con los ejes de coordenadas: corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y=$\frac{\sqrt{7}-3}{-4}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$ $\Rightarrow$ (0, $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$) y corte con el eje X (y=0) $\Rightarrow$ $\sqrt{x+7}$ - 3=0 $\Rightarrow$ x + 7=9 $\Rightarrow$ x=2, como x=2 no pertenece al dominio de la función, entonces no existe corte con el eje x.

7. Gráfica:

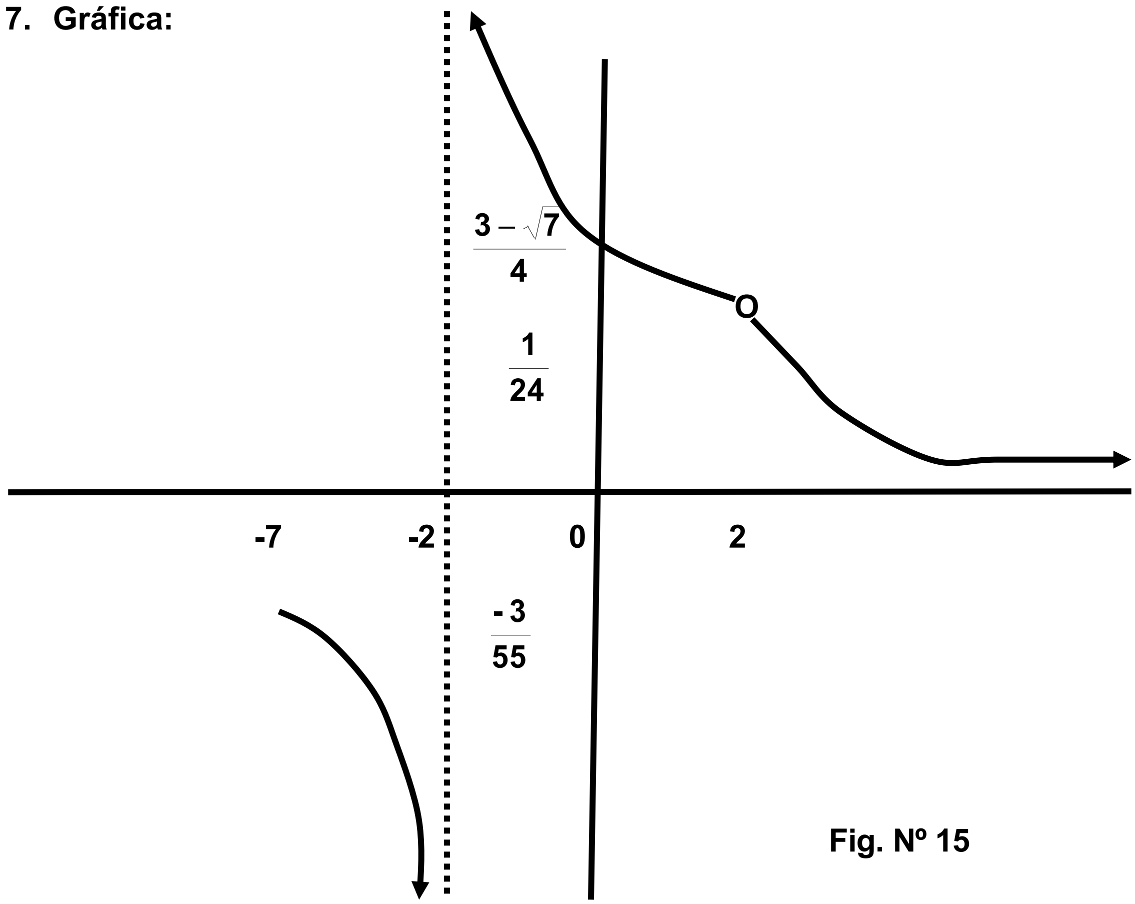


Fig. Nº 15

EJERCICIOS RESUELTOS

LÍMITES

1. Comprobar por medio de la definición de límite que se cumplen:

a. $\lim_{x \to 3}(5x-9)=6$ b. $\lim_{x \to 2}(2x^2+3x-2)=12$ c. $\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x+5}-2)=1$

Solución a: Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=3$, $f(x)=5x-9$ y $L=6$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x-3|<\delta<1) \Rightarrow |5x-9-6|<\xi$, como $|5x-15|=5|x-3| \Rightarrow 5\delta<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{5}$. Si $\xi=0{,}01 \Rightarrow \delta=0{,}002$, si $\xi=0{,}001 \Rightarrow \delta=0{,}0002$

Solución b: Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=2$, $f(x)=2x^2+3x-2$ y $L=12$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x-2|<\delta<1) \Rightarrow |2x^2+3x-2-12|<\xi$, como $|2x^2+3x-14|=|(2x+7)(x-2)|$, por las propiedades de distancia entre dos puntos se tiene que: $|2x+7||(x-2|$ y como $|x-2|<\delta$ se tiene que $\Rightarrow |2x+7|\delta<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{|2x+7|}$ y como $|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 2<2x<6 \Rightarrow 9<2x+7<13$, como a medida que $|2x+7|$ se haga más pequeño el valor de $\frac{\xi}{|2x+7|}$ se hace más grande podemos acotar $|2x+7|$

por el valor de 9, entonces $\delta<\frac{\xi}{9}$, dándole valores arbitrarios a ξ se obtienen valores de δ.

<u>Solución c:</u> Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=2$, $f(x)=\sqrt{2x+5}-2$ y $L=1$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x-2|<\delta<1) \Rightarrow |\sqrt{2x+5}-2-1|<\xi)$, por la racionalización de $\sqrt{2x+5}-3=\frac{2x+5-9}{\sqrt{2x+7}+3}$ y por las propiedades de distancia entre dos puntos se tiene que: $\left|\frac{2x-4}{\sqrt{2x+7}+3}\right|=\frac{2|x-2|}{|\sqrt{2x+7}+3|}<\xi$ y como $|x-2|<\delta$ se tiene que $\Rightarrow \frac{2\delta}{|\sqrt{2x+7}+3|}<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi|\sqrt{2x+7}+3|}{2}$ y como $|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 2<2x<6 \Rightarrow 7<2x+5<11 \Rightarrow$ $\sqrt{7}<\sqrt{2x+5}<\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{7}+3<\sqrt{2x+5}+3<\sqrt{11}+3$, como a medida que $\sqrt{2x+5}+3$ se haga más grande el valor de $\frac{\xi|\sqrt{2x+7}+3|}{2}$ se hace más grande podemos acotar $|\sqrt{2x+7}+3|$ por el valor de $\sqrt{11}+3$, entonces $\delta<\frac{\xi(\sqrt{11}+3)}{2}$, dándole valores arbitrarios a ξ se obtienen valores de δ.

2. Aplicando las propiedades de límite y de los números reales, hallar los siguientes límites:

a. $L=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{2x^2+5x-3}$ b. $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}}{3x^2-4x-4}$

c. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$ d. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ e. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{\sqrt{x^2+1}+5}$

f. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{9x-3}}{\sqrt{3x+\sqrt{2x+3}}}$ g. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{x^3+5\sqrt{2x-3}}}$ h. $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

<u>Solución a:</u> $L=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{2x^2+5x-3}$, Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=-3$ en el límite, e.i. $L=\dfrac{9-9}{18-15-3}=\dfrac{0}{0}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla factorizando tanto el numerador como el denominador e.i. $x^2-9=(x-3)(x+3)$ y $2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$ se tiene que $L=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{2x-1}\Rightarrow\quad L\to\dfrac{6}{7}$

<u>Solución b:</u> $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}}{3x^2-4x-4}$, Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=2$ en el límite, e.i. $L=\dfrac{\sqrt{8-8+10-10}-\sqrt{2^2-4}}{12-8-4}=\dfrac{0}{0}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, racionalizando el numerador aplicando $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e.i.:

$$\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4} = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 10 - x^2 - 4}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} + \sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x^2 - x + 3)}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} + \sqrt{x^2 - 4}}$$ y factorizando el denominador $3x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(3x - 2)$ se tiene que:

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x^2 - x + 3)}{(x+2)(3x-2)\left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4}\right)} \Rightarrow$$

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - x + 3)}{(3x-2)\left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4}\right)}$$, Sustituyendo otra vez el punto de acumulación se tiene que: $L = \frac{4 - 2 + 3}{4(0)} \Rightarrow L \to \infty$

<u>Solución c:</u> $L = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$, Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=2$ en el límite, e.i. $L = \left(1 - \frac{5}{\infty}\right)^{\infty} \Rightarrow L \to 1^{\infty}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, haciendo el cambio de variable $t = -\frac{5}{x} \Rightarrow x = -\frac{5}{t}$; cuando $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$ y L se transforma en

$L=\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{-\frac{5}{t}}$; aplicando las propiedades de los números reales se tiene que $L=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-5}$, como $\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$=e, se tiene que $L\to e^{-5}$

<u>Solución d:</u> $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; Sustituiremos el punto de acumulación x_0=0 en el límite, e.i. $L=\frac{1}{0}\ln\sqrt{1}\ \Rightarrow\ L=0_x\infty$, cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que: $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)$, aplicando las propiedades de los números reales se tiene que: $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1+x+x-x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)\ \Rightarrow$

$L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)$, haciendo el cambio de variable $t=\frac{2x}{1-x}\ \Rightarrow$

cuando $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ y el limite se transforma en: I=ln$\lim\limits_{x \to 0}\left((1+t)^{\frac{t}{t+2}} \right)^{\frac{1}{2}}$,

sustituyendo otra vez el punto de acumulación se tiene que $L=\left(1^0\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L \to 1$

<u>Solución e:</u> $L=\lim\limits_{x \to \infty}\frac{3x^2+5x-7}{\sqrt{x^2+1}+5}$; Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=\infty$ en el límite, e.i. $L=\frac{\infty^2+5\infty-7}{\sqrt{\infty^2+1}+5} \Rightarrow L \to \frac{\infty}{\infty}$; aplicando el teorema 2, se tiene que m=2, n=1, como m>n, se tiene que $L \to \infty$

<u>Solución f:</u> $L=\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{9x-3}}{\sqrt{3x+\sqrt{2x+3}}}$; Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=\infty$ en el límite, e.i. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\sqrt{4\infty+5}-\sqrt{9\infty-3}}{\sqrt{3\infty+\sqrt{2\infty+3}}}$; $\Rightarrow L \to \frac{\infty}{\infty}$;

aplicando el teorema 2, se tiene que m=$\frac{1}{2}$, n=$\frac{1}{2}$, como m=n, se buaca el valor de $\frac{a_m}{b_n}$, donde $a_m=2-3 \Rightarrow a_m=-1$ y $b_n=3$; se tiene que $L \to -\frac{1}{3}$

<u>Solución g:</u> L$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{x^3+5\sqrt{2x-3}}}$; Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=\infty$ en el límite, e.i. L$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5\infty-2}}{\sqrt{\infty^3+5\sqrt{2\infty-3}}}$; $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando el teorema 2, se tiene que m=$\dfrac{1}{2}$, n=$\dfrac{3}{2}$, como m<n; se tiene que L $\rightarrow$ 0

<u>Solución h:</u> L=$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$; Sustituiremos el punto de acumulación x_0=2 en el límite, e.i. L=$\left(\dfrac{1}{2-2}-\dfrac{3}{4-4}\right)$ $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ ∞ - ∞; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, resolviendo la resta de fracciones se tiene que L=$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2-4}{x^2-4}\right)$; factorizando en el denominador se tiene que L= $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow L=\dfrac{1}{4}$

CONTINUIDAD

1. **Realizar la siguiente gráfica y estudiar la función en los puntos de discontinuidad, si los hay**

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\le x<0 \\ 3 & \text{si } 0\le x<1 \\ -2x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Solución: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\le x<0 \\ 3 & \text{si } 0\le x<1 \\ -2x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

La función $2x + 1$ es una recta que está definida en el intervalo $(-\infty, -2)$; la función $x^2 - 1$ es una parábola paralela al eje de las x definida en el intervalo $[-2, 0)$, la función 3 es una recta paralela al eje de las x definida en el intervalo $[0, 1)$ y la función $-2x$ es una recta paralela al eje de las x definida en el intervalo $[1, \infty)$, luego su gráfica será:

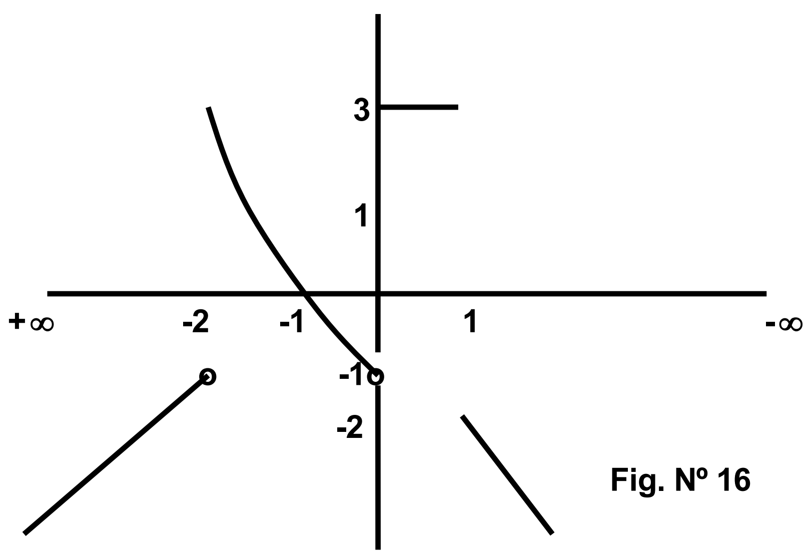


Fig. Nº 16

Veamos si se cumple las condiciones de las funciones continuas:

1. **El dominio de la función es todo $\Re$, e.i. se cumple la primera condición**
2. **Existen 3 puntos de discontinuidad en: { x=-2, x=0 y x=1}**
3. **Estudio cerca de los puntos de discontinuidad**

Para x=-2:

$$\lim_{x \to 2^-}(2x-1) = -1 \ \text{ y } \lim_{x \to 2^+}\left(x^2-1\right) = 3, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \to 2} f(x) \text{ no existe}$$

Para x=0:

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x^2-1\right) = -1 \ \text{ y } \lim_{x \to 0^+} 3 = 3, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe}$$

Para x=-2:

$$\lim_{x \to 1^-}(2x-1) = 3 \ \text{ y } \lim_{x \to 1^+}(2x-1) = -2, \text{por lo tanto, } \lim_{x \to 1}(2x-1) \text{ no existe}$$

Conclusión existen tres puntos de discontinuidad inevitables de primera especie en los puntos antes mencionados

2. **Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de qué tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función y realice la gráfica aproximada.**

a. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-1}$ b. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+3x-10}$ c. $f(x) = \dfrac{x^2-5x-24}{2x^2+5x-3}$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}-4}{x^2-9}$

<u>Solución a:</u> $f(x)=\frac{2x+3}{5x-1}$, Seguiremos los paso para la gráfica aproximada de una función:

1. Se halla el dominio de la función, e.i. Domf=$\Re$ - {$\frac{1}{5}$}

2. Puntos de discontinuidad {x=$\frac{1}{5}$}

3. Estudio de la función en x=$\frac{1}{5}$, L=$\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}}\frac{2x+3}{5x-1}$, sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{\frac{2}{5}-3}{0} \Rightarrow$ L $\to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, $L_1=\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}^-}\frac{2x+3}{5x-1} \Rightarrow L_1 \to -\infty$; e.i. la función decrece indefinidamente, $L_2=\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}^+}\frac{2x+3}{5x-1} \Rightarrow L_2 \to +\infty$, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x= no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

4. Estudio de la función en los extremos e.i. L=$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x+3}{5x-1}$, por el teorema 2, como m=1 y n=1 $\Rightarrow$ m=n $\Rightarrow$ L $\to \frac{2}{5}$, e.i. existe una asíntota horizontal en x=$\frac{2}{5}$

5. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y=-3, corte con el eje x (y=0) $\Rightarrow$ x=-$\frac{3}{2}$

6. Gráfica

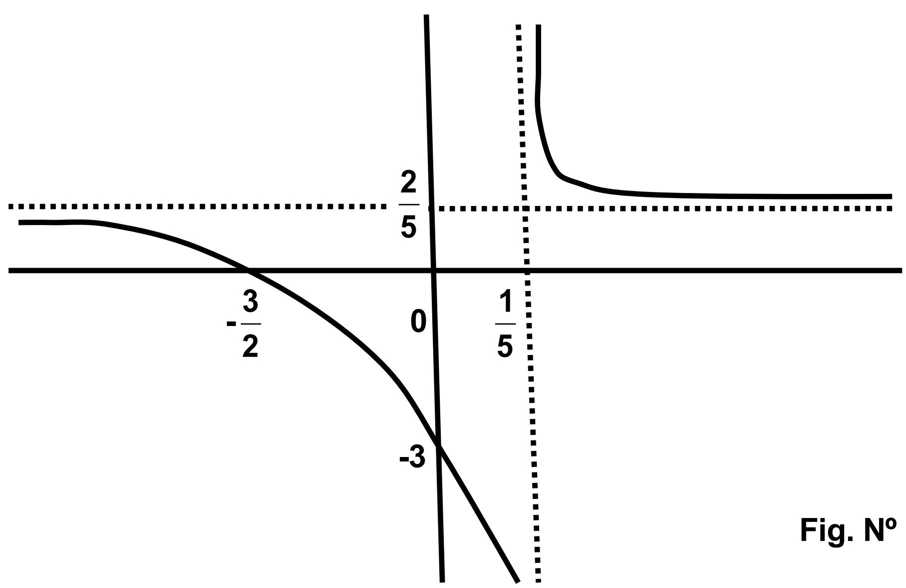


Fig. Nº 17

<u>Solución b:</u> $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x-10}$, Seguiremos los paso para la gráfica aproximada de una función:

1. Se halla el dominio de la función, para eso factorizaremos el denominador e.i. $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) \Rightarrow$ Domf=$\Re$ - {-5, 2}

2. Puntos de discontinuidad {x=-5, x=2}

3. Estudio de la función en x=-5, L=$\lim\limits_{x \to -5} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L → $\frac{2}{0}$ ⇒ L → ±∞, buscamos los límites laterales, L1=$\lim\limits_{x \to -5^-} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ ⇒ L1 → -∞; e.i. la función decrece indefinidamente, L2=$\lim\limits_{x \to -5^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ ⇒ L2 → +∞, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x=-5 no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

   Estudio de la función en x=2, L=$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L → $\frac{5}{0}$ ⇒ L → ±∞, buscamos los límites laterales, L1=$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ ⇒ L1 → -∞; e.i. la función decrece indefinidamente, L2=$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ ⇒ L2 → +∞, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x=-5 no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

4. Estudio de la función en los extremos e.i. L= $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$, por el teorema 2, como m=1 y n=2 $\Rightarrow$ m<n $\Rightarrow$ L $\to$ 0, e.i. existe una asíntota horizontal en x=0

5. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y=-$\frac{3}{10}$, corte con el eje x (y=0) $\Rightarrow$ x=-3

6. Gráfica

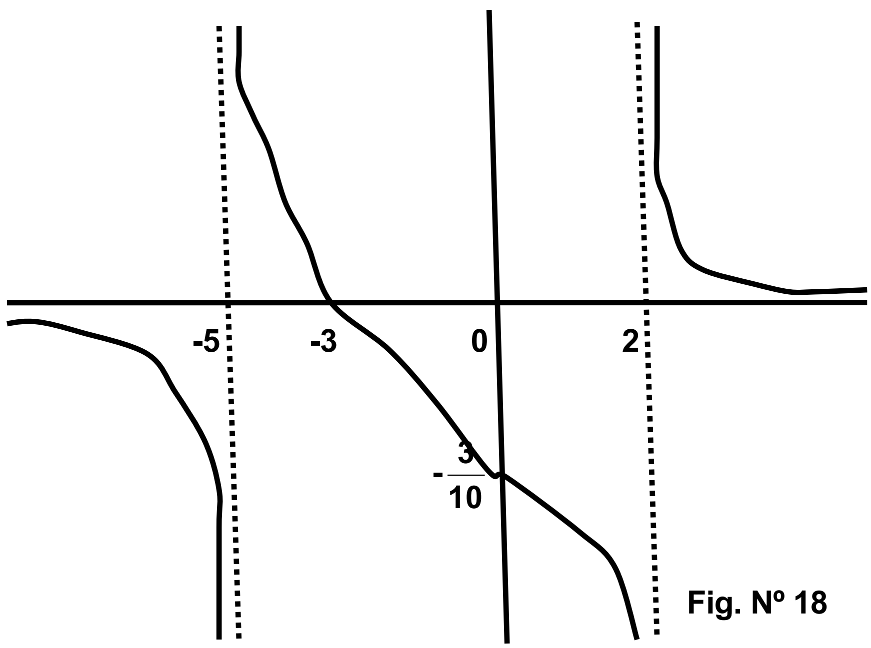


Fig. Nº 18

<u>Solución c:</u> $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 5x - 3}$,

1. Se halla el dominio de la función, factorizando el denominador e.i. $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1) \Rightarrow$ Domf=$\Re$ - $\{-3, \frac{1}{2}\}$

2. Puntos de discontinuidad $\{x=-3, x=\frac{1}{2}\}$

3. Estudio de la función en x=-3, L=$\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 5x - 24}{(x+3)(2x-1)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{0}{0}$, factorizando el mumerador e.i. $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8)$, simplificando y sustituyendo otra vez el punto de acumulación se obtiene buscamos los límites laterales, $L_1 = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x - 8}{2x - 1} \Rightarrow L_1 \to \frac{11}{7}$; e.i. en el punto x=-3, existe una discontinuidad evitable y la función se redefine como:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x \neq -3 \\ \\ \dfrac{11}{7} & \text{si } x=-3 \end{cases}$$

Estudio de la función en x=$\frac{1}{2}$, L=$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \dfrac{\frac{1}{2} - 8}{0} \Rightarrow L \to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, $L_1 = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)} \Rightarrow L_1 \to +\infty$; e.i. la función crece indefinidamente, $L_2 = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)} \Rightarrow L_2 \to -\infty$, e.i. la función decrece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en $x=\frac{1}{2}$ no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

4. Estudio de la función en los extremos e.i. $L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)}$, por el teorema 2, como m=2 y n=2 $\Rightarrow$ m=n $\Rightarrow L \to \frac{1}{2}$, e.i. existe una asíntota horizontal en $x=\frac{1}{2}$

5. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y=8, corte con el eje x (y=0) $\Rightarrow$ x=8

6. Gráfica

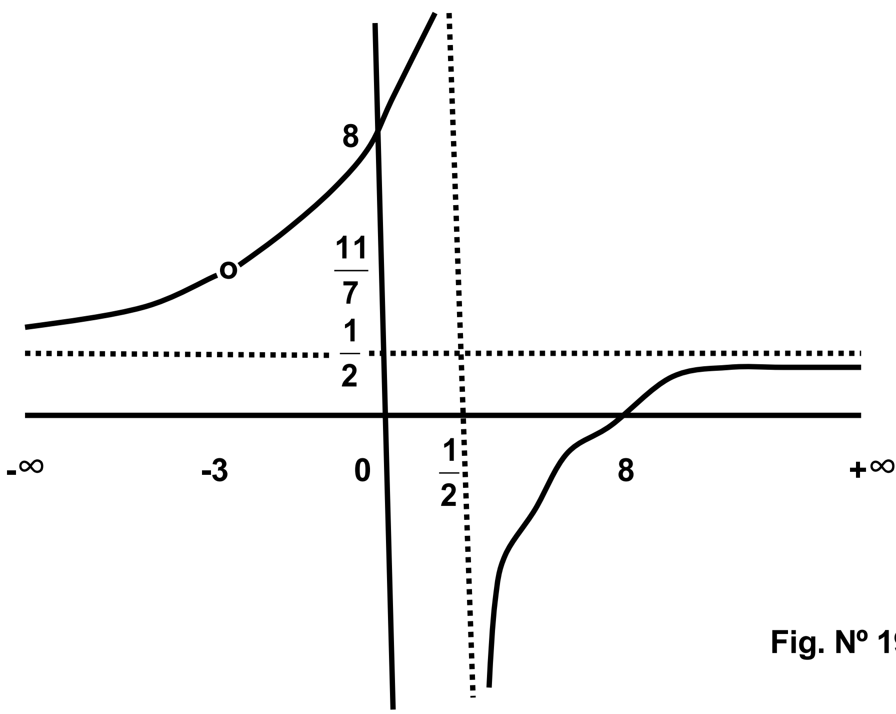


Fig. Nº 19

EJERCICIOS PROPUESTOS

LÍMITES

1. Comprobar por medio de la definición de límite que se cumplen:

a. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-5} = \frac{-1}{2}$ b. $\lim_{x \to 3}(3x-9) = 0$ c. $\lim_{x \to 2} 3x^2 = 12$ d. $\lim_{x \to 1}\sqrt{x+3} = 2$

e. $\lim_{x \to 2}(x^2+5x+2) = 16$ f. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$ g. $\lim_{x \to 2} \frac{7}{x-5} = -\frac{7}{3}$ h. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{4x+3} = \frac{1}{2}$

i. $\lim_{x \to -4} \frac{8}{x-2} = -\frac{4}{3}$ j. $\lim_{x \to 3}(2x^2+15x-63) = 16$ k. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ l. $\lim_{x \to -1} \frac{8}{x+9}$

m. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5}{x-1} = \infty$ n. $\lim_{x \to 0}\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = 1$ o. $\lim_{x \to \infty} \frac{x-3}{x^2-1} = 0$ p. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{3x+2} = \frac{2}{3}$

q. $\lim_{x \to 2}(\sqrt{4x-5}-\sqrt{3}) = 0$ r. $\lim_{x \to 2} \frac{4x}{5x-2} = 1$ s. $\lim_{x \to 3}\left(\frac{4}{x-2}+\frac{5}{x+2}\right)$ t. $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$

u. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{9x+2} = \frac{1}{3}$ v. $\lim_{x \to \infty} \frac{4x-5}{3x^2+4} = 0$ w. $\lim_{x \to 4}\sqrt{4x+9} = 5$ x. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+5}{x+7} = \infty$

y. $\lim_{x \to a}(\sqrt{x^2}-a) = 0$ z. $\lim_{x \to 0}(ax^2+ax+a^2) = 3a^2$

2. Aplicando las propiedades de límite y de los números reales, hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5+1}$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$ e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ h) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - (\pi + 1)x + \pi}{x^3 - \pi^3}$ i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{4 + x}{6 - x}\right]^x$ m) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right]^{x+1}$ n) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \dfrac{1}{x})^x$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lg(1 + 10x)}{x}$ p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

CONTINUIDAD

3. Realizar las siguientes gráficas aproximadas y estudiar la función en los puntos de discontinuidad, si los hay

a. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\le x<0 \\ 3 & \text{si } 0\le x<1 \\ -2x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ b. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x<4 \\ x^2 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ c. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x<3 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x<2 \\ 3 & \text{si } 2\le x<4 \\ 5 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ e. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x>4 \end{cases}$ f. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } \ge 1 \end{cases}$

g. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ x+1 & \text{si } 2<x\le 5 \\ 6 & \text{si } 5<x<7 \end{cases}$ h. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } 4<x\le 5 \\ 1-x & \text{si } x>5 \end{cases}$ i. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

j. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 5 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ x-1 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ k. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ l. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2 & \text{si } 1<x<3 \\ 5 & \text{si } 3\le x<5 \end{cases}$

m. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 9 & \text{si } x>3 \end{cases}$ n. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ o. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

p. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$ q. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ r. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

$$s.\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x<4 \end{cases} \quad t.\ f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ Lnx & \text{si } x>0 \end{cases} \quad u.\ f(x)=\begin{cases} lg_3x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } 0<x<4 \\ 2x-3 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

$$v.\ f(x)=\begin{cases} |x-3| & \text{si } x<-2 \\ e^{2x+1} & \text{si } -2\le x\le 0 \\ \dfrac{3}{x-2} & \text{si } 0<x<2 \end{cases} \quad w.\ f(x)=\begin{cases} 2.400 & \text{si } 0\le x\le 40 \\ 80x-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } 40<x<80 \\ 40x & \text{si } x\ge 80 \end{cases}$$

$$x.\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ 5 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ x-1 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases} \quad y.\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0\le x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } 2\le x<4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$$

4. Una función está dada por la fórmula:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{cuando } x\neq 2 \\ A & \text{cuando } x=2 \end{cases}$$

¿Cómo debe elegirse el valor de la función A=f(2) para que la función f(x), completada de esta forma, sea continua cuando x=2?. Construir la gráfica de f(x).

5. Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

b. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ b. $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ c. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

e. $f(x)=\dfrac{x^2+x-x}{x+2}$ f. $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+x^2-12x+4}{x^3-6x^2+11x-6}$ g. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

h. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x-3}$ i. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{3x-5}$ j. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ k. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x}$

l. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ m. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ n. $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$ o. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

p. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3}$ q. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$ r. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ s. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

t. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ u. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$ v. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x}$ w. $f(x)=1-\dfrac{2}{x^3}$

x. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ y. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x-3}$ z. $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$

CAPÍTULO III

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

DE UNA VARIABLE REAL

Este capítulo se estudiaran: Punto de Acumulación, Límites, Límites Laterales, Límites Infinitos, Límites en el Infinito, Propiedades de los Límites, infinitesimales, Límites Indeterminados de la Forma: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty.0$ $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞, $1^{\pm\infty}$, **Límites Logarítmicos, Límites Exponenciales, Continuidad, Puntos de Discontinuidad, Asuntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas, Gráfica aproximada de las funciones por medio de los límites.**

LÍMITES

Expresaremos dando unos ejemplos de límite para introducirnos en este campo:

Ejemplo: Sea f(x)=4x - 3; ¿hacia que punto se aproximan los valores de esta recta cuando x se aproxima al punto x=5?.

x	4.9	4.99	4.992	5.001	5.01	5.1
f(x)	16.6	16.96	16.968	17.004	17.04	17.4

Cuadro Nº 1

Cuando x se aproxima a 5, observamos que: 4x - 3 se aproxima al 17.

Se dice que el límite de f(x)=4x - 3, cuando x se aproxima a 5 es 17 y se escribe: $\lim_{x \to 5}(4x - 3) = 17$

Geométricamente lo veremos en clase.

Ejemplo: Sea $f(x)=\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ ¿a que valor se aproxima f(x) cuando x se acerca a 5?

X	4.9	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
f(x)	9.9	9.99	9.995	10.001	10.01	10.1

Cuadro Nº 2

Cuando x se aproxima a 5, se observa que $f(x)=\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, se aproxima a 10.

Vemos que esta función se comporta de manera semejante a la función f(x)=x + 5, para valores distintos de 5, por lo tanto, es lo mismo escribir:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} \Rightarrow L = \lim_{x \to 5}(x+5), \Rightarrow L \to 10$$

Nótese que: $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5$

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x) = \frac{x+5}{|x+5|}$. Estudiemos el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima al -5.

x	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1
f(x)	-1	-1	-1	1	1	1

Cuadro Nº 3

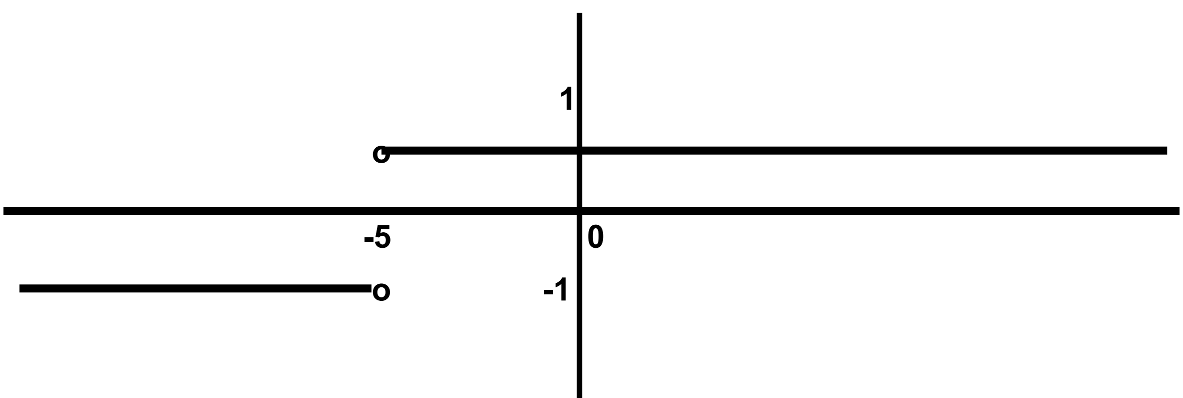


Fig. Nº 1

Como podemos observar, cuando x<-5, f(x) se aproxima a –1 y cuando x>-5, f(x) se aproxima a 1, de esta manera no podemos asegurar hacia qué número real se aproxima f(x), cuando x tiende a -

5, es decir, que no existe $L \in \Re$ tal que: $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x+5}{|x+5|}$ =L, Luego el límite de la función $f(x) = \frac{x+5}{|x+5|}$, cuando x se aproxima a -5, no existe.

Supongamos que el dominio de una función f(x) contiene intervalos (x_0,x_1) y (x_1, x_2), si al aproximarse x hacia x_1, tanto como sea posible, f(x) tiende a un número L, entonces, L será el límite de f(x) cuando x tiende a x_1 , lo cual se escribe como: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = L$

<u>Ejemplo:</u> L=$\lim\limits_{x \to 5}(7x+5) = 40$

Esto significa que la expresión 7x + 5 se aproxima al valor 40, cuando x se aproxima a 5, por la izquierda y por la derecha, esto lo pueden ustedes observar en los tres ejemplos anteriores, es conveniente que estos valores estén en un entorno de x_1= 5 de radio δ, es decir, que los valores de x que tienden a 5, sean tales que $x \in (5 - \delta, 5 + \delta)$ y $0<\delta<1$.

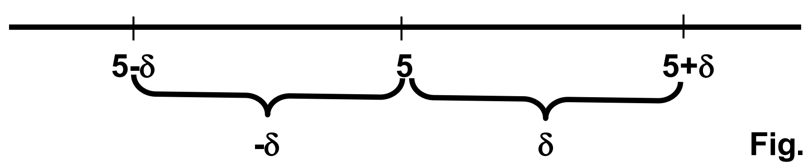


Fig. Nº 2

Existe una dependencia de f(x) respecto a x que hace que f(x) se encuentre en un entorno de L=40 de radio ξ, es decir, los valores de f(x) próximos a 40, resultan tales que $f(x) \in (40 - \xi, 40 + \xi)$.

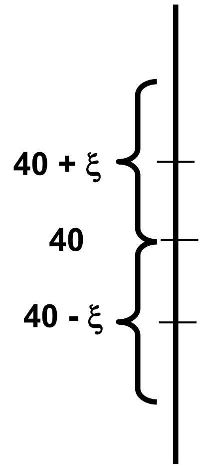


Fig. Nº 3

Si damos un valor de $\xi=0{,}01$, tenemos que $f(x)\in(39{,}99;40{,}01)$ cuando $x\in(5-\delta, 5+\delta)$. Así dado $(\xi>0)$, existe $(\delta>0)$ que garantiza que la distancia de $f(x)$ a 40 sea menor que 0,01. En símbolos:

Dado $(\xi>0)$, $(\exists\,\delta>0)$: $(\forall x\in\Re)$, $\wedge$ $0<|x-5|<\delta<1 \Rightarrow |f(x)-40|<\xi$. Si relacionamos las distancias $d_1=|x-5|$ y $d_2=|f(x)-40|$, obtenemos la relación entre ξ y δ veamos que si: $|f(x)-40|=|7x+5-40| \Rightarrow |f(x)-40|=|7x-35| \Rightarrow |f(x)-40|=7|x-5|<\xi$, si y solo si, (sii), $|x-5|<\frac{\xi}{7}$, de esta manera $|f(x)-40|\leq\xi$, sii, $|x-5|<\frac{\xi}{7}$.

<u>Definición 1</u>: Se dice que $x_o\in\Re$ es un <u>punto de acumulación (p.a)</u> o <u>punto límite (p.l)</u> de $D\subseteq\Re$, si para cada intervalo abierto I, tal que $x_o\in I$, se tiene que: $(I-\{x_o\})\cap D\neq\phi$. Geométricamente.

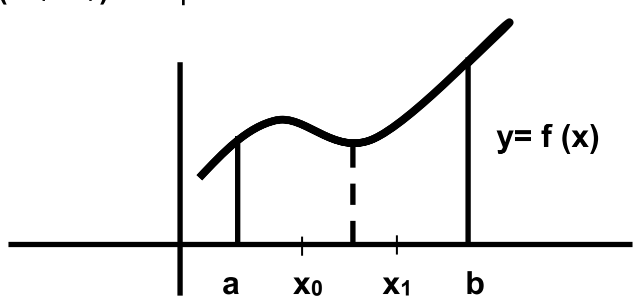


Fig. Nº 4

Por la definición de conjunto vacío, esto quiere decir que si al intervalo abierto le quitamos el punto x_0, debiera existir por lo menos otro punto x_1, que también pertenece a D, si esto es cierto, entonces x_o, es un punto de acumulación de D.

Definición 2: Sea $f: D \rightarrow \Re$, con $x_0 \in \Re$, x_0 es un (p.a) de $D \subseteq \Re$, decimos que f posee límite L en x_0, sii, $(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0):(\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta < 1) \Rightarrow |f(x) - L| < \xi$ y se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Geométricamente:

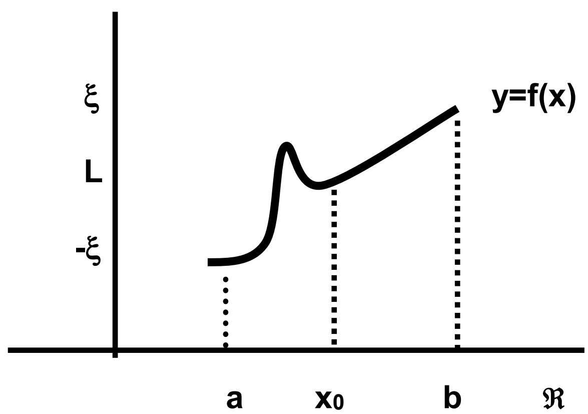


Fig. Nº 5

Ejemplo: Estudiar la función f(x)=3x + 10, en el punto de acumulación x=4, e.i. L=$\lim_{x \to 4} (3x + 10) = 22$

Solución: Hay que hallar una relación entre él δ y ξ, e.i. aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=4$, $f(x)=3x + 10$ y $L=22$, se tiene: $(\forall \xi > 0)$, $(\exists \delta > 0)$: $(\forall x \in D \wedge 0 < |x - 4| < \delta < 1) \Rightarrow |3x + 10 - 22| < \xi$

Como $|3x + 10 - 22|= |3x - 12|= |3(x - 4)|= 3|x - 4|<\xi$, entonces $3\delta<\xi$ $\Rightarrow \delta<\xi/3$. Si $\xi=0{,}01 \Rightarrow \delta=0{,}003$, si $\xi=0{,}001 \Rightarrow \delta= 0{,}0003$

Ejemplo: Comprobar que L=$\lim_{x \to 1}(2x^2 + 5x - 3) = 4$

Solución: Al igual que en el ejemplo anterior sustituimos en la definición 2 los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=1$, $f(x)=2x^2 + 5x -3$ y $L=4$, se tiene: $(\forall\xi>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in D \wedge 0<|x - 1|<\delta<1) \rightarrow |2x^2 + 5x - 3 - 4|<\xi$

Como: $|2x^2 + 5x - 7|=|\frac{1}{2}[(2x)^2 + 5(2x) - 14]| \Rightarrow$

$\frac{1}{2}|(2x + 7)(2x - 2)|=\frac{1}{2}|2(2x+7)(x - 1)| \Rightarrow |2x + 7||x - 1|<\xi \Rightarrow |2x + 7|\delta<\xi$

Cómo $|x - 1|<\delta<1 \Rightarrow -1<x - 1<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow 0<2x<4 \Rightarrow 7<2x + 7<11$; cómo 7 es menor que 2x + 7, se puede acotar $|2x - 7|$ por el 7, lo que implica, que $7\delta<\xi \Rightarrow \delta<\xi/7$ si le damos valores a ξ, obtenemos la dependencia del δ.

Ejemplo: Comprobar que L=$\lim_{x \to 3}(\sqrt{2x+3} + 4) = 7$

Solución: Al igual que en los ejemplos anteriores sustituimos en la definición 2 los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=3$, $f(x)=\sqrt{2x+3} + 4$ y $L=7$, se tiene: $(\forall\xi>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in D \wedge 0<|x - 3|<\delta<1) \Rightarrow |(\sqrt{2x+3} + 4 - 7|<\xi$ Tenemos que

$$\left|\sqrt{2x+3}-3\right| = \left|\sqrt{2x+3}-\sqrt{9}\right| = \left|\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}\right| = \frac{2|x-3|}{\sqrt{2x+3}+3} < \xi \qquad \Rightarrow$$

$\frac{2\phi}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|} < \xi$, Como $|x - 3|<\delta<1 \Rightarrow -1<x - 3<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow 4<2x<8 \Rightarrow$

$7<2x+3<11 \Rightarrow \sqrt{7} < \sqrt{2x+3} < \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{7}+3 < \sqrt{2x+3}+3 < \sqrt{11}+3$,

entonces podemos acotar: $\left|\sqrt{2X+3}+3\right|$ por $\sqrt{11}+3$ ya que este término es mayor que $\sqrt{2x+3}+3$, lo que hace que, $\frac{2\delta}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|} = \frac{2\delta}{\sqrt{11}+3} < \xi \Rightarrow$

$\delta < \frac{(\sqrt{11}+3)\xi}{2}$

Definición 3. Sea f: D → $\Re$ x_0 es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, se dice que f posee límite a la izquierda de x_0, sii $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x_0 - x<\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\xi$, Análogamente se dice que f tiene límite a la derecha de x_0, sii, $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x - x<\delta) \Rightarrow |f(x) - L|<\xi$ y se denota respectivamente como: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

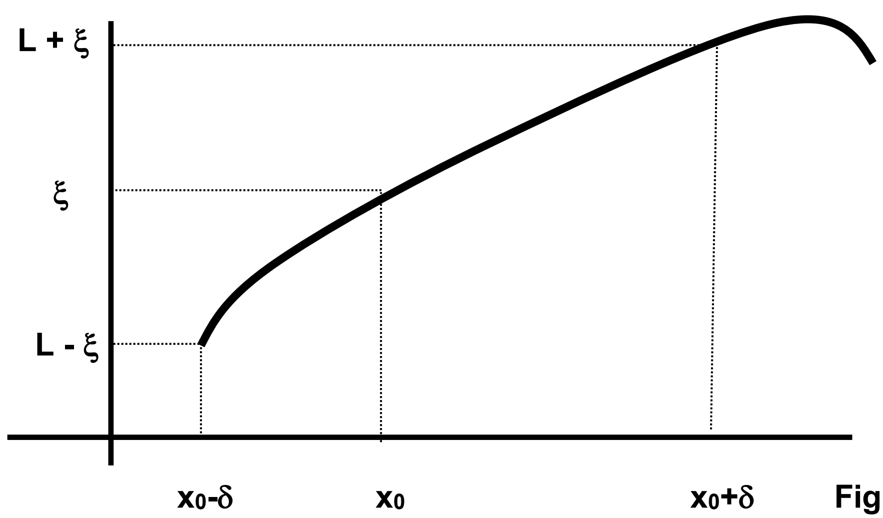


Fig. Nº 6

<u>Teorema 1</u>: (Unicidad del Límite) Si $f:D \rightarrow \Re$, x_0, es (p.a) de D y f tiene límite L_1 y L_2, entonces, $L_1 = L_2$, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$, lo mismo vale para el límite a la izquierda de x_o y para el límite a la derecha de x_o, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ Veremos este teorema con un ejemplo:

<u>Ejemplo:</u>

Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 3 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

<u>Solución:</u> L=$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+1) = 4$ ya que $(\forall \xi > 0)$, se tiene entonces que $|x + 1 - 4| = |x - 3| < \xi$ cuando $o < 3 - x < \delta$ y para ello basta tomar $\delta = \xi$, Análogamente, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-1) = 4$, En efecto:

$|(x - 1)^2 - 4| = |(x - 1)^2 - 2^2| = |(x - 1 - 2)(x - 1 + 2)| = |(x - 3)(x + 1)| = |x - 3||x + 1| < \xi \Rightarrow \delta\ |x + 1| < \xi \Rightarrow \delta < \frac{\xi}{|x+1|}$, como $|x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 3 < x+1 < 5 \Rightarrow \delta < \frac{\xi}{3}$, por lo tanto, el L=$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ existe.

<u>Ejemplo</u>: $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$

L=$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$ y L=$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ como los límites laterales son distintos entonces, L=$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{|x-3|}$ no existe.

<u>Definición 4.</u> Sea f:D → $\Re$, x_0, es un (p.a) de D$\subseteq\Re$, <u>Diremos que f posee límite infinito en el punto x_0,</u> sii ($\forall M(\xi)>0$), ($\exists\delta>0$):

($\forall x\in D \wedge 0<|x - x_0|<\delta<1$) $\Rightarrow$ $|f(x)|> M$ y se denota: L=$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Si en la definición anterior f(x)<M, entonces L=$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

<u>Ejemplo</u>: El $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$=∞, para probar esto debemos observar M>0, se haya ($\delta>0$): $0<|X - 3|<\delta$, entonces $\left|\frac{1}{x-3}\right|$>M como $\left|\frac{1}{x-3}\right|$>M, si $|x - 3|<\frac{1}{M}$, tomamos $\delta = \frac{1}{M}$, se Concluye que $0<|x — 3|<\frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}\right|$>M.

<u>Ejemplo:</u> L=$\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24}$ = $\frac{2(3)+3}{3^2+5(3)-24} = \frac{9}{0} = \infty$, es decir, L=$\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ y L=$\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ =+∞, por lo tanto, L=$\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$, no existe.

<u>Definición 5</u>: (+∞) es un (p.a) de D$\subseteq\Re$, sii ($\forall n\in z^+$), ($\exists x\in D$): ($x\leq n$), Análogamente (-,∞), es un (p a) de D$\subseteq\Re$, sii-($\forall n\in z^+$), ($\exists x\in D$): ($x\leq -n$).

<u>Definición 6:</u> Sea f:D→ $\Re$ y (-∞) es un (p.a) de D$\subseteq\Re$, <u>decimos que f posee límite L en -∞</u>, sii, ($\forall\xi>0$), ($\exists M=M(\xi)$): ($\forall x\in D \wedge x<M$) $\Rightarrow$ $|f(x) - L|>\xi$. Análogamente, <u>f posee límite L en -∞</u> sii, ($\forall\xi>0$), ($\exists M=M(\xi)$): ($\forall x\in D \wedge$

x>M) $\Rightarrow$ |f(x) - L|>ξ se denotan respectivamente como : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Ejemplo: Demostrar que L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1} = 5$

Solución: $(\forall \xi>0)$ $(\exists M=M(\xi))$: $(\forall x \in D \wedge x>M) \Rightarrow \left|\frac{5x+5}{x+1} - 5\right| < \xi$ como

$$\left|\frac{5x+3}{x+1} - 5\right| = \left|\frac{5x+3-5x-5}{x+1}\right| = \left|\frac{-2}{x+1}\right| = \left|\frac{2}{x+1}\right| < \xi \text{ si } \frac{2}{x+1} < \xi \Rightarrow x > \frac{2}{\xi} - 1$$

haciendo M(ξ)=$\frac{\xi}{2} - 1$. Se nota que para cada número positivo ξ se puede encontrar un número M=$\frac{\xi}{2} - 1$, tal que x>M, por lo tanto, el número 5 es el Límite de la función f(x)=$\frac{5x+3}{x+1}$ e.i. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1}$=5

Teorema 2: Sea H(x)=$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$, Entonces, cuando x → ∞, H(x)=$\frac{\infty}{\infty}$ y

$$L = \lim_{x \to \infty} H(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n<m \\ \infty & \text{si } n>m \end{cases}$$

Demostración: Sea n= m, entonces,

$$L=\lim_{x\to\infty} H(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^n+.....+b_0}$$

Aplicando la propiedad del elemento neutro del producto de los numeros reales $1=\frac{x^n}{x^n}$ obtenemos:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n\frac{x^n}{x^n}+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n}+.....+\frac{a_0}{x^n}}{bm\frac{x^n}{x^n}+b_{m-1}\frac{x^{n-1}}{x^n}+......+\frac{b_0}{x^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+.....+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+......+\frac{b_0}{x^n}}=\frac{an}{bm}$$

y cuando $x \rightarrow \infty$, nos queda: $L\rightarrow\frac{a_n}{b_m}$

Para los casos n<m y n>m, la demostración es similar.

Ejemplo. Hallar el $L=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

Solución: $L=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$ = (∞ - ∞), como

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-(x^3-x^2+1)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}\right)}\Rightarrow$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Cómo cumple con las condiciones del teorema 2, buscamos los valores de n y m, n=2 y m=6/3 $\Rightarrow$ m=2, entonces a_n=2 y b_m=1+1+1= 3 $\Rightarrow$ L $\rightarrow$2/3

<u>Ejemplo</u>: Hallar L= $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 3}{\sqrt{2x^8 + 5x - 4}}$

<u>Solución:</u> Como cumple con las condiciones del teorema,

buscamos los valores de n y m, n=2 y m= $\frac{8}{2} = 4$, como n<m = > L $\rightarrow$0.

<u>Ejemplo:</u> Hallar L= $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt[3]{x} + 7}$

<u>Solución:</u> Como cumple con las condiciones del teorema

buscamos n y m, n= $\frac{1}{2}$, m= $\frac{1}{3}$, como n>m $\Rightarrow$ L $\rightarrow \infty$

<u>Propiedades de los Límites:</u>

Sean $L_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, $L_2 = \lim_{x \to x_0} g(x)$ y $K \in \Re$, se tiene que :

6) $\lim_{x \to x_0} K = K$

7) $\lim_{x \to x_0} Kf(x) = K \lim_{x \to x_0} f(x) = KL_1$

8) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

9) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$

10) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^n$ $= (L_1)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = (L_1)^{L_2}$

<u>Ejemplo:</u> Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} 4$, por la propiedad N° 1, L=$\lim\limits_{x \to 2} 4$ =4 $\Rightarrow$ L→ 4

<u>Ejemplo:</u> Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} 3x$, por la propiedad N° 2, se tiene L=3$\lim\limits_{x \to 2} x$ $\Rightarrow$ L→ 6

<u>Ejemplo</u>: Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 5x - 3)$, Por las propiedades 1,2,3 y 4, tenemos: L=2$\lim\limits_{x \to 2} x \lim\limits_{x \to 2} x$ + 5$\lim\limits_{x \to 2} x$ - $\lim\limits_{x \to 2} 3$ $\Rightarrow$ L= 2.2.2. + 5.2.-3 $\Rightarrow$ L= 8+10-3 $\Rightarrow$ L→ 15

<u>Ejemplo</u>: Hallar L=$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x+5}{3x+2} =$

por la propiedad Nº 5, tenemos:

$$L=\lim_{x \to 2} \frac{4x+5}{3x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(4x+5)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x+5)} = \frac{4.2+5}{3.2+5} = \frac{13}{11} \Rightarrow L \to \frac{13}{11}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar L= $\lim\limits_{x \to 2} (3x+5)^{4x-3}$ por las propiedades Nº 6 y 7, tenemos:

$$L=\left[\lim_{x\to 2}(3x+5)\right]^{\left|\lim_{x\to 2}(4x-3)\right|} \Rightarrow L=(3.2+5)^{4.2-3} \Rightarrow L=11^5 \Rightarrow L\to 161.051$$

<u>Definición 7</u>: Si L=$\lim_{x\to x_0}(\sigma(x))$, es decir, $|\alpha(x)|<\xi$ cuando $0<|x-\alpha|<\delta(\xi)$, la función $\alpha(x)$ se llama Infinitesimal (infinitamente pequeña) cuando $x \to x_o$. Análogamente se determina la función infinitesima (Infinitesimalmente pequeña) $\alpha(x)$, cuando $x \to \infty$.

<u>Definición 8</u>: La suma y el producto de un número limitado de infinitésimos, cuando $x \to x_o$, es también un infinitésimo cuando $x \to x_o$, si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimos cuando $x \to x_o$, y L=$\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ =C, donde $0<|C|<+\infty$, si L=$\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$=1, las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman equivalentes cuando $x \to x_o$; es decir, $\alpha(x) \sim \beta(x)$, por ejemplo, si $x \to 0$, tenemos $Ln(1+x) \sim x$, e.i. L=$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$, el limite de la razón de dos infinitesimos no se altera, si los téminos de la misma se sustituyen por otros cuyos valores respectivos son equivalentes. De acuerdo con esto, al hallar el $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, donde $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to x_o$, al numerador y al denominador de la fracción pueden restársele (o sumarsele) infinitesimos de orden superior, elegidos de tal forma, que las cantidades resultantes son equivalentes a las anteriores.

De este límite se deduce el siguiente límite:

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, Por medio un cambio de variable $t=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{1}{t}$

$\Rightarrow (x\to\infty \Rightarrow t\to 0)$ $\Rightarrow$ `$L=\lim(1+t)^{\frac{1}{t}}$ $\Rightarrow$ $Ln(L)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\frac{1+t}{t}$ $\Rightarrow Ln(L)=1$

$\Rightarrow L\to e$

En conclusión: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ $\Rightarrow L\to$ e y $L=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ $\Rightarrow L\to e$

Definición 9: Se denomina número e al límite de la variable

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}$, cuando $x\to\infty$ $(n\geq N)$, es decir: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ =e, con $e\in Q'$ y

tiene un valor aproximado a 2,7188281828.

Ejemplo: Hallar $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}=1^{\infty}$ Solución: Haciendo $\frac{1}{5x}=t\Rightarrow$

$x=\frac{1}{5t}$ cuando $(x\to\infty \Rightarrow t\to 0)$; $L=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{5t}}\Rightarrow L=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}$

Ejemplo: Hallar $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=1^{\infty}\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^{x}$ $\Rightarrow$

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$, haciendo $t=\frac{-2}{x+1}\Rightarrow x=-\frac{2}{t}-1$, (cuando $x\to\infty\Rightarrow t\to 0)\Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}-1}\Rightarrow L=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-2}\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}\Rightarrow L\to e^{-2}$$

<u>Definición 10</u>. **Se definen los límites indeterminados como aquellos límites que al sustituirle al punto de acumulación toman la forma siguiente:** $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞, $1^{\pm\infty}$ **y se le rompe la indeterminación aplicando las herramientas vistas en el precálculo como son propiedades de los números reales, factorización, racionalización, etc.**

<u>Ejemplo</u>: Hallar $L=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}$

<u>Solución:</u> por medio del teorema N° 3, tenemos que n=1, m=1, an=1, bm= 1, lo que implica que $L\to 1$.

<u>Ejemplo</u>: Hallar $L=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

<u>Soluciòn:</u> Por las propiedades de los números reales se tiene que: $L=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{16}}{x-16}$, Racionalizando tenemos: $L=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}\Rightarrow$ $L=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}\Rightarrow L\to\frac{1}{8}$

CONTINUIDAD

Una idea intuitiva de continuidad es que la curva que representa la gráfica de una función debe estar sin interrupciones en toda ella. Por el contrario si esta presenta interrupciones o saltos se dice que la función es discontínua y los puntos donde se producen las interrupciones o saltos reciben el nombre de puntos de discontinuidad.

Ilustramos estos dos casos geométricamente:

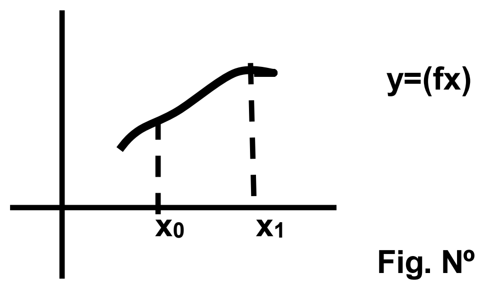


Fig. Nº 7

Esta función es continua en todo el intervalo (x_0, x_1)

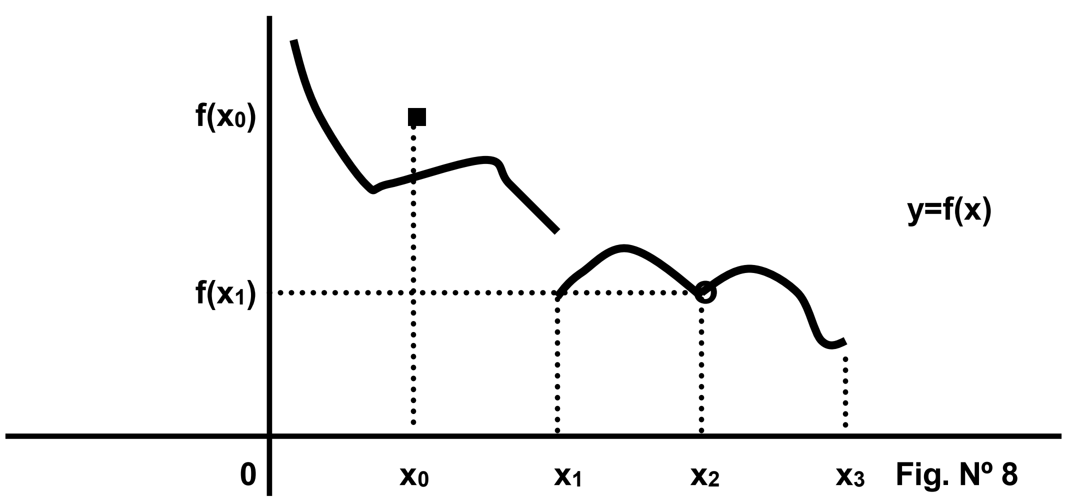


Fig. Nº 8

Supongamos que la gráfica dada en la figura anterior corresponda a una función y=f(x). Esta función representa una función de salto. El $\lim_{x \to x_1} f(x)$, no existe porque no hay un número L para el cual f(x) se encuentre muy próximos a L, cuando x se aproxima suficientemente a x_1.

Podemos observar también en la gráfica que no existe el $\lim_{x \to 0} f(x)$. En x_2. se aprecia que f(x) no esta definida, pero pareciera que el hueco que hay se puede tapar con solo incluir en la grafica el punto $(x_2, f(x_2))$, de esta manera se romperia la discontinuidad en el punto $(x_2, f(x_2))$, haciendo que el $\lim_{x \to x_2} f(x) = f(x_2)$. En x_0 el valor de f(x) no resulta apropiado para la continuidad de f(x), el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, pero su valor no es igual a $f(x_0)$.

Conclusión: De todas estas observaciones se desprende que la discontinuidad surge cuando el límite de una función no existe ó si el límite aunque existe no es igual al valor de la función.

<u>Definición 11</u>: Sea $f: D \to \Re$, $x_0 \in \Re$, la función <u>f es continua en x_0</u> sii $(\forall \xi > 0), (\exists \delta > 0): (\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta < 1) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \xi$

<u>Observación:</u> En la definición anterior vemos que $x_0 \in D$, esto es la función f debe estar definida en x_0, entonces, x_0 es un (p.a) de D, o x_0 es un punto aislado de D, entonces $\exists \delta > 0$ tal que x_0 es el único punto

común a D y $|x-x_0|$<δ. Asi que para x= x_0, entonces, $|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0$, para cada ξ>0. Por lo tanto, cualquier punto aislado $x_0 \in D$ es un punto de continuidad de f(x), es decir, f es continua en x_0.

La definición anterior se traduce de la siguiente manera: Una función f es continua en un punto x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Así la función es continua x_0 si cumple con las siguientes condiciones:

4) La función está definida en x_0

5) El $\lim_{x \to x_0} f(x)$= L existe y sea finito

6) El $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Definición 12</u>: Si f(x) es una función, f será continua, si es continua en cada uno de sus puntos donde este definida (intervalo, segmento, etc.).

<u>Definición 13</u>: Se dice que una función f(x) no es continua en el punto x_0, sii, este punto no verifica las tres condiciones de continuidad citadas anteriormente.

<u>Ejemplo:</u> f(x)=$\frac{3}{2x-5}$, esta función es discontinua en el punto x=$\frac{5}{2}$, ya que la función no cumple la primera condición de continuidad.

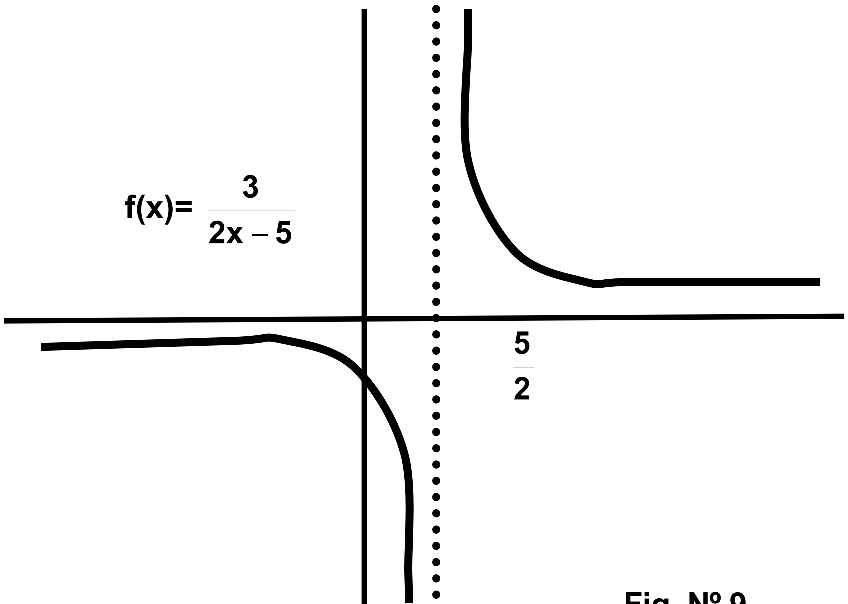
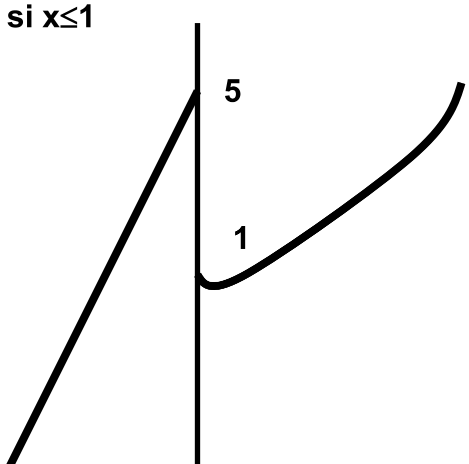


Fig. Nº 9

<u>Definición 14:</u> Si la función f(x) tiene limites finitos: $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, con $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, entonces, x_0 recibe el nombre discontinuidad de primera especie.

<u>Ejemplo:</u>

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$$



$\frac{5}{2}$

Fig. Nº 10

Definición 15: Si x_0 no esta definida, pero $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad evitable y la discontinuidad se evita (se redefine), dándole al valor de x0 el valor al cual el limite tiende, es decir, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18}$, esta función no esta definida en x=-3, pero $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{(x-6)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-6} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\dfrac{1}{3}$, por lo tanto, hay una discontinuidad evitable en el punto x=-3 y la función se redefine

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18} & \text{si } x \neq -3 \\ -\dfrac{1}{9} & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

Definición 15: Los puntos de discontinuidad que no son de primera especie se llaman de segunda especie, que son aquellos puntos donde la función no esta definida y los limites laterales no existen.

Ejemplo: $f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}$, en x=2 hay una discontinuidad inevitable de segunda especie, ya que $\lim_{x \to 2} f(x)=\pm\infty$, es decir, $\lim_{x \to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)=+\infty$

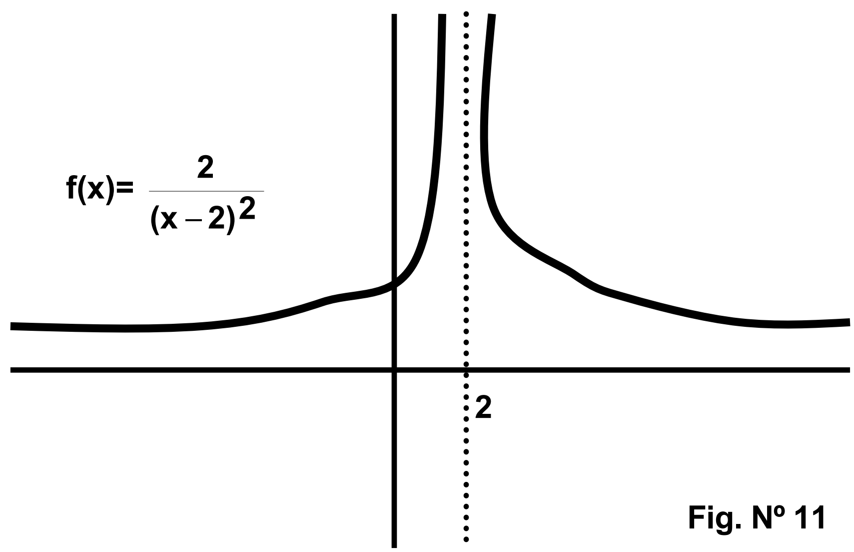


Fig. Nº 11

Propiedades de las funciones continuas

8) La Suma (resta) de dos funciones continuas f y g, en un punto x_0, es otra función continua.

En efecto $L=\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) \Rightarrow L=\lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow$

$f(x_0) \pm g(x_0)= (f \pm g)x_0$

9) El producto de dos funciones continuas f y g en el punto Xo, es una función continua. En efecto: L=$\lim_{x \to x_0}[f(x)g(x)]$ $\Rightarrow$ L=$\lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$ $\Rightarrow$ f(x).g(x)=(f.g)x_o

10) El cociente de dos funciones continuas en el punto x_o, es otra función continua, excepto en donde x anula al denominador.

En efecto, L=$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$ L= $\frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)x_0$

11) La función f(x) =K (función constante) es continua en cualquier punto.

12) La función f(x)= x, (función identidad) es continua en cualquier punto.

13) La función polinomica f(x)= $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ es continua en cualquier punto.

Las funciones irracionales f(x) definidas por f(x)= $\sqrt[m]{g(x)}$, donde g(x) es un polinomio, es continua en todos los puntos de su dominio.

14) Un punto de acumulación (aislado), también se considera como una función continua.

Para estudiar la continuidad de cualquier función y=f(x) y realizar su gráfica aproximada, seguiremos los siguientes pasos:

8. **Se halla el dominio de la función, es decir, Domf**

9. **Se buscan los puntos de discontinuidad si es que los hay.**

10. **Si hay puntos de discontinuidad se estudian el comportamiento cerca de ellos**

11. **Se clasifican los distintos tipos de discontinuidad, es decir, si es evitable (se redefine la función) o inevitable, (de primera o de segunda especie).**

12. **Se estudia la función en sus extremos.**

13. **se hallan los cortes con los ejes de coordenadas, si es posible.**

14. **se realiza la gráfica aproximada.**

<u>Ejemplo:</u> Representar gráficamente las siguientes funciones y localice los puntos de discontinuidad (si los hay) y use la notación de límite para describir el comportamiento de f cerca de estos puntos de discontinuidad.

c. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 3 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

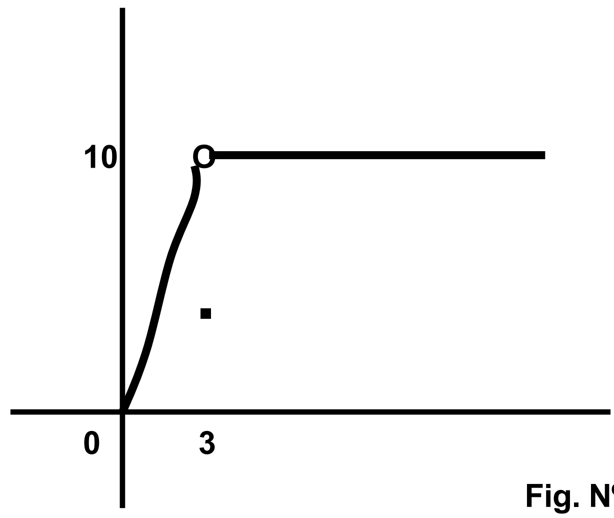


Fig. Nº 12

8. **Domf=$[0,\infty)$**
9. **Puntos de discontinuidad $\{x=3\}$**
10. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 9$**
11. **Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=3), no se cumple la tercera condición de discontinuidad, ya que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ y f(3)=6.**

d. f(x)= $\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

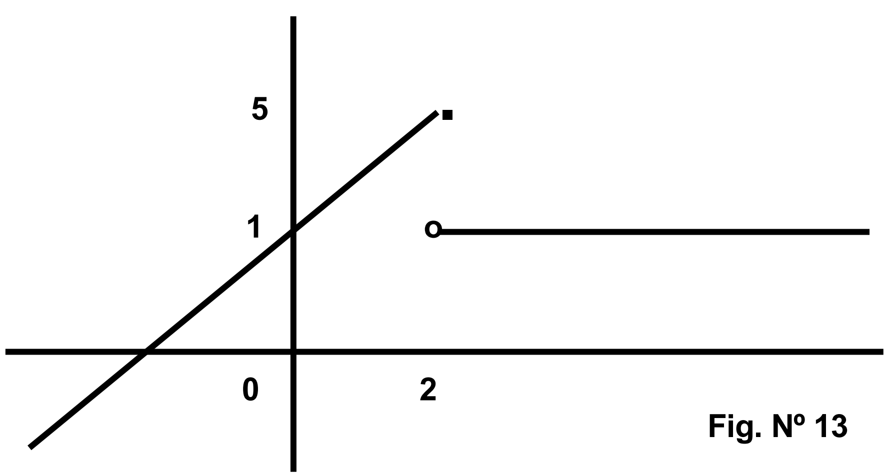


Fig. Nº 13

1. **Domf=$\Re$**

2. **Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$**

3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad:** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ **y** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

4. **Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

<u>Ejemplo:</u> Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

b. **f(x)=** $\dfrac{x^2}{x-2}$

1. **Domf=$\Re$ -{2}**

2. **Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$**

3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad:** $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ **y** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

4. **Existe un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ **y** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

5. Estudio de la función en los extremos: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto,

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

6. Corte con los ejes de coordenadas: X=0 $\Rightarrow$ Y=0, es decir, (0,0)

7. Su gráfica:

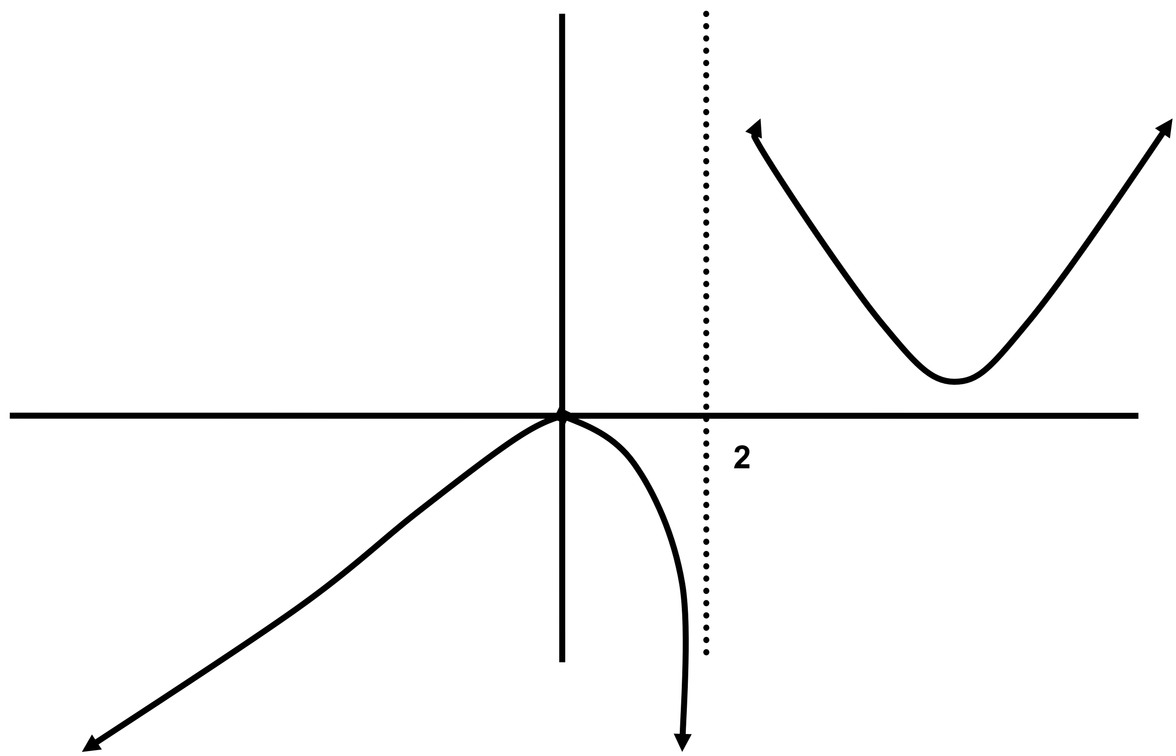


Fig. Nº 14

c. f(x)= $\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$

1. Domf=[-7,∞) – {±2}

2. Puntos de discontinuidad {x=-2 y x=2}

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: a)

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}-3}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-}{+} - \infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-}{-} + \infty$, b)

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+7)-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \quad \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 24} \dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \Rightarrow L \to \dfrac{1}{24}$

4. Existe dos puntos de discontinuidad; a) En x=-2 hay un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie b) en el punto (x=2), hay una discontinuidad evitable y como , $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4} = \dfrac{1}{24}$ la función se redefine de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} & \text{si } x\neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{24} & \text{si } x=2 \end{cases}$$

12. Estudio de la función en los extremos: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$, por el teorema Nº 2 tenemos que: n=$\dfrac{1}{2}$, y m=2, como n>m, entonces

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ =0 y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ =0

13. Cortes con los ejes de coordenadas: corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$

y= $\dfrac{\sqrt{7}-3}{-4}$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$ $\Rightarrow$ (0, $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4}$) y corte con el eje X (y=0) $\Rightarrow$

$\sqrt{x+7}$ - 3=0 $\Rightarrow$ x + 7=9 $\Rightarrow$ x=2, como x=2 no pertenece al dominio de la función, entonces no existe corte con el eje x.

14. Gráfica:

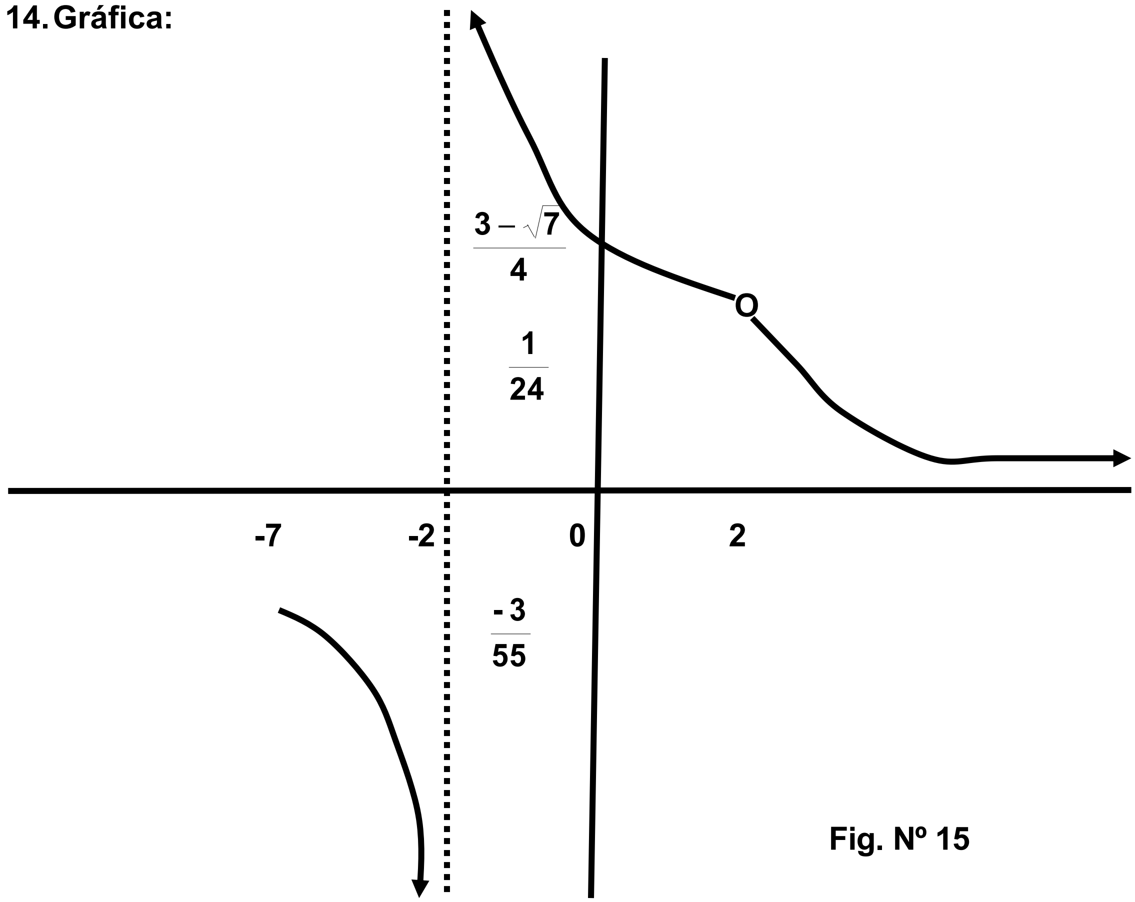


Fig. Nº 15

EJERCICIOS RESUELTOS

LÍMITES

3. Comprobar por medio de la definición de límite que se cumplen:

b. $\lim\limits_{x \to 3}(5x-9)=6$ b. $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2+3x-2)=12$ c. $\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{2x+5}-2)=1$

<u>Solución a:</u> Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=3$, $f(x)=5x - 9$ y $L=6$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x - 3|<\delta<1) \Rightarrow |5x - 9 - 6|<\xi$, como $|5x - 15|=5|x - 3| \Rightarrow 5\delta<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{5}$. Si $\xi=0{,}01 \Rightarrow \delta=0{,}002$, si $\xi=0{,}001 \Rightarrow \delta= 0{,}0002$

<u>Solución b:</u> Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=2$, $f(x)=2x^2 + 3x - 2$ y $L=12$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x - 2|<\delta<1) \Rightarrow |2x^2 + 3x - 2 - 12|<\xi$, como $|2x^2 + 3x - 14|=|(2x + 7)(x - 2)|$, por las propiedades de distancia entre dos puntos se tiene que: $|2x + 7||(x - 2|$ y como $|x - 2|<\delta$ se tiene que $\Rightarrow |2x + 7|\delta<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi}{|2x+7|}$ y como $|x - 2|<1 \Rightarrow -1<x - 2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 2<2x<6 \Rightarrow 9<2x + 7<13$, como a medida que $|2x + 7|$ se haga más pequeño el valor de $\frac{\xi}{|2x+7|}$ se hace más grande podemos acotar $|2x + 7|$

por el valor de 9, entonces $\delta<\frac{\xi}{9}$, dándole valores arbitrarios a ξ se obtienen valores de δ.

<u>Solución c:</u> Aplicando la definición 2, sustituyendo en esta los valores del punto de acumulación, la función y el valor de L, que en este caso $x_0=2$, $f(x)=\sqrt{2x+5}-2$ y $L=1$, se tiene: $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<|x-2|<\delta<1) \Rightarrow |\sqrt{2x+5}-2-1|<\xi)$, por la racionalización de $\sqrt{2x+5}-3=\frac{2x+5-9}{\sqrt{2x+7}+3}$ y por las propiedades de distancia entre dos puntos se tiene que: $\left|\frac{2x-4}{\sqrt{2x+7}+3}\right|=\frac{2|x-2|}{\left|\sqrt{2x+7}+3\right|}<\xi$ y como $|x-2|<\delta$ se tiene que $\Rightarrow \frac{2\delta}{\left|\sqrt{2x+7}+3\right|}<\xi \Rightarrow \delta<\frac{\xi\left|\sqrt{2x+7}+3\right|}{2}$ y como $|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 2<2x<6 \Rightarrow 7<2x+5<11 \Rightarrow$ $\sqrt{7}<\sqrt{2x+5}<\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{7}+3<\sqrt{2x+5}+3<\sqrt{11}+3$, como a medida que $\sqrt{2x+5}+3$ se haga más grande el valor de $\frac{\xi\left|\sqrt{2x+7}+3\right|}{2}$ se hace más grande podemos acotar $\left|\sqrt{2x+7}+3\right|$ por el valor de $\sqrt{11}+3$, entonces $\delta<\frac{\xi(\sqrt{11}+3)}{2}$, dándole valores arbitrarios a ξ se obtienen valores de δ.

4. Aplicando las propiedades de límite y de los números reales, hallar los siguientes límites:

b. L=$\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 5x - 3}$ b. L=$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4}}{3x^2 - 4x - 4}$

c. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$ d. L=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ e. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{\sqrt{x^2 + 1} + 5}$ f.

L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x+5} - \sqrt{9x-3}}{\sqrt{3x + \sqrt{2x+3}}}$ g. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{x^3 + 5\sqrt{2x-3}}}$ h. L=$\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2 - 4} \right)$

<u>Solución a:</u> L=$\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 5x - 3}$, Sustituiremos el punto de acumulación x_0=-3 en el límite, e.i. L=$\frac{9-9}{18-15-3} = \frac{0}{0}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla factorizando tanto el numerador como el denominador e.i. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ y $2x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x-1)$

se tiene que L=$\lim\limits_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} \frac{x-3}{2x-1} \Rightarrow L \to \frac{6}{7}$

<u>Solución b:</u> L=$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 10} - \sqrt{x^2 - 4}}{3x^2 - 4x - 4}$, Sustituiremos el punto de acumulación x_0=2 en el límite, e.i. L=$\frac{\sqrt{8 - 8 + 10 - 10} - \sqrt{2^2 - 4}}{12 - 8 - 4} = \frac{0}{0}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, racionalizando el numerador aplicando $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ e.i.:

$$\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}=\frac{x^3-2x^2+5x-10-x^2-4}{\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}+\sqrt{x^2-4}}\Rightarrow$$

$$\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}=\frac{(x+2)(x^2-x+3)}{\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}+\sqrt{x^2-4}}$$ y factorizando el denominador $3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$ se tiene que:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2-x+3)}{(x+2)(3x-2)\left(\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}\right)}\Rightarrow$$

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x+3)}{(3x-2)\left(\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}-\sqrt{x^2-4}\right)},$$ Sustituyendo otra vez el punto de acumulación se tiene que: $L=\frac{4-2+3}{4(0)}\Rightarrow L\to\infty$

<u>Solución c:</u> $L=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$, Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=2$ en el límite, e.i. $L=\left(1-\frac{5}{\infty}\right)^{\infty}\Rightarrow L\to 1^{\infty}$; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, haciendo el cambio de variable $t=-\frac{5}{x}\Rightarrow x=-\frac{5}{t}$; cuando $x\to\infty\Rightarrow t\to 0$ y L se transforma en

$L=\lim_{x\to 0}(1+t)^{-\frac{5}{t}}$; aplicando las propiedades de los números reales se tiene que $L=\left(\lim_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-5}$, como $\lim_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$=e, se tiene que $L\to e^{-5}$

<u>Solución d:</u> $L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=0$ en el límite, e.i. $L=\frac{1}{0}\ln\sqrt{1}\Rightarrow L=0_x\infty$, cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que: $L=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)$, aplicando las propiedades de los números reales se tiene que: $L=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1+x+x-x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)\Rightarrow$

$L=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right)$, haciendo el cambio de variable $t=\frac{2x}{1-x}\Rightarrow$

cuando $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ y el limite se transforma en: I=ln$\lim_{x \to 0}\left((1+t)^{\frac{t}{t+2}}\right)^{\frac{1}{2}}$,

sustituyendo otra vez el punto de acumulación se tiene que

$L=\left(1^0\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L \to 1$

<u>**Solución e:**</u> $L=\lim_{x \to \infty}\frac{3x^2+5x-7}{\sqrt{x^2+1}+5}$; **Sustituiremos el punto de acumulación** $x_0=\infty$ **en el límite, e.i.** $L=\frac{\infty^2+5\infty-7}{\sqrt{\infty^2+1}+5} \Rightarrow L \to \frac{\infty}{\infty}$; **aplicando el teorema 2, se tiene que m=2, n=1, como m>n, se tiene que** $L \to \infty$

<u>**Solución f:**</u> $L=\lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{9x-3}}{\sqrt{3x+\sqrt{2x+3}}}$; **Sustituiremos el punto de acumulación** $x_0=\infty$ **en el límite, e.i.** $L=\lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{4\infty+5}-\sqrt{9\infty-3}}{\sqrt{3\infty+\sqrt{2\infty+3}}}$; $\Rightarrow L \to \frac{\infty}{\infty}$; **aplicando el teorema 2, se tiene que** $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, **como m=n, se buaca el valor de** $\frac{a_m}{b_n}$, **donde** $a_m=2-3 \Rightarrow a_m=-1$ **y** $b_n=3$; **se tiene que** $L \to -\frac{1}{3}$

<u>Solución g:</u> L=$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{x^3+5\sqrt{2x-3}}}$; Sustituiremos el punto de acumulación $x_0=\infty$ en el límite, e.i. L=$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5\infty-2}}{\sqrt{\infty^3+5\sqrt{2\infty-3}}}$; $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando el teorema 2, se tiene que m=$\dfrac{1}{2}$, n=$\dfrac{3}{2}$, como m<n; se tiene que L $\rightarrow$ 0

<u>Solución h:</u> L=$\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$; Sustituiremos el punto de acumulación x_0=2 en el límite, e.i. L=$\left(\dfrac{1}{2-2}-\dfrac{3}{4-4}\right)$ $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ ∞ - ∞; cómo nos resultó una indeterminación hay que romperla, resolviendo la resta de fracciones se tiene que L=$\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x+2-4}{x^2-4}\right)$; factorizando en el denominador se tiene que L= $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow L=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{1}{x+2} \Rightarrow L=\dfrac{1}{4}$

CONTINUIDAD

3. **Realizar la siguiente gráfica y estudiar la función en los puntos de discontinuidad, si los hay**

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\leq x<0 \\ 3 & \text{si } 0\leq x<1 \\ -2x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Solución: $$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\leq x<0 \\ 3 & \text{si } 0\leq x<1 \\ -2x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

La función $2x + 1$ es una recta que está definida en el intervalo $(-\infty, -2)$; la función $x^2 - 1$ es una parábola paralela al eje de las x definida en el intervalo $[-2, 0)$, la función 3 es una recta paralela al eje de las x definida en el intervalo $[0, 1)$ y la función $-2x$ es una recta paralela al eje de las x definida en el intervalo $[1, \infty)$, luego su gráfica será:

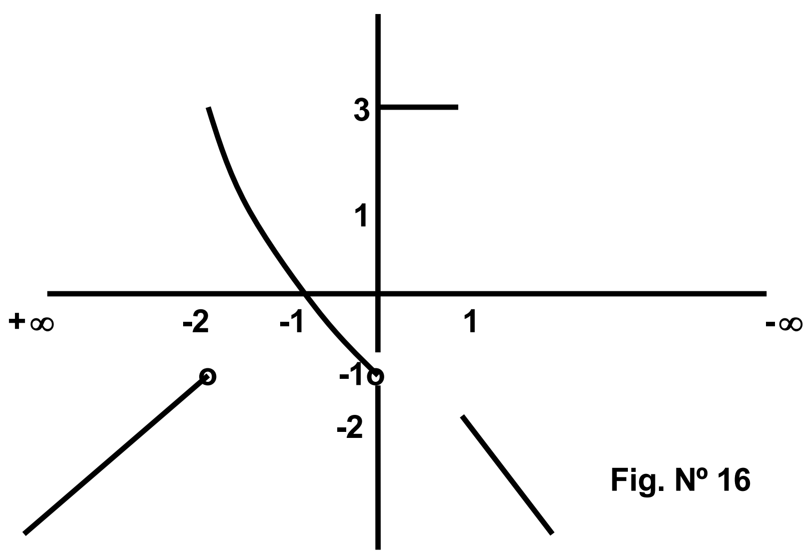


Fig. Nº 16

Veamos si se cumple las condiciones de las funciones continuas:

4. El dominio de la función es todo $\Re$, e.i. se cumple la primera condición

5. Existen 3 puntos de discontinuidad en: { x=-2, x=0 y x=1}

6. Estudio cerca de los puntos de discontinuidad

   Para x=-2:

$$\lim_{x \to 2^-}(2x-1) = -1 \quad y \lim_{x \to 2^+}\left(x^2-1\right) = 3, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \to 2} f(x) \text{ no existe}$$

Para x=0:

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x^2-1\right) = -1 \; y \lim_{x \to 0^+} 3 = 3, \text{ por lo tanto, } \lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe}$$

Para x=-2:

$$\lim_{x \to 1^-}(2x-1) = 3 \quad y \lim_{x \to 1^+}(2x-1) = -2, \text{por lo tanto,} \lim_{x \to 1}(2x-1) \text{ no existe}$$

Conclusión existen tres puntos de discontinuidad inevitables de primera especie en los puntos antes mencionados

4. Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de qué tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función y realice la gráfica aproximada.

c. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-1}$ b. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+3x-10}$ c. $f(x) = \dfrac{x^2-5x-24}{2x^2+5x-3}$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}-4}{x^2-9}$

<u>Solución a:</u> $f(x) = \frac{2x+3}{5x-1}$, Seguiremos los paso para la gráfica aproximada de una función:

7. Se halla el dominio de la función, e.i. Domf=$\Re$ - {$\frac{1}{5}$}

8. Puntos de discontinuidad {x=$\frac{1}{5}$}

9. Estudio de la función en x=$\frac{1}{5}$, L=$\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}} \frac{2x+3}{5x-1}$, sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{\frac{2}{5}-3}{0} \Rightarrow$ L $\to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, L_1=$\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^-} \frac{2x+3}{5x-1} \Rightarrow L_1 \to -\infty$; e.i. la función decrece indefinidamente, L_2=$\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^+} \frac{2x+3}{5x-1} \Rightarrow L_2 \to +\infty$, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x= no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

10. Estudio de la función en los extremos e.i. L=$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x+3}{5x-1}$, por el teorema 2, como m=1 y n=1 ⇒ m=n ⇒ L → $\frac{2}{5}$, e.i. existe una asíntota horizontal en x=$\frac{2}{5}$

11. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) ⇒ y=-3, corte con el eje x (y=0) ⇒ x=-$\frac{3}{2}$

12. Gráfica

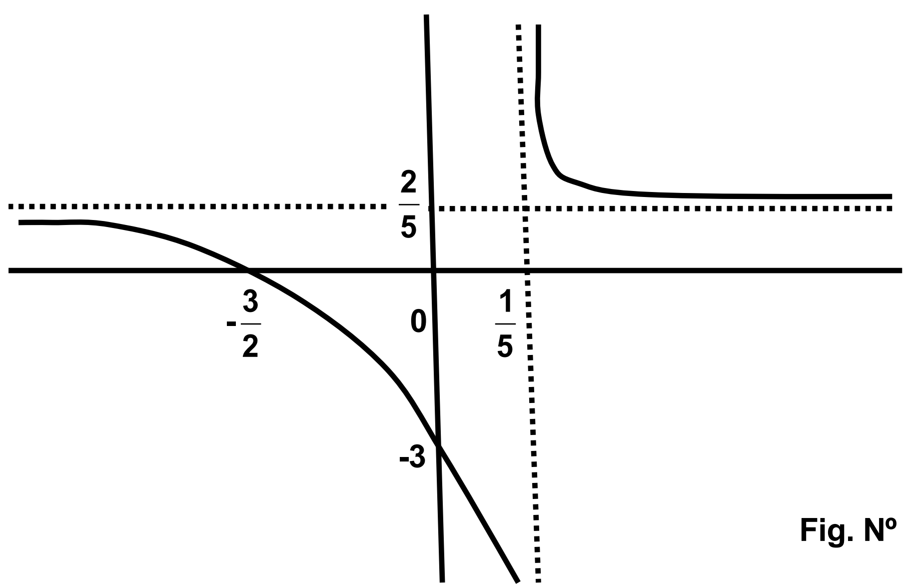


Fig. Nº 17

<u>Solución b:</u> $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x-10}$, Seguiremos los paso para la gráfica aproximada de una función:

7. Se halla el dominio de la función, para eso factorizaremos el denominador e.i. $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) \Rightarrow$ Domf=$\Re$ - {-5, 2}

8. Puntos de discontinuidad {x=-5, x=2}

9. Estudio de la función en x=-5, L=$\lim\limits_{x \to -5} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{2}{0} \Rightarrow$ L $\to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, L1=$\lim\limits_{x \to -5^-} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$ L1 $\to$ -∞; e.i. la función decrece indefinidamente, L2=$\lim\limits_{x \to -5^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$ L2 $\to$ +∞, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x=-5 no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

Estudio de la función en x=2, L=$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{5}{0} \Rightarrow$ L $\to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, L1=$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$ L1 $\to$ -∞; e.i. la función decrece indefinidamente, L2=$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$ L2 $\to$ +∞, e.i. la función crece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en x=-5 no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

10. Estudio de la función en los extremos e.i. L=$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$, por el teorema 2, como m=1 y n=2 ⇒ m<n ⇒ L → 0, e.i. existe una asíntota horizontal en x=0

11. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) ⇒ y=-$\frac{3}{10}$, corte con el eje x (y=0) ⇒ x=-3

12. Gráfica

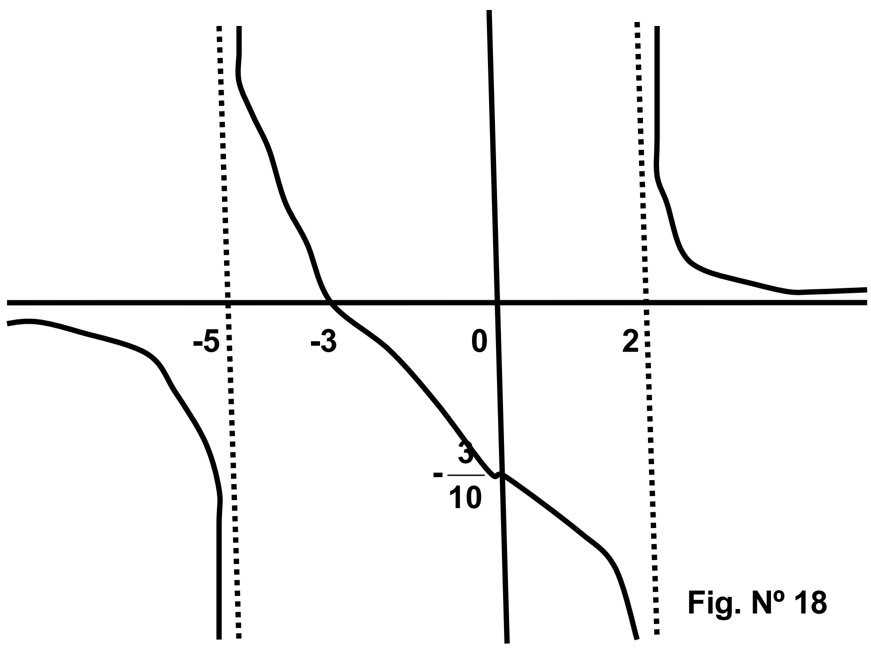


Fig. Nº 18

<u>Solución c:</u> $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 5x - 3}$,

7. Se halla el dominio de la función, factorizando el denominador e.i. $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1) \Rightarrow$ Domf=$\Re$ - {-3, $\frac{1}{2}$}

8. Puntos de discontinuidad {x=-3, x=$\frac{1}{2}$}

9. Estudio de la función en x=-3, L=$\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 5x - 24}{(x+3)(2x-1)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{0}{0}$, factorizando el mumerador e.i. $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8)$, simplificando y sustituyendo otra vez el punto de acumulación se obtiene buscamos los límites laterales, $L_1 = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x - 8}{2x - 1} \Rightarrow L_1 \to \frac{11}{7}$; e.i. en el punto x=-3, existe una discontinuidad evitable y la función se redefine como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x \neq -3 \\ \\ \dfrac{11}{7} & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

Estudio de la función en x=$\frac{1}{2}$, L=$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)}$ sustituyendo el punto de acumulación se tiene que L $\to \frac{\frac{1}{2} - 8}{0} \Rightarrow L \to \pm\infty$, buscamos los límites laterales, $L_1 = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)} \Rightarrow L_1 \to +\infty$; e.i. la función crece indefinidamente, $L_2 = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^{+}} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)} \Rightarrow L_2 \to -\infty$, e.i. la función decrece indefinidamente, como los límites laterales son distintos el límite en $x=\frac{1}{2}$ no existe y este es un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie.

10. Estudio de la función en los extremos e.i. $L=\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-1)}$, por el teorema 2, como m=2 y n=2 $\Rightarrow$ m=n $\Rightarrow L \to \frac{1}{2}$, e.i. existe una asíntota horizontal en $x=\frac{1}{2}$

11. Corte con los ejes de coordenados, corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y=8, corte con el eje x (y=0) $\Rightarrow$ x=8

12. Gráfica

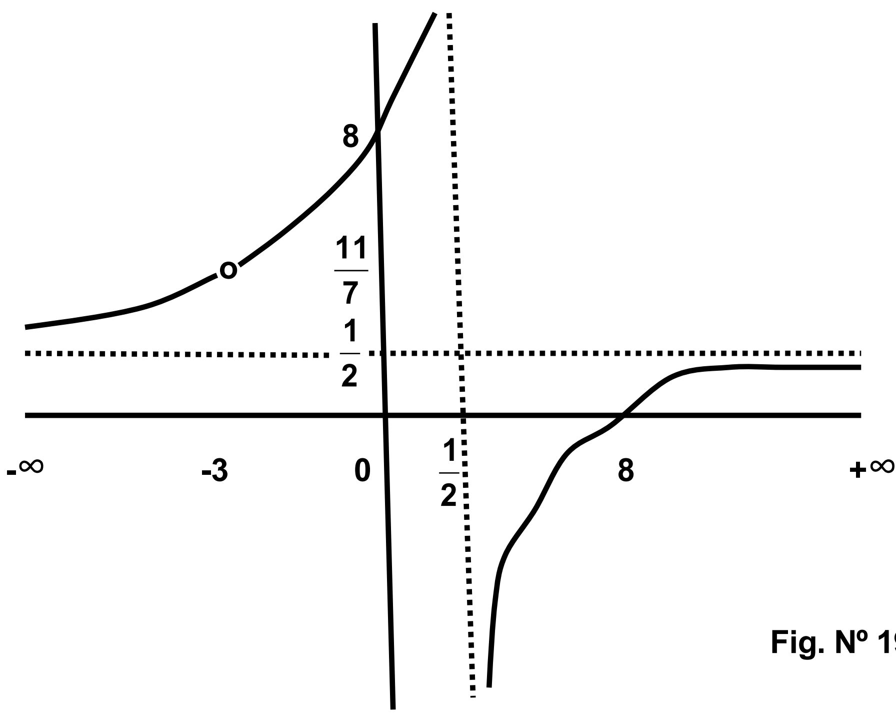


Fig. Nº 19

EJERCICIOS PROPUESTOS

LÍMITES

4. Comprobar por medio de la definición de límite que se cumplen:

b. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-5} = \frac{-1}{2}$ b. $\lim\limits_{x \to 3}(3x-9) = 0$ c. $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 = 12$ d. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2$

f. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 5x + 2) = 16$ f. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$ g. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7}{x-5} = -\frac{7}{3}$ h. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-5}{4x+3} = \frac{1}{2}$

j. $\lim\limits_{x \to -4} \frac{8}{x-2} = -\frac{4}{3}$ j. $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 + 15x - 63) = 16$ k. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ l. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{8}{x+9}$

n. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+5}{x-1} = \infty$ n. $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \frac{x^2}{3}) = 1$ o. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-3}{x^2-1} = 0$ p. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+5}{3x+2} = \frac{2}{3}$

r. $\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{4x-5} - \sqrt{3}) = 0$ r. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4x}{5x-2} = 1$ s. $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+2}\right)$ t. $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

v. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{9x+2} = \frac{1}{3}$ v. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x-5}{3x^2+4} = 0$ w. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{4x+9} = 5$ x. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+5}{x+7} = \infty$

z. $\lim\limits_{x \to a}(\sqrt{x^2} - a) = 0$ z. $\lim\limits_{x \to 0}(ax^2 + ax + a^2) = 3a^2$

5. Aplicando las propiedades de límite y de los números reales, hallar los siguientes límites:

a) $\mathrm{l}\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5+1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$ e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ h) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - (\pi + 1)x + \pi}{x^3 - \pi^3}$ i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{4 + x}{6 - x}\right]^x$ m) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right]^{x+1}$ n) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \dfrac{1}{x})^x$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lg(1 + 10x)}{x}$ p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

CONTINUIDAD

6. Realizar las siguientes gráficas aproximadas y estudiar la función en los puntos de discontinuidad, si los hay

b. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-1 & \text{si } -2\le x<0 \\ 3 & \text{si } 0\le x<1 \\ -2x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ b. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x<4 \\ x^2 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ c. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x<3 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

e. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x<2 \\ 3 & \text{si } 2\le x<4 \\ 5 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ e. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x>4 \end{cases}$ f. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } \ge 1 \end{cases}$

h. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ x+1 & \text{si } 2<x\le 5 \\ 6 & \text{si } 5<x<7 \end{cases}$ h. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } 4<x\le 5 \\ 1-x & \text{si } x>5 \end{cases}$ i. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

k. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 5 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ x-1 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ k. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ l. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2 & \text{si } 1<x<3 \\ 5 & \text{si } 3\le x<5 \end{cases}$

m. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 9 & \text{si } x>3 \end{cases}$ n. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ o. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

q. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$ q. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ r. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

t. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x<4 \end{cases}$ t. $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ \text{Ln}x & \text{si } x>0 \end{cases}$ u. $f(x)=\begin{cases} \lg_3 x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } 0<x<4 \\ 2x-3 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

w. $f(x)=\begin{cases} |x-3| & \text{si } x<-2 \\ e^{2x+1} & \text{si } -2\le x\le 0 \\ \dfrac{3}{x-2} & \text{si } 0<x<2 \end{cases}$ w. $f(x)=\begin{cases} 2.400 & \text{si } 0\le x\le 40 \\ 80x-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } 40<x<80 \\ 40x & \text{si } x\ge 80 \end{cases}$

y. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ 5 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ x-1 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ y. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0\le x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } 2\le x<4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$

4. Una función está dada por la fórmula:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{cuando } x\neq 2 \\ A & \text{cuando } x=2 \end{cases}$$

¿Cómo debe elegirse el valor de la función A=f(2) para que la función f(x), completada de esta forma, sea continua cuando x=2?. Construir la gráfica de f(x).

5. Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

d. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ b. $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ c. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

e. $f(x)=\dfrac{x^2+x-x}{x+2}$ f. $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+x^2-12x+4}{x^3-6x^2+11x-6}$ g. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

h. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x-3}$ i. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{3x-5}$ j. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ k. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x}$

l. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ m. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ n. $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$ o. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

p. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3}$ q. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$ r. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ s. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

t. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ u. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$ v. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x}$ w. $f(x)=1-\dfrac{2}{x^3}$

x. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ y. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x-3}$ z. $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$

CAPÍTULO V

APLICACIONES DE LA DERIVADA

En este capítulo se estudiara: APLICACIONES A LA DERIVADA: Recta tangente, Recta normal, Teorema de L-Hopital, Funciones crecientes, Funciones decrecientes, Teorema de Rolle, Teorema del valor medio, Puntos críticos de la primera derivada, puntos de separación, Máximo relativo o máximo local, Mínimo relativo o Mínimo local. Valores extremos, Máximo absoluto, Mínimo absoluto, Teorema del valor extremo, Intervalos de concavidad y convexidad, Puntos de inflexión, Criterio de la segunda derivada, Puntos críticos de la segunda derivada, Criterio de la segunda derivada para extremos relativos, como dibujar un grafico de una función cualquiera, Aplicaciones de la derivada en problemas de Administración, Contaduría y Economía, Empresa, Función demanda, Función oferta, Gastos, Costo variable, Función costo total, Costos fijos Costo marginal, Costo promedio, Ingreso total, ingreso marginal, Beneficio o ganancias o utilidad, Utilidad marginal, Razón de cambio, Razón de cambio promedio, Razón de cambio instantánea, Razón de cambio relacionadas, Elasticidad (Tasa de cambio porcentual) Elasticidad Arco, Elasticidad Punto, Elasticidad de la Demanda, Elasticidad Cruzada, Ingreso Total, Ingreso Marginal y Elasticidad de la Demanda. Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

Definición 1: Se define la *recta tangente* a una curva, como la recta que pasa por el punto $P_0(x_0,f(x_0))$ y tiene pendiente $m=f'(x_0)$, es decir, $y= f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Definición 2: Se define la *recta normal* a una curva como aquella recta perpendicular a la recta tangente en el punto $P_0(x_0,f(x_0))$, es decir,

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

Para hallar la recta tangente o normal se seguirán los siguientes pasos:

1. **Se halla la primera derivada de la función**
2. **Se sustituye el punto en el cual se va ha hallar la recta tangente o normal en la primera derivada (pendiente de la recta tangente o normal)**
3. **Se sustituye la pendiente y el punto en las ecuaciones para hallar la recta tangente o normal según sea el caso**
4. **Se opera en las ecuaciones descritas anteriormente**

Ejemplo: Hallar la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^2 + 2x + 5$, en el punto (2,4).

Solución:

1. $f'(x_0)=2x + 2$
2. $f'(x_0)=2(2) + 2 \Rightarrow f'(2)=6$

3. Recta tangente: $y=6(x-2)+4 \Rightarrow y=6x-8$

4. Recta normal: $y=-\frac{1}{6}(x-2)+4 \Rightarrow x+6y-26=0$

<u>Teorema 1:</u> <u>Regla de L' - Hopital</u>: Sea $H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x) \to 0$ o $(f(x) \to \infty)$ y $g(x) \to 0$ o $(g(x) \to \infty)$ cuando $x \to x_0$, entonces $L=\lim\limits_{x \to x_0} H(x)$, tiende a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, si este es el caso L se puede hallar de la siguiente manera:

$$L=\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x \to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}\,..........=\lim_{x \to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

, en los casos cuando la indeterminación es de la forma: $0.\infty$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, 1^{∞}, ∞^{0}, ∞^{∞}, 0^{∞}, 0^{0}, $\infty - \infty$, se pueden convertir en las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$ aplicando las propiedades de los números reales.

<u>Ejemplo</u>: Aplicando la regla de L-Hopital hallar los siguientes límites:

$$L=\lim_{x \to \infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}$$

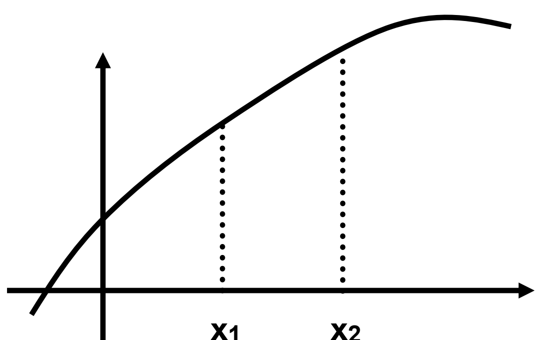
<u>Solución:</u> $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$, satisface las condiciones, luego: $f(x)=e^x \Rightarrow$

$f'(x)= e^x \Rightarrow f(x)''= e^x$; $g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow g''(x)=2$, entonces tenemos que :

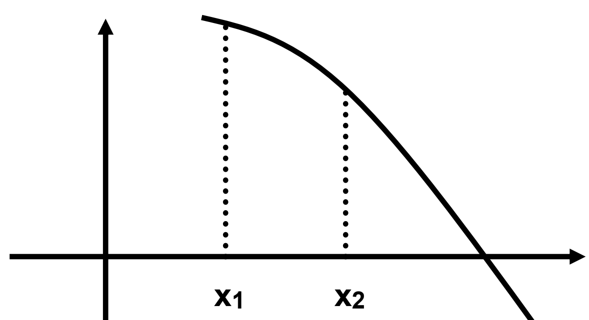
$$L=\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \Rightarrow L=\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} =\infty \Rightarrow L\to \infty$$

<u>Definición 3</u>: Sea $f: A \to B$ una función definida en un intervalo (abierto, semiabierto o semicerrado y cerrado)

1. Se dice que f es ***<u>creciente</u>*** en este intervalo si para cualquier par de puntos x_1, x_2 perteneciente al intervalo se tiene que: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
2. Se dice que f es ***<u>decreciente</u>*** en este intervalo si para cualquier par de puntos x_1, x_2 perteneciente al intervalo se tiene que: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) >f(x_2)$

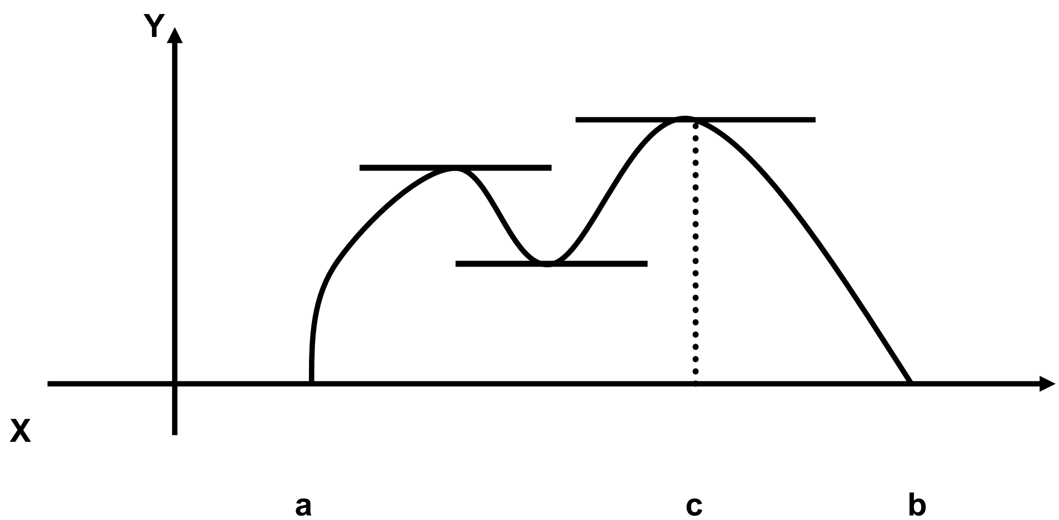


Creciente



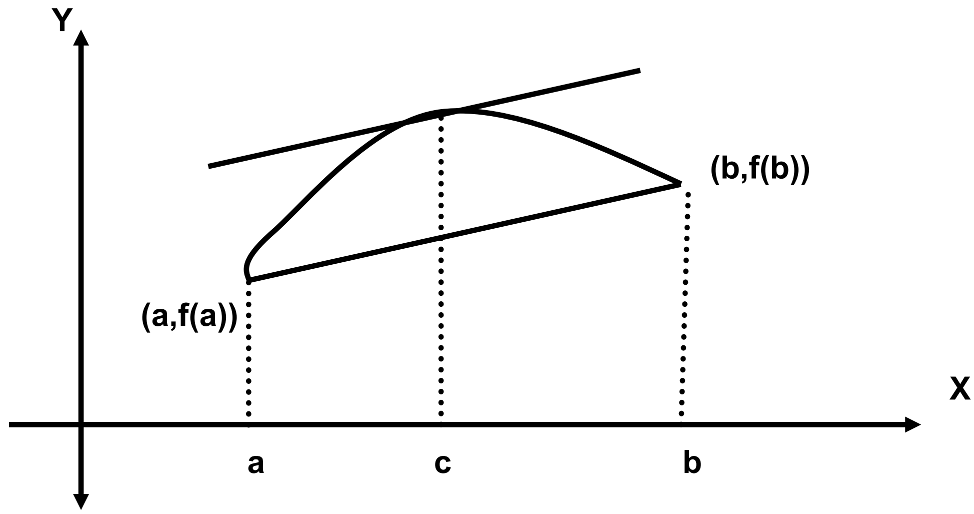
Decreciente

<u>Teorema 2:</u> (*Teorema de Rolle*) Sea a<b. Si f: A → B es continua en el intervalo cerrado [a,b], diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y f(a)=f(b)=0. entonces existe c en el intervalo (a,b) tal que f'(c)=0.Geométricamente, este teorema dice que, si el grafico de una función continua corta el eje X en dos puntos y tiene una tangente en todo punto entre estos dos, entonces debe tener al menos una tangente horizontal en un punto intermedio.



<u>Teorema 3:</u> (*Teorema del Valor medio*) Sea a<b. Si f: A → B es continua en el intervalo cerrado [a,b] y es diferenciable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un punto tal que: f(b) – f(a)=f'(c).(b – a), este teorema también se puede escribir:

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $p_1=(a,f(a))$ y $p_2=(b,f(b))$ y $f'(c)$ es la pendiente de la tangente en el punto $(c,f(c))$.



Luego, el teorema del valor medio nos dice que, si el grafico de una función continua tiene una tangente en cada punto entre a y b, entonces la tangente en algún punto entre a y b debe ser paralela a la recta que pasa por $p_1=(a,f(a))$ y $p_2(b,f(b))$.

Teorema 4: sea $f: A \rightarrow B$, una función continua en el intervalo I y diferenciable en todo punto interior de I (excluyendo los extremos).

1. Si $f'(x)>0$ en todo el interior de I, entonces f es *creciente* en I.
2. Si $f'(x)<0$ en todo el interior de I, entonces f es *decreciente* en I.

Demostración;

1. Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I tales que $x_1<x_2$. Por el teorema del valor medio tenemos que: $f(x_2) - f(x_1)=f'(c).(x_2 - x_1)$, para algún $c\in(x_1,x_2)$.

Como $f'(c)>0$ y $x_2 - x_1>0$, concluimos que $f(x_2) - f(x_1)>0$. Luego, $f(x_1)<f(x_2)$, como x_1 y x_2 fueron tomados al azar en I, se concluye que f es creciente en I.

2. **Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I tales que $x_1<x_2$. Por el teorema del valor medio tenemos que: $f(x_2) - f(x_1)=f'(c).(x_2 - x_1)$, para algún $c\in(x_1,x_2)$.**

   Como $f'(c)<0$ y $x_1 - x_2>0$, concluimos que $f(x_1) - f(x_2)>0$. Luego, $f(x_1)>f(x_2)$, como x_1 y x_2 fueron tomados al azar en I, se concluye que f es decreciente en I.

<u>Definición 4:</u> Se definen los *puntos críticos de la primera derivada* a aquellos puntos donde la derivada no existe o donde la derivada se anula, es decir, los puntos donde la derivada no existe son aquellos puntos de discontinuidad, y los puntos donde la derivada se anulan son los puntos donde la recta tangente tiene pendiente cero (0).

<u>Ejemplo:</u> Probar que la función $f(x)=\sqrt{x}$, es creciente.

<u>Solución:</u> Esta función está definida en en intervalo $[0,\infty)$, en el cual f es continua. Además f es diferenciable en el intervalo $(0,\infty)$ y se cumple que: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\geq 0,\ \forall x\in(0,\infty)$.

Luego, por la parte 1 del teorema anterior, se concluye que $f(x)=\sqrt{x}$, es creciente en todo su dominio $[0,\infty]$.

<u>Ejemplo</u>: Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$f(x)=2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

<u>Solución</u>: Para resolver este problema seguiremos los siguientes pasos:

1. **Hallamos el dominio de la función, que en este caso es: Domf=$\Re$**
2. **Se hallan los puntos de discontinuidad si es que los hay, como en este caso el dominio es todos los reales no hay ningún punto de discontinuidad.**
3. **Hallamos la derivada de la función, es decir, $f'(x)=6x^2 - 6x - 12$,**
4. **Se hallan los puntos críticos de la primera derivada, en este caso como la función es continua en toda la recta real, solamente habrán puntos críticos donde la derivada se anula, esto implica que $f'(x)=0$, o sea, $6x^2 - 6x - 12=0 \Rightarrow x^2 - x - 2=0$**

   $\Rightarrow (x - 2)(x + 1)=0$ esto implica que los puntos críticos son $x_1=-1$ y $x_2=2$, estos puntos críticos también reciben el nombre de *puntos de separación*.
5. **Se obtienen los intervalos de crecimientos y decrecimientos con los puntos críticos, siempre habrán (n + 1) intervalos de crecimientos y decrecimientos dependiendo de los puntos críticos, en nuestro caso los intervalos de crecimiento y decrecimientos son:**

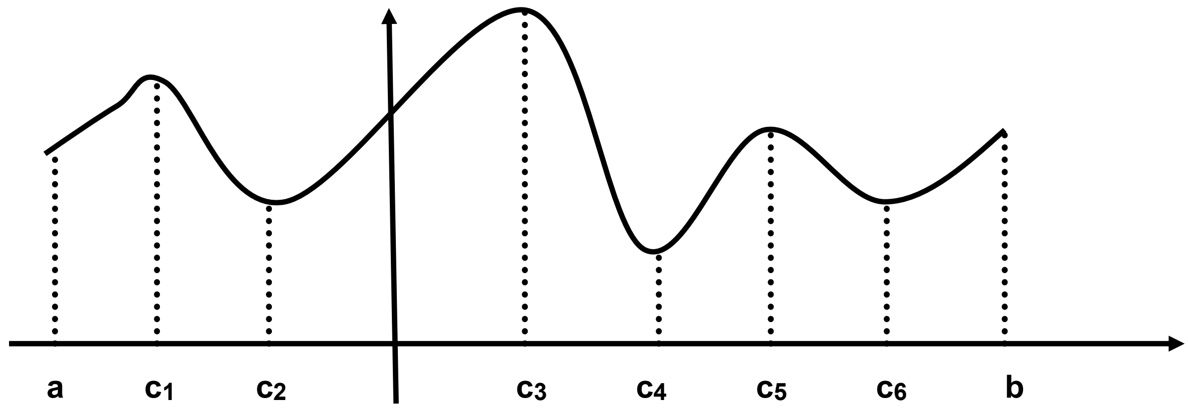
$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
f'(-2)>0	**f'(0)<0**	**f'(3)>0**
Crece	**decrece**	**crece**

6. **Se sustituyen puntos de prueba, en cada uno de los intervalos y según lo visto anteriormente si el signo es positiva la función viene creciendo y si el signo es negativo la función viene decreciendo, como f'(-2) es positivo la función en el intervalo $(-\infty,-1)$, viene creciendo, de la misma manera en el intervalo (-1,2) la función decrece y $(2,\infty)$ la función crece.**

<u>Definición 5:</u> Sea f: A $\rightarrow$ B, se dice que f tiene un *máximo relativo o máximo local* en el punto c, si existe un intervalo abierto que contiene a c y contenido en el dominio de f tal que f(c)$\leq$ f(x) $\forall x \in I$.

<u>Definición 6:</u> Sea f: A $\rightarrow$ B, se dice que f tiene un *mínimo relativo o mínimo local* en el punto c, si existe un intervalo abierto que contiene a c y contenido en el dominio de f tal que f(c)$\geq$ f(x) $\forall x \in I$.

A los máximos y mínimos relativos se les da el nombre de *Valores extremos relativos*

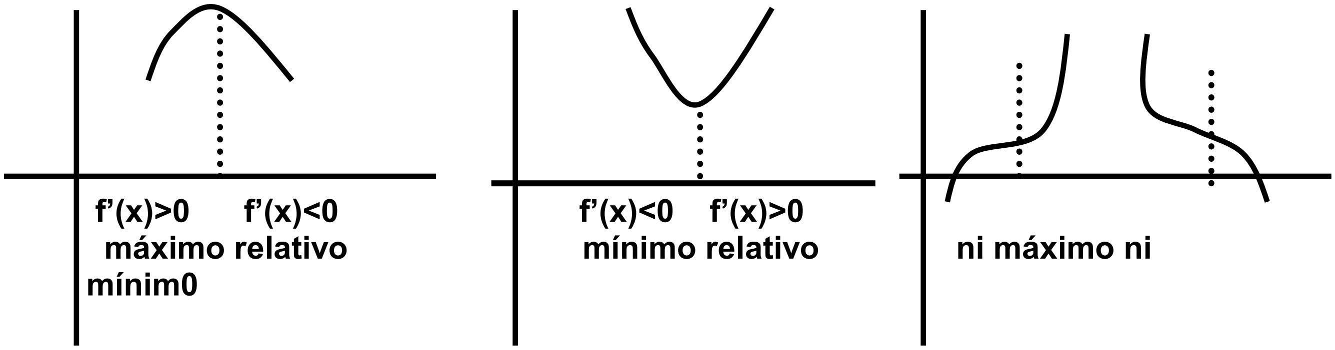


La figura posee máximos relativos en los puntos c_1, c_3, y c_5 y tiene mínimos relativos en los puntos c_2, c_4 y c_6. Los extremos relativos de f son $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$, $f(c_5)$ y $f(c_6)$.

Teorema 5: (Criterio de la primera derivada para extremos relativos). Sea $f: A \to B$, una función continúa en un intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$ un punto crítico de f., entonces:

1. Si $f'(c)>0$ en un intervalo abierto a la izquierda de c y si $f'(c)<o$ en un intervalo abierto a la derecha de c, entonces f tiene un máximo relativo en el punto (c,f(c)), es decir, si una función en un intervalo viene creciendo, luego la derivada se anula y empieza a decrecer estamos en presencia de un punto máximo relativo.
2. Si $f'(c)<0$ en un intervalo abierto a la izquierda de c y si $f'(c)>0$ en un intervalo abierto a la derecha de c, entonces f tiene un mínimo relativo en el punto (c,f(c)), es decir, si una función en un intervalo viene decreciendo, luego la derivada se anula y empieza a crecer estamos en presencia de un punto mínimo relativo.

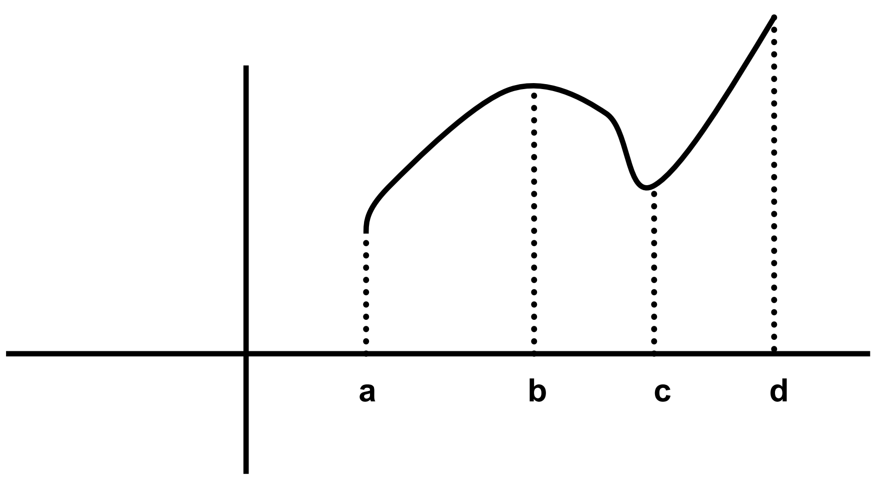
3. Si en un intervalo abierto a la izquierda de c y en un intervalo abierto a la derecha de c, f'(c) tiene el mismo signo, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en c.



<u>Definición 7:</u> Sea f: A → B y D⊆A. Diremos que f tiene un *máximo absoluto* sobre D, si ∃c∈D/f(c)≥ f(x), ∀x

<u>Definición 8:</u> Sea f: A → B y D⊆A. Diremos que f tiene un mínimo absoluto sobre D, si ∃c∈D/f(c)≤f(x), ∀x

El número f(a) y f(d) recibe el nombre de *máximo o mínimo absoluto* y f(b) y f(c) *máximo relativo y mínimo relativo de* f sobre D.



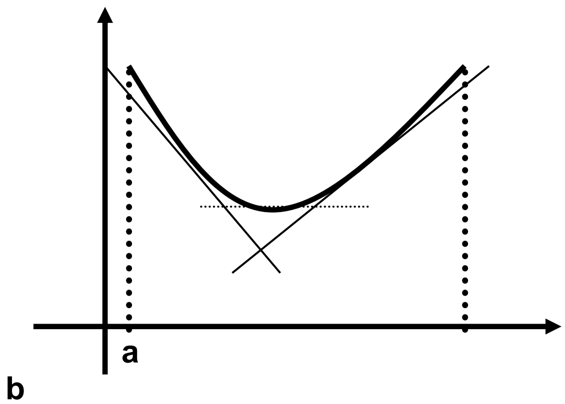
La función tiene un mínimo absoluto en a, un máximo relativo en b, un mínimo absoluto en c y un máximo absoluto en d.

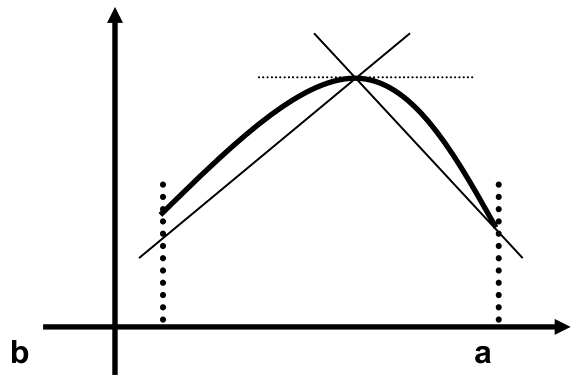
<u>Teorema 6:</u> (*Teorema del Valor extremo*). Si f: A $\rightarrow$ B es una función continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre [a,b].

Para determinar los valores extremos absolutos de una función continúa de f: A $\rightarrow$ B en un intervalo cerrado [a,b], se procede de la siguiente manera.

1. Se encuentran los valores de la función en los puntos críticos de f que están en el intervalo [a,b].
2. Se encuentran los en los extremos de la función, es decir f(a) y f(b).
3. El máximo absoluto es el mayor de los valores y el mínimo absoluto el menor de los valores hallados.

<u>Definición 9:</u> El gráfico de una función es *cóncava o cóncava hacia arriba* si el grafico está siempre encima de cualquier recta tangente; y es *convexa o cóncava hacia abajo* si el grafico esta siempre por debajo de cualquier recta tangente.





Cóncava hacia arriba **Cóncava hacia arriba**

Criterio de concavidad

$a<x<b \Rightarrow x\in(a,b)$	**El gráfico de f en (a,b)**
$f''(x)>0$	**Es cóncavo hacía arriba**
$f''(x)<0$	**Es cóncava hacia abajo**

Definición 10: **Un punto sobre el gráfico de una función que cambia de cóncavo a convexo, es decir de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo o viceversa, se llama *punto de inflexión.* Si (c,f(c)) es un punto de inflexión de la función $f: A \rightarrow B, / \ y=f(x)$, para los x cercanos a c debe cumplirse que los signos de $f''(x)$ antes de c y después de c deben ser distintos. En el mismo punto c la derivada $f''(x)$ puede no existir. Si existe debe cumplirse que $f''(x)=0$.**

Para hallar los puntos de inflexión de una función se seguirán los pasos siguientes:

a. **Se encuentran los *puntos críticos de la segunda derivada* que son aquellos puntos donde la derivada no existe o donde la segunda derivada se anula,**

b. Se estudia el signo de f'' a la izquierda y derecha de cada uno de los puntos críticos de la segunda derivada, utilizando para ello puntos de prueba. Si en un intervalo la función es cóncava hacia arriba o cóncavo hacia abajo y cambia a cóncavo hacia abajo o cóncavo hacia arriba respectivamente entonces se dice que existe un punto de inflexión en ese punto y su imagen.

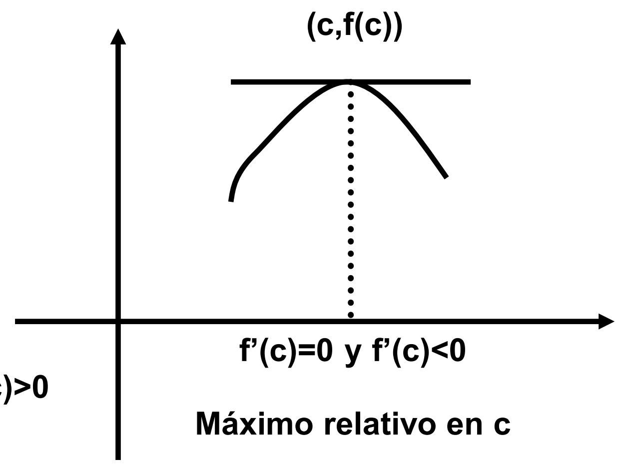
<u>Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.</u>

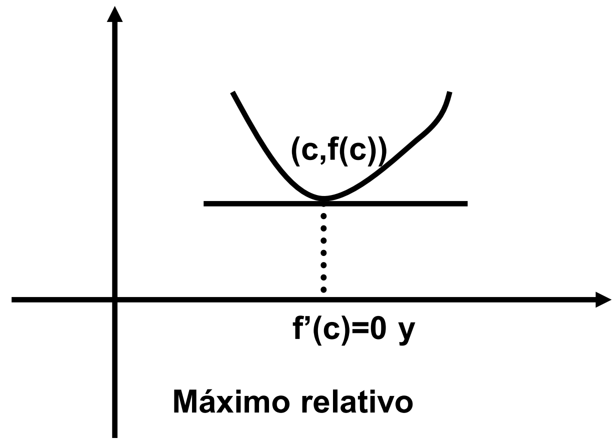
La segunda derivada nos proporciona un criterio muy sencillo y practico para determinar la naturaleza de los puntos críticos de la primera derivada de una función definida en un intervalo. Este criterio establece lo siguiente:

Si	y si	Entonces f tiene
$f'(c)=0$	$f(c)>0$	Un mínimo relativo
$f'(c)=0$	$f''(c)<0$	Un máximo relativo

La condición $f'(c)=0$ nos dice que c es un punto critica de la primera derivada de la función. La condición $f''(c)>0$ y el criterio de concavidad nos dice que, cerca de c, el gráfico de f es cóncavo hacia arriba. En este caso, concluimos que f tiene un mínimo relativo en c.

Similarmente, la condición $f''(c)$ y el criterio de concavidad nos dice que, cerca de c, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo. En este caso concluimos que f tiene un máximo relativo en c.





f’(c)=0 y f’(c)<0 f’(c)=0 y

f(c)>0

Máximo relativo en c Máximo relativo

en c

El criterio de la segunda derivada nos dice si f’’(c)=0 nada se concluye. Puede ser máximo, o mínimo o ninguno de los dos.

<u>Como dibujar el grafico de una función cualquiera</u>

Para realizar la grafica de una función sea esta de cualquier tipo seguiremos los siguientes pasos:

1. Se halla el dominio de la función.
2. Se describen los puntos de discontinuidad, si es que los hay.
3. Se estudia la función cerca de cada uno de los puntos de discontinuidad si es que los hay.
4. Se estudia la función en los extremos.
5. Se hallan los cortes con los ejes de coordenados si es que los hay.
6. Se halla la primera derivada de la función.
7. Se halla la segunda derivada de la función

8. Se hallan los puntos críticos de la primera derivada.

9. Se hallan los puntos críticos de la segunda derivada.

10. Se hallan los intervalos de crecimientos y decrecimientos.

11. Se hallan los máximos y mínimos relativos, si es que los hay

12. Se hallan los intervalos de concavidad

13. Se hallan los puntos de inflexión, si es que los hay.

14. Se realiza la gráfica de la función con todos los datos anteriores.

<u>Ejemplo:</u> Realizar la gráfica de la siguiente función:

$f(x)=-x^4 + 6x^2 - 1$

<u>Solución:</u> $f(x)=-x^4 + 6x^2 - 1$, se seguiremos los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:

1. Domf=$\Re$

Como la función esta definida en todos los reales, no existe punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. Estudio de la función en los extremos:

$$\lim_{x \to -\infty}(-x^4 + 6x - 1) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty}(-x^4 + 6x - 1) = -\infty$$

3. Corte con los ejes de coordenados:

corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ $-x^4 + 6x^2 - 1=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-\sqrt{3+\sqrt{8}}$,

$x_2=-\sqrt{3-\sqrt{8}}$, $x_3=\sqrt{3-\sqrt{8}}$ y $x_4=\sqrt{3+\sqrt{8}}$

corte con el eje y $\Rightarrow$ (x=0) $\Rightarrow$ y=-1

4. Primera derivada: $f'(x)=-4x^3 + 12x$.

5. Segunda derivada: $f''(x)=-12x^2 + 12$

6. Puntos críticos de la primera derivada:

$f'(x)=0 \Rightarrow -4x(x^2 - 3)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-\sqrt{3}$ y $x_3=\sqrt{3}$

7. Puntos críticos de la segunda derivada: $f''(x)=0 \Rightarrow -12(x^2 - 1) \Rightarrow$ $x_1=-1$, y $x_2=1$

8. Intervalos de crecimientos y decrecimientos:

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(-2)>0$	$f'(-1)<0$	$f'(1)>0$	$f'(2)<0$
Crece	Decrece	Crece	Decrece

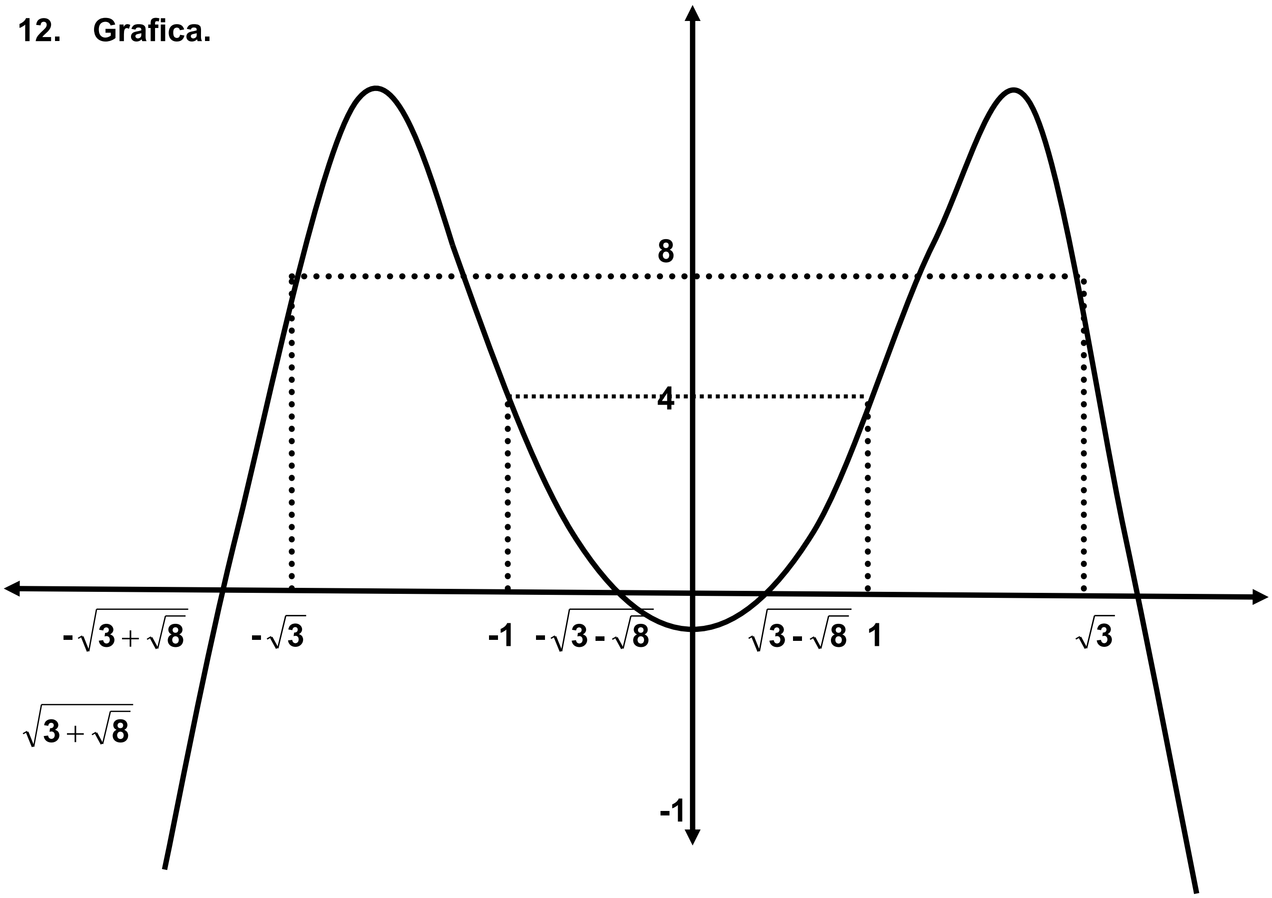
9. Máximos y mínimos: $\exists$max $(-\sqrt{3},8)$, $\exists$mín $(0,-1)$ y $\exists$max $(\sqrt{3},8)$

10. Intervalos de concavidad:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$F''(-2)<0$	$f''(0)>0$	$f''(2)<0$
Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

11. Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en $(-1,4)$ y $(1,4)$.

12. Grafica.


8
4
$-\sqrt{3+\sqrt{8}}$
$-\sqrt{3}$
-1
$-\sqrt{3-\sqrt{8}}$
$\sqrt{3-\sqrt{8}}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3+\sqrt{8}}$
-1

APLICACIONES DE LA DERIVADA EN PROBLEMAS DE ADMINISTRACIÓN, CONTADURÍA Y ECONOMIA

Definición 11: Se define la *empresa* como las unidades económicas de producción, encargadas de la adquisición de factores de producción y su introducción en el proceso productivo, para la elaboración de los productos y su posterior venta en los mercados. Como estás unidades económicas no elaboran los productos para su propio consumo sino que los llevan al mercado para su venta, en consecuencia no persiguen la satisfacción de sus necesidades, sino la obtención de un beneficio, de allí proviene el que se le denomine también *unidades económicas lucrativas,* puesto que tratan de adquirir ganancias.

Definición 12: Se define la *función demanda* (D(p)), como la cantidad de mercancía demandada por los consumidores a un precio p. $D_p=x$ o $p=f(x)$

Definición 13: Se define la *función oferta* (S(p)), como la cantidad de mercancía que los productores están dispuestos a ofrecer a los consumidores a un precio p. $X=S(p)$ o $p=f(x)$.

Definición 14: Los *gastos* son los egresos totales de producción en las que incurren las empresas, cuya cuantía se conoce para cada volumen de la misma, así su representación gráfica según la correspondiente función.

<u>Definición 15:</u> Los *costos variables* (C_v) son los costos en los cuales incurre la empresa al variar el volumen de producción, para un período determinado, ejemplo: la mano de obra, compra de materia prima, etc.

<u>Definición 16:</u> Los *costos fijos* (C_f) son los egresos que realiza la empresa, los cuales no varían con el volumen de producción para un período determinado, ejemplo: la renta, gastos de propaganda, etc.

<u>Definición 17:</u> Se define la *función costo Total* (C(x)), como el costo de producir x objetos. La variable x representa el número de objetos producidos de cierta mercancía: $C_t(x)=C_ux$: Cu: costo unitario

Si el *costo total y* de producir y comercializar *x* unidades de un artículo se suponen que están en función de *x* solamente, entonces, la función *costo total* se puede representar mediante la expresión; *y=f(x)*.

Las funciones de *costo* tienen las siguientes propiedades:

1. **Cuando el número de unidades producidas es igual a cero, el *costo total* es nulo o positivo, es decir, $f(0)\geq 0$. si $f(0)>0$, entonces, f(0) representa el *costo fijo* (o los *costos fijos*) de producción.**
2. **El *costo total* se incrementa a medida que aumenta *x*, así que *f'(x)* es siempre positiva.**
3. **El *costo total* de producir una cantidad en extremo grande de cualquier artículo, alcanza por lo general un punto en el cual aumenta con taza creciente. Por lo tanto, y en términos generales, la curva de *costo total* a partir de cierto valor de *x* es cóncava**

hacia arriba, es decir, f''(0)>0; sin embargo en los niveles iniciales de producción la curva de *costo total* suele ser cóncava hacia abajo, lo que corresponde a un *costo marginal* decreciente.

4. Si la función *costo total* se representa por $y=f(x)$, entonces, el *costo promedio* (*costo promedio por unidad*) es: $\bar{y}=\frac{y}{x}=\frac{f(x)}{x}$, y el *costo marginal* es: $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$. La primera derivada del *costo promedio* (*costo marginal promedio*) es: $\bar{y}'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$ sii $xf'(x)-f(x)=0$, esto es, $f(x)=xf'(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{x}$. Así pues, el *costo promedio* es mínimo para aquel valor de *x* según el cual dicho *costo medio* y *marginal* son iguales; es decir, las curvas de *costo marginal* y *costo promedio* se cortan en el punto mínimo del citado *costo promedio*. Observe que el valor de *x* (si existe) para el cual $\frac{dy}{dx}=0$, se supone que es el mínimo debido a la tercera propiedad de las curvas de *costo* antes mencionadas; en el caso de una curva particular de *costo total*, la existencia de ese mínimo puede ser comprobada en forma usual.

Definición 18: Se definen los *ingresos* como aquellos que constituyen la recaudación bruta, que en ocasiones es conocida por la denominación de volumen de ventas o cifras de negocios.

<u>Definición 19:</u> Se define el *ingreso total* (I(x)), como el obtenido de las ventas de una cantidad x de una mercancía. $I(x)=P_u x$, P_u: Precio unitario.

<u>Definición 20:</u> Se define el *beneficio, o ganancia, o utilidad* (B(x), o G(x) o U(x)), como la ganancia obtenida al vender una cantidad x de una mercancía.

$B(x)$ o $G(x)$ o $U(x)=I(x) – C_t(x)= I(x) – C_t(x)= P_u x – C_u x=(P_u – C_u)x$.

<u>Definición 21:</u> Se define las funciones medias, como la razón de la variación de una magnitud entre la variación de la otra magnitud en un intervalo completo que va desde cero (0) hasta un determinado valor elegido. Como por ejemplo el costo medio, expresa la relación entre el costo total y el número de cantidades producidas, es decir:

$$C_m=\frac{C_t}{x}=\frac{\text{costo total}}{\text{cantidad producida}}$$

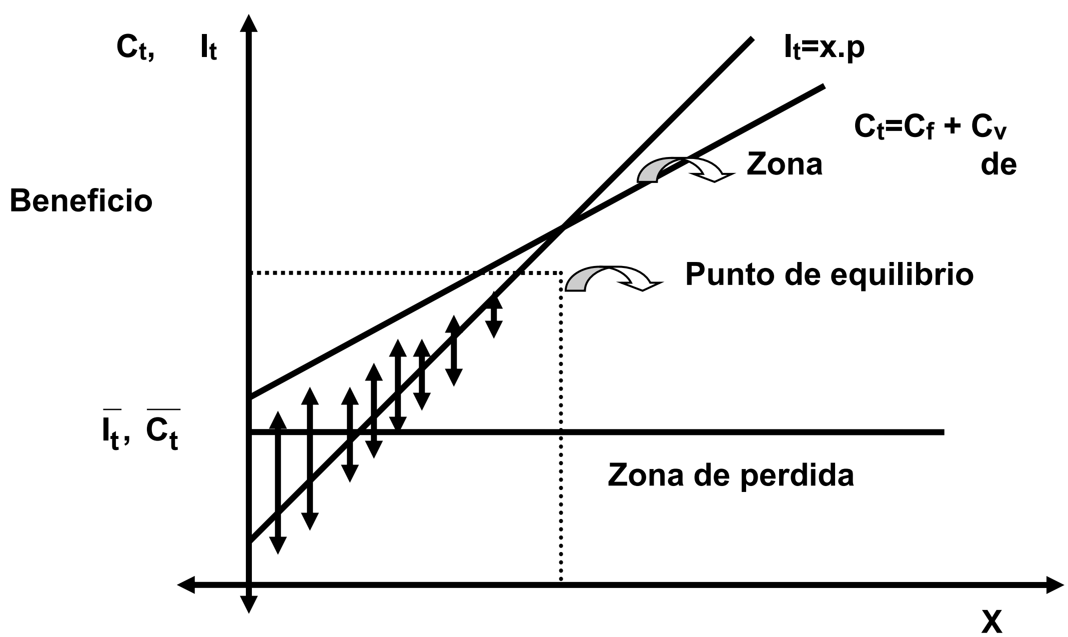
<u>Definición 22:</u> El concepto de marginal se refiere al cambio de una variable respecto a un cambio muy pequeño de la otra, a partir de un valor determinado, por ejemplo, el costo marginal significa el cambio que experimenta el costo cuando, en cierto nivel de producción, se aumenta una cantidad adicional. Resulta evidente que la definición de marginal sólo posee un sentido preciso cuando se considera como límite al tender a cero (0), es decir, debe interpretarse matemáticamente

como la derivada de la función que relaciona el costo con la producción.

Para resolver problemas de aplicación de máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivada procederemos de la siguiente manera:

1. Se obtiene el modelo, si no lo dan.
2. Se halla la primera derivada del modelo.
3. Se halla la segunda derivada.
4. Se hallan los puntos críticos de la primera derivada.
5. Se sustituyen los puntos críticos de la primera derivada en la segunda derivada, si al sustituirlos nos resulta que la segunda derivada es mayor que cero, estamos en presencia de un mínimo, si nos resulta menor que cero estamos en presencia de un máximo y si nos da igual que cero no nos da ninguna información.

Representación gráfica de las funciones ingresos y costos



<u>Ejemplo:</u> La función costo de cierta compañía viene expresada por: $C(x)=x^2 - 7x + 9$. Hallar el costo marginal.

<u>Solución:</u> Como el costo marginal es la derivada del costo total, tenemos: $C'(x)=2x - 7$

<u>Definición 16:</u> La razón de cambio es otro nombre que se da a la derivada cuando ésta es vista como el límite de un cociente (razón) incremental. Por definición, si x es un punto del dominio de la función y=f(x), entonces:

$$f(x)= L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow L = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h}$$, donde,

$\Delta y=f(x_0 + h) - f(x_0)$ y $h=x - x_0$.

El incremento $\Delta y==f(x_0 + h) - f(x_0)$ mide el cambio experimentado por y=f(x) cuando x cambia de x= a $x_0 + h$. El cociente $\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$, es la *razón de cambio promedio* de y respecto a x, cuando x cambia de x_0 a $x_0 + h$. El límite de este cambio promedio cuando $h \to o$ es la *razón de cambio instantánea* de y respecto a x en x_0.

Si y=f(x)=, la razón (taza) de cambio relativa de y respecto a x en x_0 es $\frac{f'(x_0)}{f(x)}$. La razón (taza) de cambio porcentual de y respecto a x en x_0 es $100\frac{f'(x_0)}{f(x)}$.

<u>Ejemplo:</u> Se ha determinado que la utilidad anual de una corporación está dada por: $U(t)=\frac{1}{4}t^2 + 2t + 20$, donde U(t) es dada en millones de bolívares y t en años, contados a partir del 2 de enero de 1.997.

a. Hallar la taza a la cual estuvo creciendo la utilidad dos años después (1º de enero de 1.999)

b. Hallar la taza a la cual estará creciendo la utilidad el 1º de enero del año 2002.

c. Hallar la taza de crecimiento relativo de la utilidad dos años después del 1º de enero de 1997.

d. Hallar la taza de crecimiento porcentual de la utilidad dos años después del 1º de enero de 1997.

<u>Solución:</u> a. Nos piden la razón de cambio de U(t) cuando t=2, esto es, nos piden U'(2), entonces, $U'(t)=\frac{1}{2}t + 2$ y $U'(2)= \frac{1}{2}(2) + 2=3$, luego el 1º de enero de 1.999, la utilidad estuvo creciendo a la taza de 3 millones de bolívares por año.

a. Nos piden hallar U'(t) cuando t=5 años, entonces $U'(5)= \frac{1}{2}(5) + 2 \Rightarrow u'(t)=\frac{9}{2}$, luego el 1º de enero del 2002, la utilidad estará creciendo a la taza de 4.5 millones por año.

b. Nos piden $\frac{U'(2)}{U(2)} = \frac{3}{\frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) + 25} \Rightarrow \frac{U'(2)}{U(2)} = \frac{3}{25} = 0.12$, por lo tanto, la taza de cambio relativa de la utilidad dos años después es de 0.12.

c. Nos piden $100\frac{U'(2)}{U(2)} = \frac{300\%}{\frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) + 25} \Rightarrow \frac{U'(2)}{U(2)} = \frac{300\%}{25} = 12\%$, por lo tanto, la taza de cambio porcentual de la utilidad dos años después es de 12%.

Definición 17: Si se tiene que y=f(x) y x=φ(x), por las derivadas paramétricas tenemos que: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}$, la cual interpreta en términos de razón de cambio, la razón de cambio de y respecto a t es igual a la razón de cambio de y respecto a x multiplicada por la razón de cambio de x con respecto a t. Cuando se tiene esta situación de las tres razones de cambio reciben el nombre de *Razones de cambio relacionadas.*

ELASTICIDAD (TASA DE CAMBIO PROPORCIONAL)

En muchos casos se necesita considerar la *tasa de cambio* de una función, que es el cambio en el valor funcional (variable dependiente *y*) con respecto a un cambio pequeño en la variable independiente *x.* Es decir, $\frac{dy}{dx}$. Así mismo, en ocasiones interesa evaluar la *tasa de cambio proporcional*, o sea, la razón del cambio relativo (o proporcional) de la variable dependiente *y*, al cambio relativo (o proporcional) de la variable independiente *x*, que se

conoce también como *elasticidad* de *y* con respecto a *x.* Tal concepto matemático mide la respuesta proporcional de *y* a los cambios proporcionales en *x*. la *elasticidad* de una función no tiene unidades debido a que las magnitudes empleadas en su definición son cambios relativos o por unidad. Por lo tanto, la *elasticidad* resulta ser independiente de las unidades en que se expresan las variables consideradas.

Existen dos conceptos de *elasticidad*, la llamada *elasticidad---arco* y la denominada *elasticidad---punto*. La *elasticidad---arco* corresponde a la *elasticidad* de una función entre dos puntos, es decir, en un arco o segmento de línea. La *elasticidad---punto* (o simplemente *elasticidad*) es la que corresponde a una función en un punto especifico.

Si y=f(x), la *elasticidad* de *y* con respecto a *x* se expresa en primer término por: $\frac{Ey}{Ex}=\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{x}{y}*\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y a medida que $\Delta x \to 0$, se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{dy}{dx}$. $\Rightarrow$ $\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}*\frac{dy}{dx}$. La *elasticidad* se simboliza también por η (letra griega eta), es decir, que $\eta=\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}*\frac{dy}{dx}$. En general la *elasticidad* de una función depende de su ámbito de variación.

<u>*La elasticidad---arco*</u>: se evalúa mediante las siguientes fórmulas entre los puntos $p_0(x_0,y_0)$ y $p_1(x_1,y_1)$.

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x_0}{y_0}*\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{x_0}{y_0}*\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x_1}{y_1}*\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{x_1}{y_1}*\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}*\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}*\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

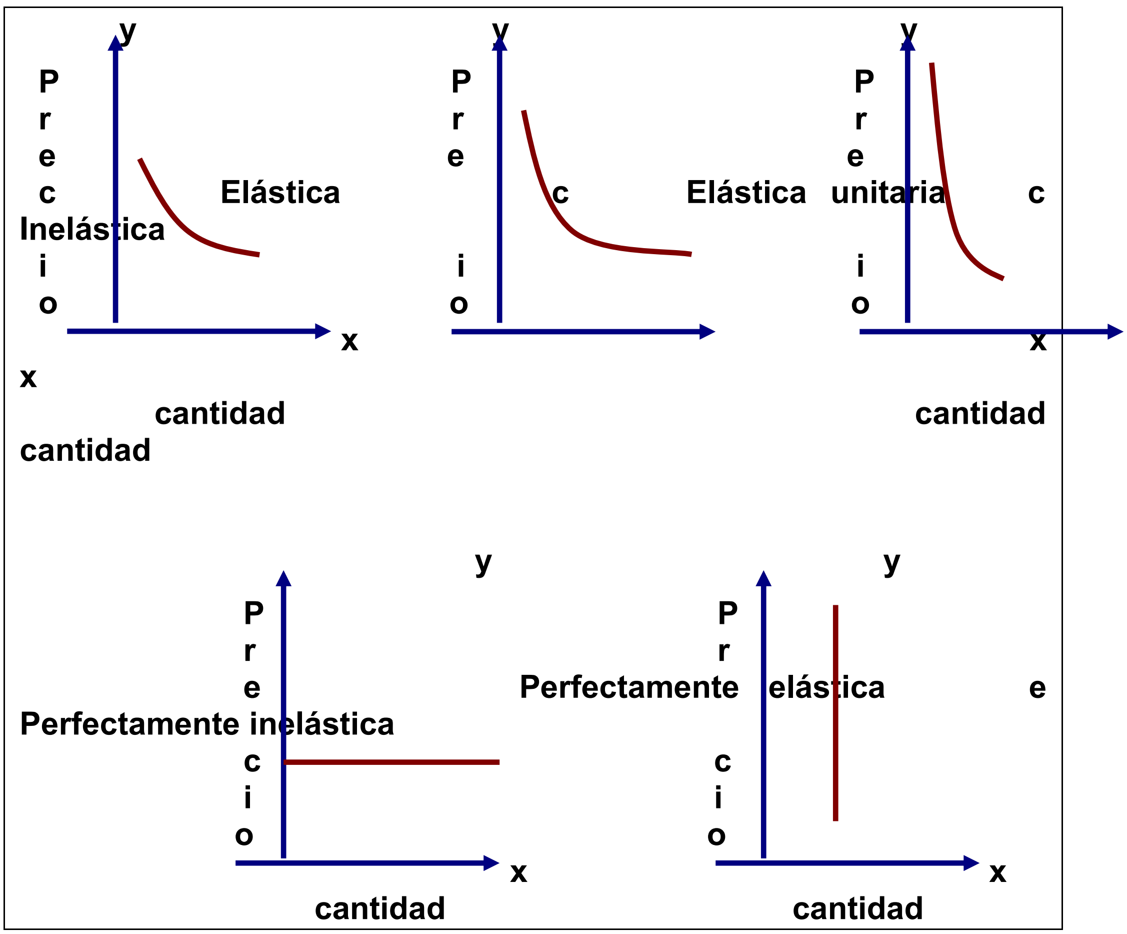
La primera fórmula da una aproximación de la *elasticidad---punto* en $p_0(x_0,y_0)$. La segunda fórmula proporciona un valor aproximado a la *elasticidad—punto* en $p_1(x_1,y_1)$. La tercera fórmula corresponde a un valor medio de la elasticidad---arco entres los puntos $p_0(x_0,y_0)$ y $p_1(x_1,y_1)$.

<u>*Elasticidad---punto:*</u> en el caso de la *elasticidad* o *elasticidad---punto* de *y= f(x)* en el $p_0(x_0,y_0)$ es: $\eta=\frac{Ey}{Ex}=\frac{x_0}{y_0}*\frac{dy}{dx}\Big|_{x_0,y_0}$ y en general, *la elasticidad* de *y* con respecto a *x* está dada por:

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}=\frac{x}{y}*\frac{dy}{dx}$$

<u>*Elasticidad de la demanda:*</u> el empleo clásico del concepto de *elasticidad* en el análisis de la capacidad de respuesta de la cantidad demandada de un artículo por cambios de su precio. Dado que la pendiente de una gráfica de demanda es negativa, su primera derivada es también negativa, y por lo tanto, $\eta \leq 0$. en vista de que la *elasticidad* no tiene unidades, puede compararse la

respuesta de las cantidades demandadas de diversos bienes ante cambios de sus precios. Para este fin, la demanda suele clasificarse en categorías generales como: *perfectamente elástica* ($\eta \to \infty$), *relativamente elástica* (η < -1), *elástica unitaria* (η =-1), *relativamente inelástica* (-1<η<0), y *perfectamente inelástica* (η=0). Por tanto, la demanda es *elástica* si $|\eta|$>1, *elástica unitaria* si $|\eta|$=1, e *inelástica* si $|\eta|$<1 ilustremos estos con las siguientes gráficas.



La *elasticidad de la demanda* según el precio, o *elasticidad precio* de la demanda por un bien, es de sumo interés en las operaciones de una empresa; por ejemplo si la demanda es *elástica* en un precio dado, la reducción del precio aumentara la cantidad demandada en una mayor proporción que la reducción del precio, de modo que resulta incrementando al ingreso total, que es el producto del precio y la cantidad. De manera semejante, cuando la demanda es de *elasticidad unitaria*, el ingreso total no se altera por una reducción en el precio; cuando la demanda es *inelástica*, disminuye el ingreso total por un incremento en el precio.

<u>Elasticidad Cruzada:</u> el concepto de *elasticidad cruzada* sirve para medir la relación que existe entre las demandas de dos o más artículos. La *elasticidad cruzada* evalúa la respuesta de la cantidad demandada por un bien ante cambios de precio de otro. La *elasticidad de la demanda* por A con respecto a B se define como:

$$\frac{Ex_A}{Ey_B} = \frac{\frac{dx_A}{x_A}}{\frac{dy_B}{y_B}} = \frac{y_B}{x_A} * \frac{dx_A}{dy_B}$$

, y la *elasticidad arco cruzada* cuando y_B cambia de y_{B0} a y_{B1} y x_A cambia de x_{A0} a x_{A1} determina por:

$$\frac{EX_A}{EY_B} = \frac{Y_{B0} + Y_{B1}}{X_{A0} + X_{A1}} * \frac{X_{A1} - X_{A0}}{Y_{B1} - Y_{B0}}$$

, en donde las x_A son las cantidades de A, las y_B son los precios de B, y se supone constante el precio de A. La *elasticidad de la demanda* por B respecto al precio A se define de modo semejante.

Dado que convencionalmente se expresan las funciones de demanda como *y=f(x)*, en donde *y* es el precio y *x* es la cantidad demandada, y la *elasticidad de la demanda* comprende la derivada $\frac{dx}{dy}$, las ecuaciones y graficas deben leerse con cuidado para evitar malas interpretaciones.

INGRESO TOTAL, INGRESO MARGINAL Y ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Para cualquier función dada *y=f(x)*, el ingreso total (*i*) es el producto de *x*, el número de unidades demandadas, e *y*, el precio por unidad de la cantidad demandada. *I=x*y=x*f(x)* y el ingreso marginal con respecto a la cantidad demandada es: $\frac{dI}{dx} = x * \frac{dy}{dx} + y$. La elasticidad de la demanda con respecto al precio es: $\eta = \frac{Ex}{Ey} = \frac{y}{x} * \frac{dx}{dy}$ y dado que,

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{y}{x} * \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x\left(\frac{Ex}{Ey}\right)}$$, así pues, $$\frac{dI}{dx} = \frac{y}{\frac{Ex}{Ey}} + y \Rightarrow \frac{dI}{dx} = y\left(1 + \frac{1}{\frac{Ex}{Ey}}\right).$$

En forma alternativa $$\frac{dI}{dx} = x * \frac{dy}{dx} + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = y\left(\frac{x}{y}\frac{dx}{dy} + 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dx} = y\left(1 + \frac{Ey}{Ex}\right) \Rightarrow \frac{dI}{dx} = y\left(1 + \frac{1}{\frac{Ex}{Ey}}\right)$$. Esto es, el ingreso marginal es el producto del precio unitario y la expresión uno más el recíproco de la

elasticidad de la demanda. Ya que tanto *x* como *y* son nulos o positivos, el ingreso total *I=xy*, es así mismo, cero o positivo; sin embargo, el ingreso marginal puede ser positivo o negativo. Lógicamente I podría ser considerado también como una función del precio *I=xy=yg(y)=G(y)* y el ingreso con respecto al precio definirse como $\frac{dI}{dy} = y * \frac{dx}{dy} + x$

Ejercicios Resueltos

1. Hallar la recta tangente y normal a la curva f(x)= $\sqrt{x-2}$, en el punto x=6.

   Solución: Siguiendo los pasos:

1. $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

2. $f'(6) = \frac{1}{2\sqrt{6-2}} = \frac{1}{4}$ y $f(6) = \sqrt{6-2} = 2$

3. Recta tangente: $y = \frac{1}{4}(x-6) + 2 \Rightarrow x - 4y + 2 = 0$

4. Recta normal: $y = -4(x-6) + 2 \Rightarrow 4x + y - 26 = 0$

2. Hallar la recta tangente y normal a la curva "bruja de Agnesi" $f(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, en el punto x=2a.

   Solución: Como no dan el valor de y_0, lo obtenemos y seguido a esto operamos los pasos descritos anteriormente.

1. $f(2a) = \frac{8a^3}{4a^2 + 4a^2} = a$

2. $f'(x_0)=\dfrac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$

3. $f'(2a)=-\dfrac{32a^4}{64a^4}=\dfrac{1}{2}$

4. Recta tangente: $y=-\dfrac{1}{2}(x-2a)+a \Rightarrow x+2y+4a=0$

5. Recta normal: $y=2(x-2a)+a \Rightarrow y=2x-3a$

3. **Hallar la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^3+y^3=4xy^2+1$ en el punto (2,1).**

Solución:

1. $f'_x=3x^2-4y^2,\ \ f'_y=3y^2-8xy \Rightarrow y'=\dfrac{3x^2-4y^2}{y(8x-3y)}$

2. $y'_{(2,1)}=\dfrac{12-4}{16-3}=\dfrac{8}{13}$

3. Recta tangente: $y=(x-2)+1 \Rightarrow 8x-13y-+13=0$

4. Recta normal: $y=-\dfrac{13}{8}(x-2)+1 \Rightarrow 13x+8y-34=0$

4. **Aplicando la regla de L-Hopital hallar los siguientes límites:**

a. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ c. $L=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

Solución a: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}=\dfrac{0}{0}$, como L satisface las condiciones del teorema, tenemos: $f(x)=e^{x}+e^{-x}-2 \Rightarrow f'(x)=e^{x}-e^{-x} \Rightarrow f(x)''=e^{x}+e^{-x}$ y $g(x)=x^{2} \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow g''(x)=2$, entonces tenemos que:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}} \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1 \Rightarrow L\to 1$$

Solución b: $L=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^{2}-x-6}\right)=\infty-\infty$, como L no satisface las condiciones, pero resolviendo la suma de fracción nos resulta que:

$$L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+2-5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x^{2}-x-6}\right)=\frac{0}{0},$$

ahora L si satisface las condiciones del teorema de L-Hopital, luego:

$f(x)=x-3 \Rightarrow f'(x)=1$

$g(x)=x^{2}-x-6 \Rightarrow g'(x)=2x-1$

$$L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{1}{5} \Rightarrow L\to\frac{1}{5}$$

5. Hallar los extremos absolutos y relativos de la siguiente función $f(x)=x^{4}-2x^{2}$ en el intervalo [-2,2].

Solución: i. Hallamos el dominio de la función en el intervalo [-2,2], Domf=[-2,2].

ii. **Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=4x^3 - 4x$.**

iii. **Hallamos los puntos críticos de la primera derivada. Como la función está definida en todo el intervalo [-2,2], los únicos puntos críticos es donde la derivada se anula, e.i. $f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1)=0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 1)=0 \Rightarrow x=-1, x=0$ y $x=1$**

iv. **Se hallan los intervalos de crecimiento y decrecimiento y se analiza el signo de la derivada, tomando en cada intervalo un punto de prueba.**

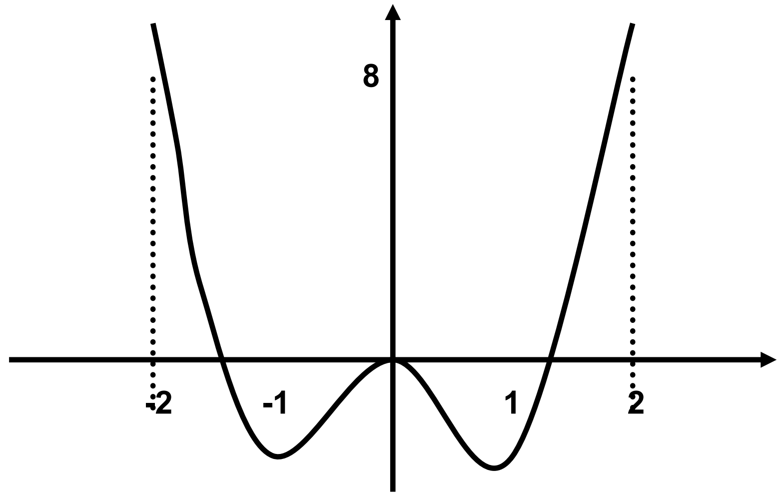
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(-2)<0$	$f'(-0,5)>0$	$F'(0,5)<0$	$f'(2)>0$
Decrece	Crece	Decrece	Crece

v. **Aplicamos el criterio de la primera derivada: $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=-1$, $f(-1)=-1$, f tiene un máximo relativo en $x=0$, $f(0)=0$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=1$, $f(1)=-1$**

vi. **Se hallan los extremos absolutos sustituyendo en la función los valores $x=-2$ y $x=2 \Rightarrow f(-2)=8$ y $f(2)=8$.**

vii. **Conclusión: hay un máximos relativos en el punto (0,0), y dos mínimo relativos en los puntos (-1,-1) y (1,-1), que coinciden con los mínimos absoluto, y los máximos absolutos están en los puntos (-2,8) y (2,8).**

viii. **Gráfica.**



6. **Realizar la graficas de las siguientes funciones:**

a. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, b. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, c. $f(x)=xe^{-x}$, d. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

Solución a: $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ se seguirá los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:

1. Domf$=\Re$ - $\{\pm 2\}$

2. Puntos de discontinuidad $x_1=-2$ y $x_2=2$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad.

$$L=\lim_{x\to -2} f(x)=\pm\infty,\ L=\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty,\ L=\lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty,$$

$$L=\lim_{x\to 2} f(x)=\pm\infty,\ L=\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\ L=\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

4. Estudio de la función en los extremos:

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1, \; L = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

5. **Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ x=0 $\Rightarrow$ (0,0)**

6. **Primera derivada: f'(x)=** $\dfrac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$

3. **Segunda derivada: f''(x)=** $\dfrac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

4. **Puntos críticos de la primera derivada: donde la derivada se anula f'(x)=0 $\Rightarrow$ -8x=0 $\Rightarrow$ x_1=0, los puntos críticos donde la derivada no existe: x_1=-2, y x_2=2**

5. **Puntos críticos de la segunda derivada: donde la derivada se anula f''(x)=0 $\Rightarrow$ 8(3x^2 + 8)=0, no hay puntos críticos de la segunda derivada donde se anulen, luego donde la derivada no existe x_1=-2, y x_2=2**

6. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

(-∞,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,+∞)
f'(-2)>0	f'(-1)<0	f'(1)>0	f'(2)<0
Crece	Crece	Decrece	Decrece

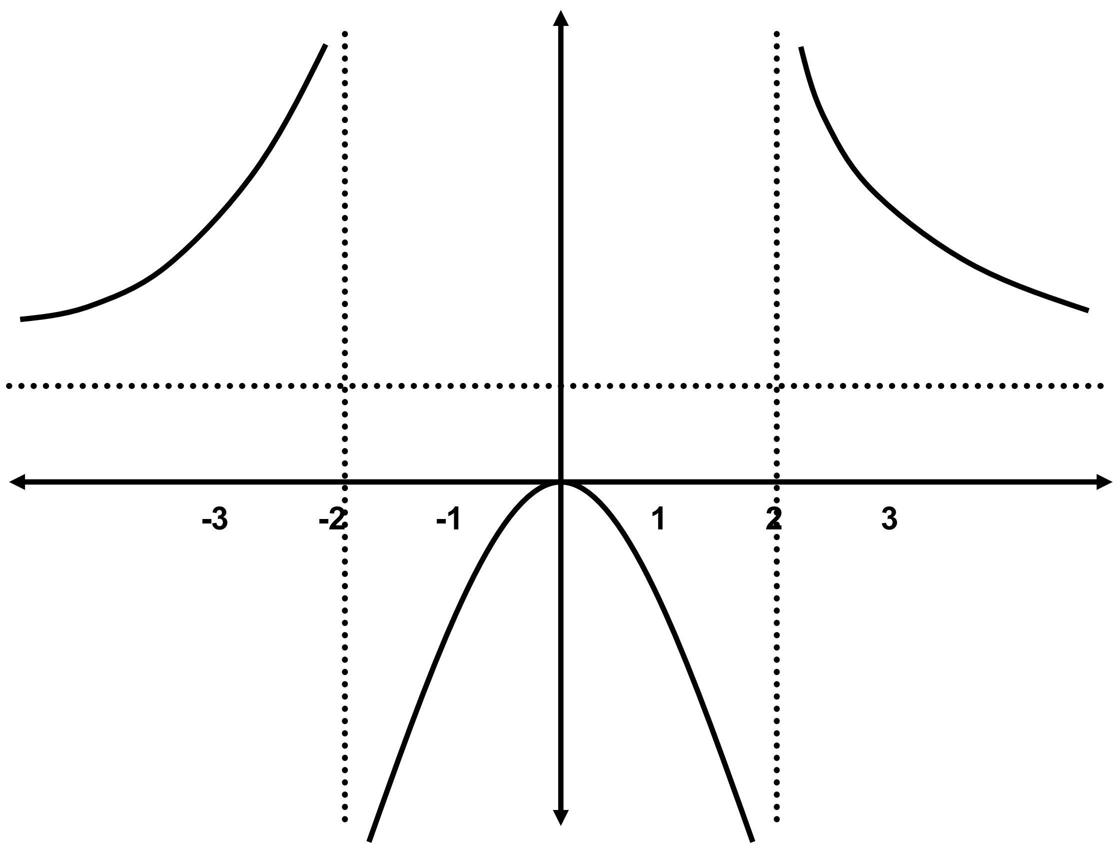
7. **Máximos y mínimos, ∃mín (0,0)**

8. **Intervalos de concavidad:**

$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(-3)>0$	$f''(0)<0$	$f''(2)>0$
Cóncava hacia arriba	**Cóncava hacia abajo**	**Cóncava hacia arriba**

9. Puntos de inflexión: no existen.

10. Gráfica.



<u>Solución b:</u> $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ **se seguirá los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:**

1. **Domf=$\Re$ - {$\pm$1}**

2. **Puntos de discontinuidad $x_1=-1$ y $x_2=1$.**

3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad.**

$$L=\lim_{x\to -1} f(x)=\pm\infty,\quad L=\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty,\quad L=\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty,$$

$$L=\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty,\quad L=\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\quad L=\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

4. Estudio de la función en los extremos:

$$L=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x2-1}}=-\infty\ ;\ L=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x2-1}}=+\infty$$

5. Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ x=0 $\Rightarrow$ (0,0)

6. Primera derivada: $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$

7. Segunda derivada: $f''(x)=\dfrac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$

8. Puntos críticos de la primera derivada: donde la derivada se anula $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{3}$ y $x_2=\sqrt{3}$, los puntos críticos donde la derivada no existe: $x_1=-1$, y $x_2=1$

9. Puntos críticos de la segunda derivada: donde la derivada se anula $f''(x)=0 \Rightarrow 2x(9-x^2) \Rightarrow x_1=0$, $x_2=-3$ y $x_2=3$, puntos críticos donde la derivada no existe: $x_1=-1$, y $x_2=1$

10. Intervalos de crecimientos y decrecimientos:

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(-2)>0$	$f'(-1.5)<0$	$f'(0)<0$	$f'(1)<0$	$f'(2)>0$
Crece	Decrece	Decrece	Decrece	Crece

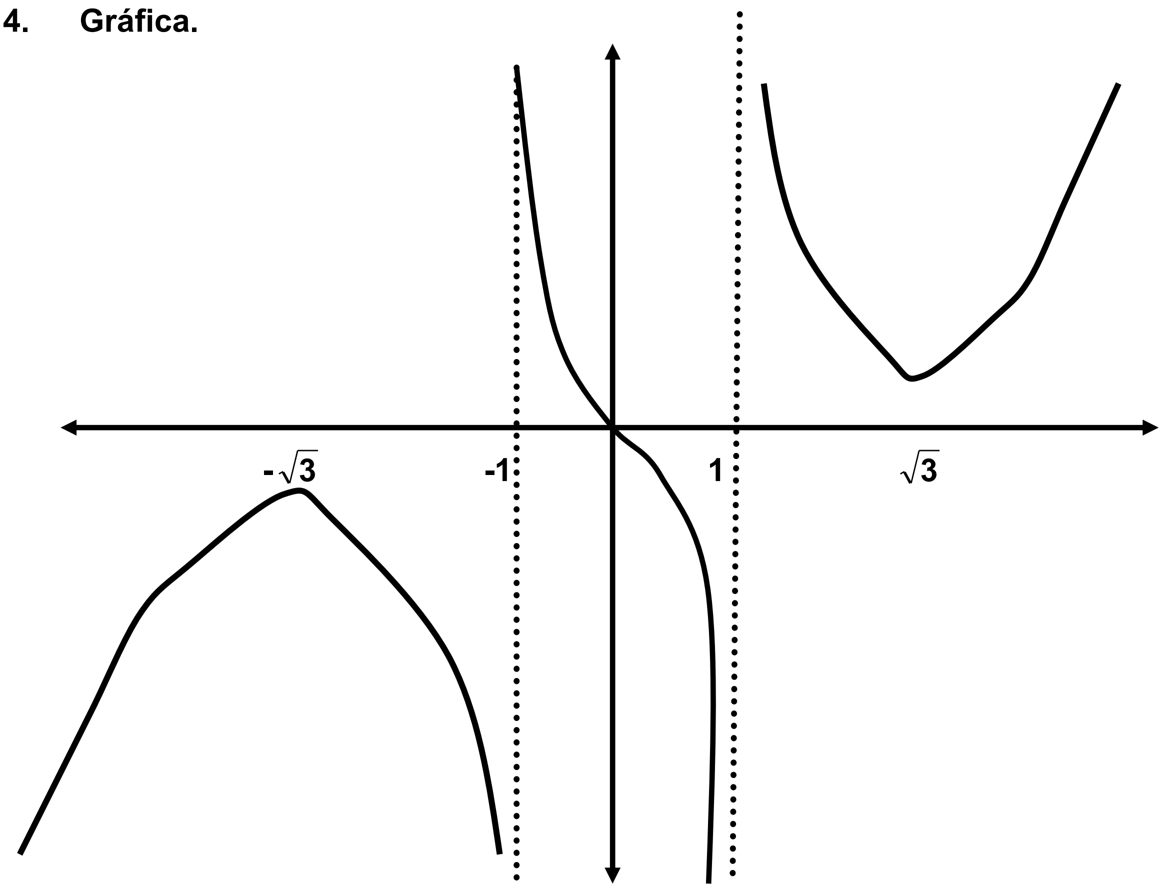
11. Máximos y mínimos: $\exists$max $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$, $\exists$mín $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$

12. Intervalos de concavidad:

$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
F''(-4)<0	f''(-2)>0	f''(-05)>	f''(0.5)<0	f''(2)>0	f''(4)<0
Convexa	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava	Convexa

13. Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en (0,0) y (3,1.5).

14. Gráfica.



Solución c: $f(x)=xe^{-x}$ se seguiremos los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:

1. Domf=$\Re$

Como la función está definida en todos los reales, no existe punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. Estudio de la función en los extremos

$$L = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = +\infty \text{ y } L = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$$

3. Corte con los ejes de coordenados:

corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ (0,0)

corte con el eje y $\Rightarrow$ (x=0) $\Rightarrow$ (0,0)

4. Primera derivada: $f'(x)=e^{-x}(1 – x)$.

5. Segunda derivada: $f''(x)=-e^{-x}(2 – x)$

6. Puntos críticos de la primera derivada: $f'(x)=0 \Rightarrow (1 – x)=0 \Rightarrow x_1=1$

7. Puntos críticos de la segunda derivada: $f''(x)=0 \Rightarrow (2 – x)=0 \Rightarrow x_1=2$

8. Intervalos de crecimientos y decrecimientos:

(-∞,-1)	(1,+∞)
f'(-2)>0	f'(2)<0
Crece	Decrece

9. Máximos y mínimos: $\exists$max $(1, \frac{1}{e})$

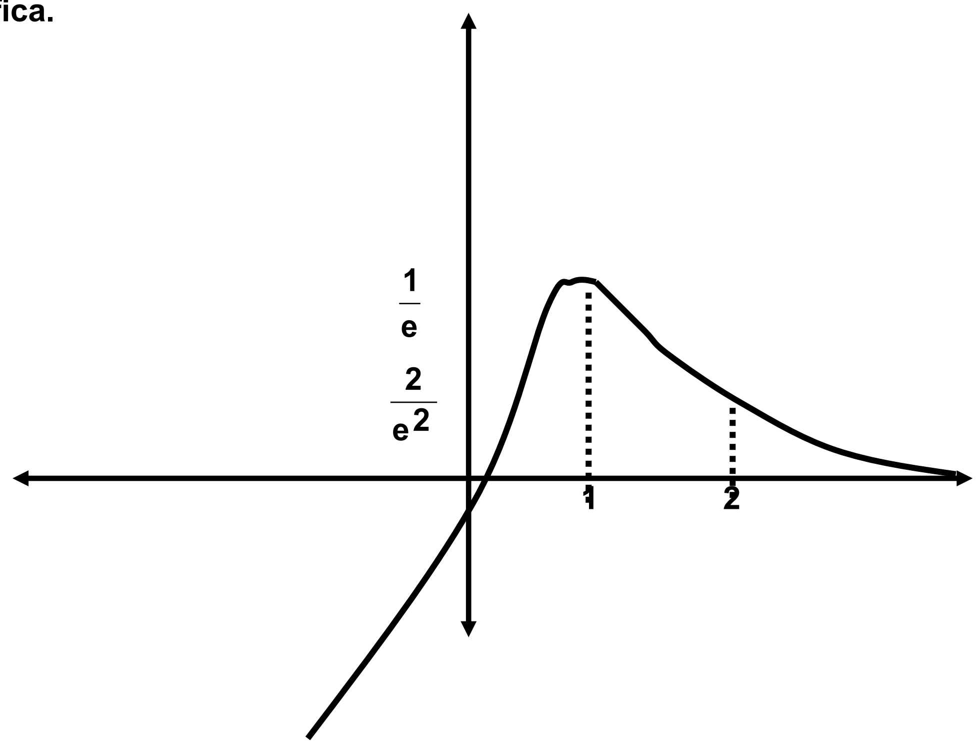
10. Intervalos de concavidad:

(-∞,2)	(2,+∞)
f''(-2)<0	f''(2)>0

Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

11. Puntos de inflexión: ∃ punto de inflexión en $(2, \frac{2}{e^2})$.

12. Gráfica.



Solución d: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ se seguiremos los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:

1. Domf={0,∞}

Como la función está definida en todo el intervalo {0,∞}, no existen punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. Estudio de la función en los extremos $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{0}$ $\Rightarrow$

$L=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{\frac{1}{x}}{1}}$ $\Rightarrow$ L= $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$, ahora podemos aplicar la regla de L'Hopital o sea: f(x)=lnx $\Rightarrow$ f'=$\frac{1}{x}$ y g(x)= $\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ g'=$-\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$

L=$L=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\frac{1}{x3})$ $\Rightarrow$ L $\to$ -∞

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'-Hopital tenemos: f(x)=lnx $\Rightarrow$ f'=$\frac{1}{x}$, g(x)=x $\Rightarrow$ g'=1, por lo tanto, $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}$ $\Rightarrow$ L $\to$ 0

3. Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ lnx=0 $\Rightarrow$ x=1, como la función esta definida en el intervalo (0,∞), no corta al eje y

4. Primera derivada: f'(x)=$\frac{1-\ln x}{x^2}$.

5. Segunda derivada: f''(x)= $\frac{2\ln x - 3}{x^3}$

6. Puntos críticos de la primera derivada: f'(x)=0 $\Rightarrow$ 1-lnx=0 $\Rightarrow$ x=e

7. Puntos críticos de la segunda derivada: f''(x)=0 $\Rightarrow$ 2lnx - 3=0 $\Rightarrow$ x=$e^{\frac{2}{3}}$

8. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

$(0,e)$	$(e,+\infty)$
$f'(1)>0$	$f'(3)<0$
Crece	Decrece

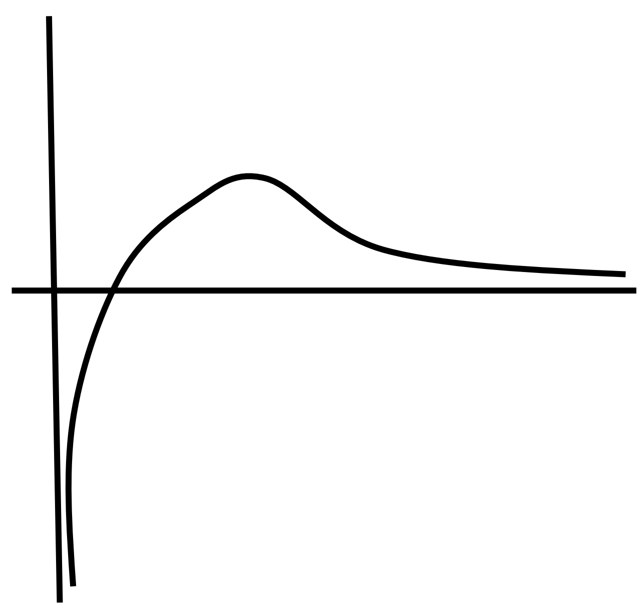
9. **Máximos y mínimos:** $\exists \max \left(e, \frac{1}{e}\right)$

10. **Intervalos de concavidad:**

$\left(0, e^{\frac{2}{3}}\right)$	$\left(e^{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$
$f''(1)<0$	$f''(5)>0$
Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

11. **Puntos de inflexión:** $\exists$ punto de inflexión en $\left(e^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

12. **Gráfica.**



7. **La demanda x de cierta mercancía al precio de p bolívares por unidad es: x=320 – 10p y el costo es C(x)=20 + 2x + $\frac{x^2}{5}$, Hallar: a. La función ingreso, b. El ingreso marginal c. El costo marginal d. La utilidad marginal.**

<u>Solución a:</u> Como la función ingreso viene expresada por: I(x)=xp $\Rightarrow$ p(x)=$\frac{320-x}{10}$ $\Rightarrow$ I(x)=x($\frac{320-x}{10}$)

<u>Solución b:</u> El ingreso marginal es la derivada del ingreso, en consecuencia I'(x)=32 - $\frac{x}{5}$

<u>Solución c:</u> El costo marginal es la derivada del costo, entonces, C'(x)=2 + $\frac{2x}{5}$

<u>Solución d:</u> U(x)=I(x) – C(x) $\Rightarrow$ U(x)= x($\frac{320-x}{10}$) - 20 + 2x + $\frac{x^2}{5}$ $\Rightarrow$ U(x)=30 - $\frac{3x}{5}$

8. **Un hotel tiene 70 habitaciones. El gerente nota que cuando la tarifa por habitación es de Bs. 20.000 todas las habitaciones están ocupadas, y que por cada aumento de Bs. 2.000 se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de Bs. 4.000, ¿qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener máxima ganancia? ¿Cuántas habitaciones se ocupan con esta taifa?**

<u>Solución:</u> 1. Si G(x) es la ganancia del hotel entonces:

G(x)=(habitaciones ocupadas)(tarifa por habitación) – 4.000(habitaciones ocupadas).

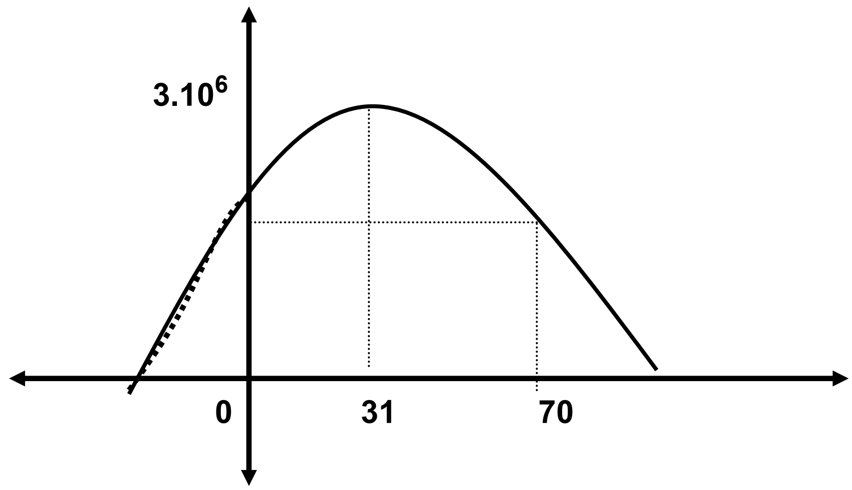
Sea x el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que $0 \leq x \leq 70$. además el número de habitaciones ocupadas es: 70 – x. El incremento en la tarifa es: 2.000x. la tarifa será de 20.000 + 2.000x. Sustituyendo en la función ganancia estos datos, tenemos:

$G(x)=(70 - x)(2.10^4 + 2.10^3x) - 4.10^3(70 - x) \Rightarrow$

$G(x)=11210^4 + 124.10^3x - 2.10^3x^2$. Debemos hallar el máximo absoluto de g(x) sobre el intervalo [0,70]. Para ello buscamos primero el máximo relativo aplicando los pasos descritos anteriormente:

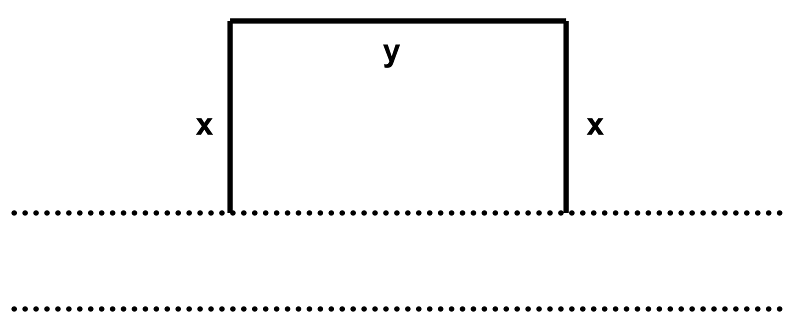
1. **$G(x)=11210^4 + 124.10^3x - 2.10^3x^2$.**
2. **$G'(x)=124.10^3 - 4.10^3x$.**
3. **$G'(x)=-4.10^3$.**
4. **$G'(x)=0 \Rightarrow 124.10^3 - 4.10^3x=0 \Rightarrow x=31$**
5. **Como $G''(x)=-4.10^3<0$, estamos en presencia de un máximo en el punto x=31, que serán el número de habitaciones desocupadas. La grafica es: y la ganancia será de $G(31)= 11210^4 + 124.10^3(31) - 2.10^3(31)^2.=3.10^6$, es decir, de. 3.000.000. de bolívares.**

6. Gráfica:



9. Se quiere construir un potrero rectangular de 5.000mts.2 en un terreno que está a las orillas de un río. ¿Cuáles deben ser la longitud de los lados si se quiere que el costo sea mínimo?

<u>Solución:</u> El costo de la cerca será mínimo, si la longitud de la cerca es mínimo. Sea x las longitudes de los lados del rectángulo. Si P es el perímetro de la cerca, entonces P(x,y)=x + 2y, como el área de un rectángulo es A(x,y)=xy=5.000 $\Rightarrow$ y=$\frac{5.000}{x}$, sustituyendo este valor de y en el perímetro tenemos que nuestro modelo será: P(x)=x + $\frac{10.000}{x}$



1. $P(x)=x + \frac{10.000}{x}$

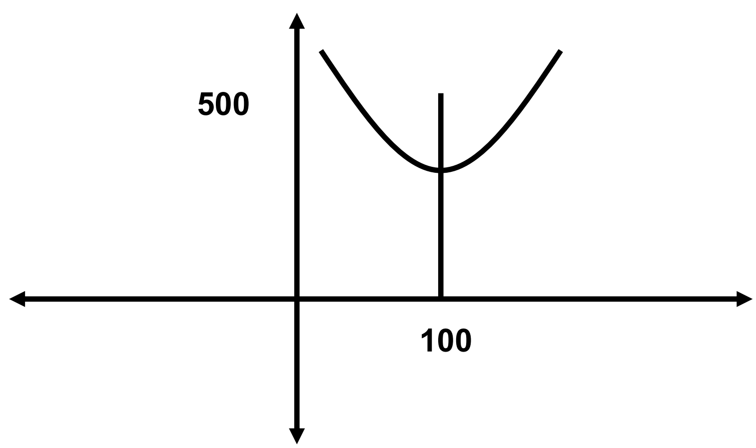
2. $P'(x)=1 - \frac{10.000}{x^2}$

3. $P''(x)=\frac{20.000}{x^3}$.

4. $P'(x)=0 \Rightarrow 1 - \frac{10.000}{x^2}=0 \Rightarrow x=x^2=10.000 \Rightarrow x=100$, como estamos trabajando con unidades de longitud no tomamos $x=-100$

5. Como $P''(100)=\frac{20.000}{100^3}.>0$, estamos en presencia de un máximo en el punto $x=100$, $\Rightarrow y=500$, por lo tanto las longitudes que hacen un costo mínimo son de $x=100$mts. e $y=500$mts.

6. Grafica:



10. El costo diario de producción de una fábrica de zapatos es:

$C(x)=12.000 – 2.400x + \frac{1}{3}x^2$.Bs. donde x es el número de pares de zapatos.

a. ¿Cuántos pares de zapatos se deben producir por día si se quiere que el costo sea mínimo?

b. Hallar el costo promedio de x pares de zapatos.

c. ¿Cuántos pares de zapatos se deben producir por día si se quiere que el costo promedio sea mínimo.

Solución a: 1. Buscamos el punto x del intervalo $(0,+\infty)$ en el cual C(x) alcanza su mínimo absoluto.

2. $C(x)=12.000 - 2.400x + \frac{1}{3}x^2$.

3. $C'(x)=-2.400 + \frac{2}{3}x$

4. $C''(x)= \frac{2}{3}$

5. $C'(x)=0 \Rightarrow -24.10^2 + \frac{2}{3}x=0 \Rightarrow x=3.600$, $\therefore$, hay que producir 3.600 pares de zapatos

Solución b: Como $C''(x)=\frac{2}{3}>0$, estamos en presencia de un mínimo en el punto x=3.600, que serán el número de pares de zapatos diarios. Como C(x) es la ecuación de una parábola, el mínimo relativo coincide con el mínimo absoluto. Por lo tanto, el costo se consigue sustituyendo x=3.600 en la función C(x).

a. El costo promedio no es más que: $M(x)=\frac{C(x)}{x} \Rightarrow$

$$M(x)= \frac{12.000 - 2.400x + \frac{1}{3}x^2}{x} \Rightarrow M(x) = \frac{1}{3}x + \frac{12.000}{x} - 2.400$$

b. Buscamos el punto x del intervalo (0,+∞) en el cual M(x) alcanza su mínimo absoluto.

1. $M(x) = \frac{1}{3}x + \frac{12.000}{x} - 2.400$

2. $M'(x) = \frac{1}{3} - \frac{12.000}{x^2}$

3. $M''(x) = \frac{24.000}{x^3}$

4. $M'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{12.000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 60\sqrt{10}$, como los zapatos son una variable discreta tenemos que redondear el valor de x $\Rightarrow$ x=60

5. Como $M''(x) = \frac{24.000}{(60)^3}$ >0, estamos en presencia de un mínimo en el punto $x = 60$, por lo tanto tienen que producirse 60 pares de zapatos diarios.

11. Se desea construir una caja, abierta por arriba, cuyo volumen sea máximo, de una pieza de hojalata, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para forma las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud máxima del lado de los cuadrados cortados?

<u>Solución:</u> 1. Sea x el del cuadrado más pequeño, entonces la altura y y la base z vendrá dado por: y=a – 2x, z=a – 2x y por lo tanto, el volumen que es igual a V=xyz $\Rightarrow$ $V=x(a-2x)^2$

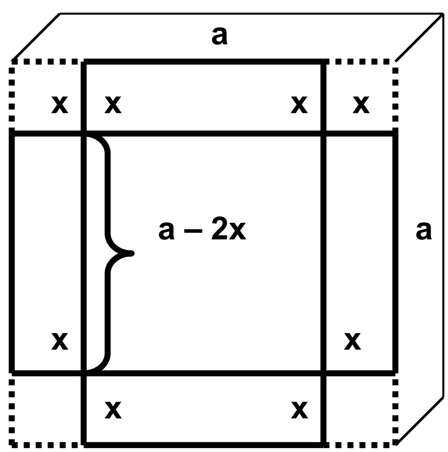
2. $V' = a^2 - 8ax - 12x^2$

3. $V''=-8a - 24$

4. Los puntos criticos de la primera derivada : $V'=0 \Rightarrow a^2 - 8ax - 12x^2=0 \Rightarrow (a - 2x)(a- 6x)=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}$ y $x=\frac{a}{6}$

5. Sustituyendo los puntos críticos de la primera derivada en la segunda derivada tenemos: para $x=\frac{a}{2}$ $V''=4a>0$, por lo tanto, existe un mínimo, para $x=\frac{a}{6}$ $V''=-4a<0$ y en consecuencia este es el valor máximo que andamos buscando y el volumen será $V=\frac{2}{27}a^3$

6. Grafica



12. Hallar la altura de un cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r

<u>Solución:</u> 1. el volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$, donde $x=\sqrt{BCxCD}=y(2r - y) \Rightarrow V(y)=\frac{1}{3}\pi y^2(2r - y)$

2. $V' = y(\frac{4}{3}r - y)\pi$

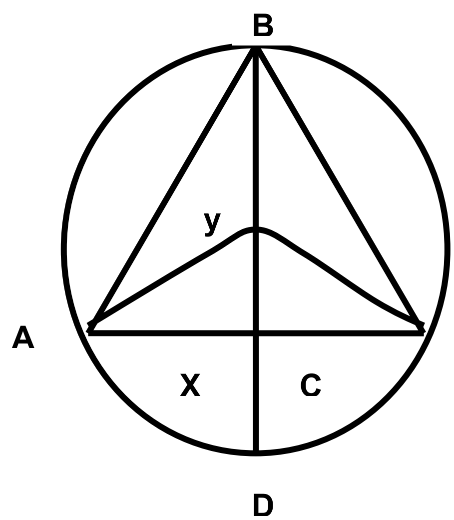
3. $V'' = (\frac{4}{3}r - 2y)\pi$

4. Los puntos crítico de la primera derivada : $V'=0 \Rightarrow$

   $y(\frac{4}{3}r - y)\pi = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}r$

5. Sustituyendo el punto crítico $y=\frac{4}{3}r$ de la primera derivada en la segunda derivada tenemos: $V''=-2\pi r<0$, por lo tanto, existe un máximo para este valor encontrado

6. Grafica:



13. ¿Cuál es el ancho del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un segmento dado de una parábola?

<u>Solución</u>: 1. Si OC=h, entonces BC=h – x y PP'=2y, por lo tanto, el área del rectángulo PDD'P' es: 2(h – x)y, pero P es un punto de la parábola y2=2px; por lo tanto, la función por estudiar es: $f(x) = 2(h - x)\sqrt{2px}$

2. $f' = (h - 3x)\sqrt{\dfrac{2p}{x}}$

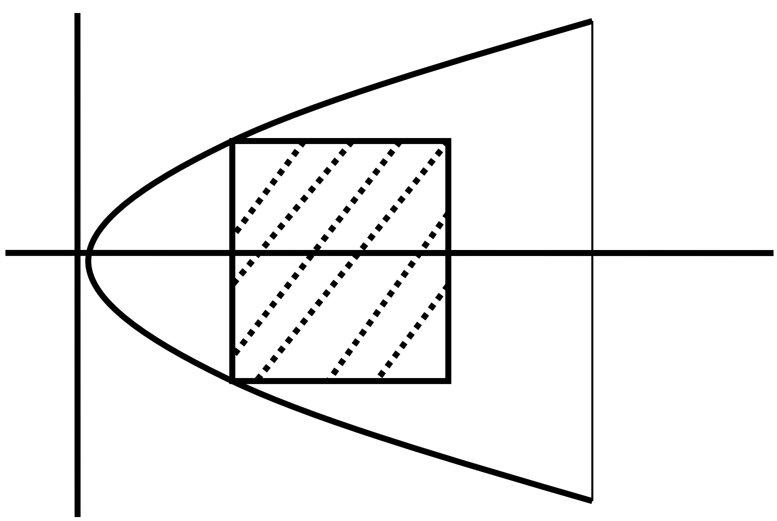
3. $f'' = -(3x + h)\sqrt{\dfrac{p}{2x^3}}$

4. Los puntos critico de la primera derivada: $f'=0 \Rightarrow$

   $(h-3x)\sqrt{\dfrac{2p}{x}} = 0 \Rightarrow h - 3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{h}{3}$

5. Sustituyendo el punto critico $x=\dfrac{h}{3}$ de la primera derivada en la segunda derivada tenemos: $f''=-3\sqrt{\dfrac{6p}{h}} < 0$, por lo tanto, existe un máximo para este valor encontrado

6. Gráfica:



14. El costo para producir x artículos de una mercancía es:

    $C(x)=5x^2 + 8x + 800$ bolívares. Se sabe que t horas después de iniciada la producción, el número x producido es: $x=t^2 + 80t$.

a. Hallar la razón de cambio del costo con respecto al tiempo.

b. Hallar la razón de cambio del costo con respecto al tiempo, 5 horas después de iniciada la producción.

Solución a: Nos piden hallar: $\frac{dC}{dt} \Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}.\frac{dx}{dt} \Rightarrow$

$\frac{dC}{dt}$=(10x + 8)(2t + 80) $\Rightarrow$ $\frac{dC}{dt}$=4(5t2 + 400t + 4)(t + 40) $\Rightarrow$

$\frac{dC}{dt}=4(5t^3 + 600t^2 + 16.004t + 160)$

Solución b: Nos piden $\frac{dC}{dt}_{(t=5)} \Rightarrow$

$\frac{dC}{dt}_{(t=5)} = \frac{dC}{dt}=4(5(5)^3 + 600(5)^2 + 16.004(5) + 160) \Rightarrow$

$\frac{dC}{dt}=4(5t^3 + 600t^2 + 16.004t + 160)$ $\frac{dC}{dt}$=383.140, luego, la razón de cambio del costo con respecto al tiempo en 5 horas después de iniciada la producción es de Bs. 383.140 por hora.

15. Los extremos de una escalera de 5mts. de longitud están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que esta se aleje de la pared a razón de 20mts/seg. ¿Con qué rapidez baja el extremo superior cuando la base está a 3mts. de la pared?

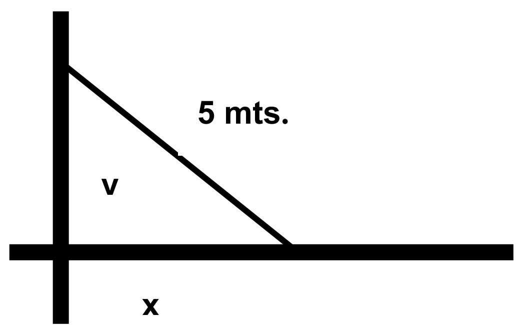
Solución: 1. Sea x la distancia de la base de la escalera a la pared. Sea y la distancia del extremo superior de la escalera al piso. Entonces nuestro modelo es: $x^2 + y^2=5^2$.

2. Derivando respecto al tiempo tenemos: $7\,2y\frac{dy}{dt}+2x\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$, pero, $\frac{dx}{dt}=20\ {}^{m}/_{seg}$ y cuando x=3 tenemos que:

$y=\sqrt{5^2-3^2}$ =4, luego, la velocidad con que baja el extremo superior cuando la base está a 3 cm. es $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{5}(20\,{}^{m}/_{seg})$=-12 ${}^{m}/_{seg}$

3. Grafica:



16. si p(x)=84 – x, hallar:

a. La elasticidad en un punto x cualquiera

b. La elasticidad en el punto x=8

c. La demanda elástica

d. Se tiene la elasticidad unitaria

e. La demanda es inelástica

<u>Solución a:</u> Tenemos que $\frac{dp}{dx}$=-1, luego

E(x))=$\frac{p}{x}\cdot\frac{1}{\frac{dp}{dx}} \Rightarrow E(x)=-\frac{84-x}{x}$

<u>Solución b:</u> Para x=8 se tiene:

$E(8) = -\frac{84-x}{x} \Rightarrow E(8) = -\frac{84-8}{8} \Rightarrow E(8) = -\frac{19}{2}$

<u>Solución c:</u> La demanda es elástica si y solo si E(x)=-1 si y solo si $-\frac{84-x}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{84-x}{x} > 1 \Leftrightarrow 84 > 2x \Leftrightarrow x < 42$, luego, la elasticidad es elástica en el intervalo (0,42).

<u>Solución d:</u> La elasticidad es elástica unitaria si y solo si –1<E(x)=-1, si y solo si $-\frac{84-x}{x} = -1 \Rightarrow x = 42$

<u>Solución e:</u> La demanda es inelástica si y solo si –1<E(x) si y solo si-1< $-\frac{84-x}{x} \Leftrightarrow x > 42$, además como p=84 – x y p>, debemos tener que x<84. Luego la demanda es inelástica en el intervalo (42,84).

Ejercicios Propuestos

1. ¿Qué ángulo α forman con el eje OX la tangente a la curva $y=3x^2 - 10x + 12$ cuyas abscisas son: x=-1 y x= 1

2. Escribir la ecuación de la recta tangente y normal a la curva: $y=x^3 - 4x^2 + 2$ en el punto (3,2)

3. Escribir la ecuación de la recta tangente y normal a la curva:

   $y=\dfrac{8a^2}{x^2 - 2ax + 5a^2}$ en el punto x=2a

4. Hallar los puntos en que la tangente a la curva:

   $y=5x^4 - 34x^3 + 84x^2 - 82x - 82$ sea paralela al eje de las abscisas.

5. En qué punto la tangente a la parábola: $y=3x^2 + 5x +13$ es paralela a la recta $x - 5y + 2=0$

6. En qué punto la tangente a la parábola:

   $y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 4x + 3y - 3=0$ es perpendicular a la recta $3x - 4y - 4=0$

7. Determinar el coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto p(2,1): $x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4 + 5=0$

8. Escribir la ecuaciones de la tangente y normal a la curva en el punto x=4

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{4} \\ t \end{cases}$$

$$y=\frac{5}{3t^{3}}-\frac{1}{2t^{4}}$$

9. Aplicando la regla de L'Hopital calcular los siguientes límites

a. $L=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^{3}-2x^{2}-x+2}{x^{2}-7x+6}$ b. $L=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{x}-\ln(x+1)-1}{x^{2}}$ c. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^{k}}{\ln x}$ d. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^{2}+x-1}{e^{x}+e^{-x}}$ e. $L=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$ f. $L=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2-3e^{-x}+e^{-2x}}{2x^{2}}$ g. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$ h. $L=\lim\limits_{X \to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ i. $L=\lim\limits_{x \to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

j. $L=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{4-3e^{x}-e^{-3x}}{4x^{2}}$ k. $L=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^{3}-4x}{x^{2}-2x}$ l. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^{3}}{e^{x}+x^{2}-2}$

m. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{4x^{2}+3x-6}{8x+2}$ n. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{4x^{3}+6}{3x^{3}+2x}$ o. $L=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^{2}}{e^{x}-1}$

p. $L=\lim\limits_{x \to 1}((\ln x)\ln(x-1))$ r. $L=\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$

10. Realizar la gráfica de las siguientes funciones, hallando el dominio, puntos de discontinuidad, corte con los ejes, puntos máximos y mínimos, y puntos de inflexión según sea el caso.

a. $y=12-12x+x^{3}$ b. $y=\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{x^{2}}{2}-6x$ c. $y=\dfrac{2}{3}x^{3}-4x^{2}+6x+2$

d. $y=2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ e. $y=3x^4 - 4x^3$ f. $y=\sqrt[3]{x^2}$ g. $y=-\sqrt{4-x}-2$

h. $y=x^5 + 6$ i. $y=\frac{x}{x+1}$ j. $y=\frac{1}{x^2+4}$ k. $y=\frac{8x}{x^2+4}$ l. $y=\frac{x+3}{x^2}$ m. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

n. $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ o. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-8}}$ p. $y=\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$ q. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ r. $y=x\sqrt{1-x^2}$ s. $y=\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}$ t. $y=e^{-x^2+8x-14}$ u. $y=\frac{x}{\ln x}$

v. $y=2 + x\ln x$ w. $y= 2e^{x} + e^{-x}$ x. $y=3x + 5 + \frac{6}{x}$ y. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

11. Para cada una de las siguiente funciones de costo promedio obtenga el valor mínimo del costo promedio mínimo, y demuestre que dicho costo promedio mínimo, el costo marginal y el costo promedio son iguales.

a. $y=25 - 8x + x^2$ b. $\bar{y}=2x + 5 + \frac{18}{x}$ c. $\bar{y}=2 + x\ln x$ d. $\bar{y}=2^{ex} + e^{-x}$

e. $y=3x + 5 + \frac{6}{x}$ f. $\bar{y}=20 + 2x^2 + 4x^4$ g. $\bar{y}=10 - 4x^3+ 3x^4$ h. $6x + 7 + \frac{36}{x}$

12. **Determine el comportamiento de las funciones de costo promedio y marginal (crecientes o decrecientes) para cada una de las siguientes funciones del costo total.**

a. $y=\sqrt{x+25}$, $0\leq x\leq 10$ **b.** $y=9x+5xe^{-2x}$

13. **La empresa ABC Fábrica correas y carteras de cuero de babo y tienen una función de costo total igual a** $y=2x^3-3x^2-2x$**, donde y representa el costo total, y x, la cantidad producida.**

¿Qué ecuación representa la función costo marginal? ¿Cuál es la ecuación de la función costo promedio? ¿En qué punto este costo promedio alcanza su valor mínimo?

¿Es el anterior un conjunto de ecuaciones que podría esperarse encontrar realmente en la práctica? ¿Por qué?

14. **La función ingreso total de la empresa Alirio Pérez S.A. se expresa mediante la ecuación** $I(x)=24x-3x^2$**, en la que I es el ingreso y x es la cantidad vendida.**

a. ¿Cuál es el ingreso máximo que la compañía puede esperar suponiendo que la ecuación anterior sea cierta?

b. ¿Qué ecuación representa la función ingreso promedio para esta compañía?

c. ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la función ingreso marginal de esta compañía?

d. En el mismo sistema de coordenadas, grafique las funciones ingreso total, ingreso promedio e ingreso marginal

15. La compañía Gabán S.A. fabrica gabinetes para aparatos de televisión, y el costo total de producir cierto modelo está representado por la ecuación $y=4x - x^2 + 2x^3$, en donde y representa el costo total y x representa la cantidad producida (su valor numérico son millares de unidades). El departamento de ventas ha indicado que la producción x debe estar entre 2 y 6. ¿En que cantidad es mínimo el costo marginal? Explique su respuesta y grafique el costo marginal.

16. Si la fórmula general para la función costo total es:

    $f(x)=ax^3 + bx^2 + cx + d$.

    a. ¿Cuál es la ecuación correspondiente al costo marginal?
    b. ¿Qué ecuación es el costo promedio?

17. Dividir un número positivo a en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible

18. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

19. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividirlo en dos parcelas por otra valla paralela a uno de los lados. Si el área del campo es dada, hallar la razón de los lados para que la longitud total de las vallas sea la mínima

20. Una planta productora de acero puede producir por día x toneladas de acero de segunda clase, e y toneladas de diarias de primera clase, siendo $y=\frac{40-5x}{10-x}$. Si el precio corriente de acero

de segunda clase es la mitad del de primera, demostrar que el máximo beneficio se obtiene produciendo alrededor de 5.5 toneladas diarias de acero de segunda clase.

21. Dado un punto del eje de la parábola $y^2=2px$ a una distancia a del vértice. Calcular la abscisa del punto de la curva más cercano al punto dado.

22. Se desea construir una pista de carrera de 400 mts. de perímetro. La pista debe estar formada por un rectángulo con dos semicírculos localizados en dos lados opuestos del rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de este sea máximo?

23. Una isla se encuentra a 800 metros de una playa recta. En la playa a 2.000 metros de distancia de un punto A que esta frente a la isla, funciona una planta eléctrica. Para dotar de luz a la isla, se tiende un cable desde la planta hasta un punto B de la playa y de allí hasta la isla. El costo del tendido del cable en tierra es de $ 300 por metro, y en el agua es de $ 500 por metro. ¿Dónde debe estar localizado el punto B para que el costo del tendido sea mínimo?

24. Un productor de tomate quiere cosechar su producto tan pronto comience el período de lluvias, para obtener el mejor precio. Si él cosecha el primer día de abril, puede recorrer 200 guacales de tomates, que los vende al precio de 9 $. el guacal. Si él espera, su

cosecha en 10 guacales por cada semana que pasa, pero el precio baja a razón de 3 \$. el guacal por semana. ¿Cuántas semanas debe esperar para obtener el máximo ingreso?

25. Una compañía necesita potes cilíndricos de aluminio para evasor sus productos. Cada pote debe tener 128 πcm^3 de volumen. Si quiere usar la menor cantidad de aluminio posible (para bajar el costo) ¿Cuál debe ser el radio r y la altura del pote?

26. Una fabrica de licuadoras, cuando produce a lo más 100 aparatos por semana, obtiene una utilidad de Bs. 20.000 por unidad, pero esta utilidad decrece a razón de Bs. 200 por cada aparato que excede los 10.000. ¿Cuántas licuadoras debe producir semanalmente la fábrica para que su utilidad sea máxima?

27. La siguiente generalización se hace con frecuencia para las relaciones existentes entre las funciones de ingreso total (*IT*), ingreso promedio (*IP*), e ingreso marginal (*IM*):

Cuando *IM*=0, *IT* está en su punto máximo

Cuando *IM>IP, IP* es creciente

Cuando *IM<IP, IP* es decreciente

Cuando *IM=IP, IP* no varia

Ilustre lo anterior con un ejemplo que este a su alcance

28. Investigue las relaciones análogas para las funciones costo total (*CT*), costo promedio (*CP*), y costo marginal (*CM*).

29. **Para cada una de las siguientes funciones de demanda, a) determine la elasticidad---arco, en el punto especificado; b) obtenga la elasticidad---arco en el punto correspondiente al cambio especificado en el precio o en la cantidad demandada; c) determine la elasticidad---punto en los dos puntos; d) evalúe la elasticidad---arco con base en los valores medios de cantidad y precios, y e) demuestre que $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$ son reciprocas entre si.**

a. **$x=60-2y^2$; $x=10$, $y=5$; el precio disminuye en 8%**

b. **$x+2y=15$; $x=7$, $y=4$; el precio aumenta en 5%**

c. **$x=25-5y^2$; $x=5$, $y=2$; el precio crece 5%**

d. **$x=10-2y^2$; $x=5$, $y=1$; el precio crece 10%**

e. **$Y=(x-10)^2$; ;$0\leq x\leq 10$; $x=8$, $y=4$; la cantidad demandada disminuye 5%**

f. **$x=19-4y^2$; $x=3$, $y=2$; el precio disminuye en 5%**

g. **$x=36-4y^2$; $x=20$, $y=2$; el precio aumenta en 5%**

h. **$y=(4-4)^2$; $x=1$, $y=9$; la cantidad demandada aumenta 30%**

30. **La demanda de un bien en particular está dada por la expresión $y=\sqrt{12-x}$ para $0\leq x\leq 12$, en donde x es la cantidad demandada e y es el precio por unidad. Determinar el precio y la cantidad para los cuales el ingreso total es máximo. Demostrar en el caso de**

esta función de demanda, que se cumple la relación entre el ingreso marginal y la elasticidad de demanda.

31. La demanda para un determinado bien esta dada por la expresión $y=15e^{-\frac{1}{3}x}$ para $0\leq x\leq 8$, en donde x representa la cantidad demandada e y el precio por unidad. Determinar el precio y la cantidad para los cuales el ingreso total es máximo. Demostrar que relación entre el ingreso marginal y la elasticidad de demanda se satisface para esta función de demanda.

32. Cuando los ingresos de una cierta persona eran de 426.000 Bs. al mes compraba 20 litros de leche en dicho lapso. Cuando su percepción monetaria aumento a 497.000 Bs. pudo comprar 24 litros de leche mensualmente. Suponiendo que no hubo cambio en el precio de la leche o algún otro factor relevante, ¿Cuál la elasticidad de la demanda de leche con respecto a los ingresos de dicha persona?

33. ¿Cuál es la relación entre la pendiente (positiva negativa) de la curva del costo promedio y la elasticidad del costo total, respecto a la cantidad producida.

34. Parea cada una de las funciones de demanda siguientes demuestre que la relación entre el ingreso marginal y la

elasticidad de la demanda esta dada por la ecuación:

$$\frac{dI}{dx} = y\left(1 + \frac{1}{\frac{Ex}{Ey}}\right)$$

35. $y=550 - 3x - 6x^2$ b. $y=\frac{250}{x^3}$ c. $y=17 - 6x$ d. $y= 86 - 25x$ e. $y=100 - 6x^2$

CAPÍTULO VI

DEFINICIONES Y PROPIEDADES Y TABLAS SOBRE INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Integral Indefinida, Propiedades de las Integrales Indefinidas, Tabla de Integración, Integración por Fracciones Parciales, Ejercicios Resuelto, Ejercicios Propuestos.

El signo integral proviene de la forma de una s alargada $\int$, que se empleo originalmente para indicar la suma, la integral tiene dos interpretaciones distintas:

1. Como procedimiento inverso de la derivada (antiderivada), esto es, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original, siempre y cuando se especifique en alguna forma la constante de integración; de otra manera el resultado puede diferir de la función original en una constante. La integración se considera la operación de obtener una función cuando se conoce su derivada (o tasa de cambio), y en este caso cuando la integral se interpreta como la antiderivada recibe el nombre de integral indefinida.

2. La integral como el proceso de encontrar el valor límite de una suma de términos cuando el número de estos crece indefinidamente ($n \to \infty$) y el valor numérico de cada término se aproxima a cero. En este caso cuando la integración se interpreta como la determinación del área bajo la curva recibe el nombre de integral definida.

INTEGRACIÓN INDEFINIDA

Definición 1: Si f(x) es una integral con respecto a x de la función f(x), la relación entre ellas se expresa de la siguiente manera: $\int f(x)dx = F(x) + C$, en la cual el primer miembro se lee "*integral de f con respecto a x*". El símbolo $\int$ es el signo integral; f(x) es el integrando,

F(x) es una integral particular, C es la constante de integración, y F(x) + C es la integral indefinida.

Puede demostrarse que dos funciones que tienen una misma derivada difieren a lo sumo en una constate; esto es, si F(x) es una integral de f(x), todas las integrales de f(x) están incluidas en el conjunto F(x) + C, donde C es una constante cualquiera en muchas aplicaciones del Calculo Integral, cierta información dada en el problema, que suela llamarse condiciones iniciales, determina inequívocamente la constante de integración.

Geométricamente, y=F(x) + C representa una familia de líneas, cada una de las cuales puede obtenerse desplazando la grafica de y=F(x) (que corresponde a C=0), una distancia vertical igual a C. Las líneas representadas por y=F(x) + C son paralelas entre si en el sentido de que la pendiente da la tangente a cualquiera de ellas en el punto de las abscisas x, es f(x). Así esta familia de líneas tiene la propiedad de que, dado cierto punto (x_0,y_0), hay solamente una de ellas que pasa por ese punto particular. Para que la línea en cuestión pase por dicho punto, debe ser satisfecha su ecuación por las coordenadas del punto. Esto especifica unívocamente el valor de C, pues entonces $C=y_0 – F(x_0)$.

Habiendo sido C determinada en esta forma, se obtiene una función definida que expresa a y en función de x; es decir, la constante de integración se determina concluyentemente al especificar un punto por el cual pase la línea o grafica que represente a la integral. Tal especificación se conoce como *condición inicial*, debido a que la evolución de la constante de integración se hizo primeramente con referencia a problemas físicos de mecánica, en los cuales se especifican velocidades o posiciones iniciales de cuerpos en movimiento; puesto que en tales casos el punto más probable a especificar es el origen o una integración en un eje. La condición inicial se denomina también *condición de frontera.*

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Si $F'(x)=f(x) \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx + C$

2. Si $I=\int dx \Rightarrow I=x + C$

3. Si $I = \int \left[A_1 f(x) \pm A_2 g(x)\right]dx \Rightarrow I = A_1\int f(x)dx \pm A_2\int g(x)dx + C$

4. Si $I = \int f(x)dx$ y $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ sustituyendo esta expresión en I, tenemos: $I = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt + C$, (integración por sustitución)

5. Si $I = \int f(x)d[g(x)] \Rightarrow I = f(x)g(x) - \int g(x)d[f(x)] + C$, (integracion por parte)

TABLA DE INTEGRACIÓN

1. $$I=\frac{1}{a}\int t^n dt \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C, & \text{si } n\neq -1 \\ \dfrac{1}{a}Lnt + C, & \text{si } n=-1 \end{cases}$$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en $I=\frac{1}{a}\int t^{n}dt$, ahora aplicamos la propiedad Nº 5, llámanos: f(t)=t^n $\Rightarrow$ d(f(t))=nt^{n-1}dt; y d(g(t))=dt $\Rightarrow$ g(t)=t $\Rightarrow$ $\int g(t)dt=t+C$ por la propiedad Nº 2, sustituyendo en la propiedad Nº 5, tenemos: I=t^nt - n$\int tt^{n-1}dt$ $\Rightarrow$

$$I=\frac{1}{a}\left(t^{n+1} - n\int t^{n}dt\right) \quad\Rightarrow\quad I(n+1)=\frac{1}{a}t^{n+1} \quad\Rightarrow I=\frac{t^{n+1}}{a(n+1)},$$

entonces $I=\frac{1}{a}\int t^{n}dt \Rightarrow I=\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}+C$, para todo n≠-1, si n=-1, entonces, $I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}$ aplicando la propiedad Nº 4, t=e^z $\Rightarrow$ dt=e^zdz, sustituyendo tenemos, I=$\frac{1}{a}\int\frac{e^{z}dz}{e^{z}}$ $\Rightarrow$ I=$\frac{1}{a}\int dz$ $\Rightarrow$ I=z, como t=e^z $\Rightarrow$ lnt=z $\Rightarrow$ I=$\frac{1}{a}$lnt, por lo tanto, I = $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} \Rightarrow I=Lnt+C$, es decir,

$$I=\frac{1}{a}\int t^{n}dt \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{a(n+1)}+C, \text{ si } n\neq -1 \\[2ex] \dfrac{1}{a}Lnt+C, \text{ , si } n=-1 \end{cases}$$

Volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que:

$$I=\int(ax+b)^{n}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n\neq -1 \\[2ex] \dfrac{1}{a}Ln(ax+b) + C \text{ si } n=-1 \end{cases}$$

2. $I=\int a^{bx+c}dx \Rightarrow I=\dfrac{a^{bx+c}}{bLna}+C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=bx + c, entonces dt=bdx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{b}$dt, con lo que I se transforma en I=$\frac{1}{b}\int a^{t}dt$, aplicando otra vez la propiedad Nº 4, z=k^{t} $\Rightarrow$ dt=k^{t}lnkdt $\Rightarrow$ k^{t} dt=$\frac{dz}{blna}$, sustituyendo nos queda, $I=\frac{1}{bLna}\int dz$, por la propiedad Nº 2 tenemos que I=z $\Rightarrow$ $I=\frac{1}{bLna}a^{t}$, por lo tanto, I=$\frac{1}{b}\int a^{t}dt \Rightarrow I=\frac{a^{t}}{bLna}+C$ Volviendo el cambio t=bx +c, se tiene que:

$I=\int a^{bx+c}dx \Rightarrow I=\dfrac{a^{bx+c}}{bLnk}+C$

3. $I=\int e^{ax+b}dx \Rightarrow I=\dfrac{e^{ax+b}}{a}+C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en I=$\frac{1}{a}\int e^{t}dt$, aplicando otra vez la propiedad Nº 4, z=e^{t} $\Rightarrow$ dt=e^{t}dt $\Rightarrow$ e^{t} dt=$\frac{dz}{a}$, sustituyendo nos queda, $I=\frac{1}{a}\int dz$, por la propiedad Nº 2 tenemos que I=z $\Rightarrow$ $I=\frac{1}{a}e^{t}$, por lo tanto, I=$\frac{1}{a}\int e^{t}dt \Rightarrow I=\frac{e^{t}}{a}+$ C, volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que:

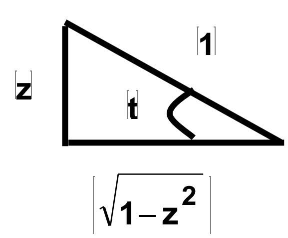
$$I=\int e^{ax+b}dx \Rightarrow I=\frac{e^{ax+b}}{a}+C$$

4. $I=\int \ln(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}(ax+b)[\ln(ax+b)-1]+C$

Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en $I=\frac{1}{a}\int \ln t dt$, ahora aplicamos la propiedad Nº 5, llámanos: f(t)=lnt $\Rightarrow$ d[f(t)]=$\frac{dt}{at}$ y d[g(t)]=dt $\Rightarrow$ g(t)=t $\Rightarrow$ $\int g(t)dt = t + C$ por la propiedad Nº 2, sustituyendo en la propiedad Nº 5, tenemos: I=$\frac{1}{a}(\ln t - \int \frac{t}{t}dt\ )$ $\Rightarrow$ I=$\frac{1}{a}t(\ln t - 1)$, Volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que: $I=\int \ln(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}(ax+b)[\ln(ax+b)-1]+C$

5. $I=\int \text{sen}(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}\cos x + C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en $I=\frac{1}{a}\int \text{sen}t dt$, aplicando otra vez la propiedad Nº 4, z=sent $\Rightarrow$ dz=costdt $\Rightarrow$ dt=$\frac{dz}{\cos t}$, por el teorema de Pitágoras tenemos que:



cost= $\sqrt{1-z^2}$ $\Rightarrow$ dt= $\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, sustituyendo nos [illegible]lta que $I=\dfrac{1}{a}\int\dfrac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$,

aplicando de nuevo la propiedad Nº 4, $u=1-z^2 \Rightarrow du=-2zdz \Rightarrow$

zdz= $-\dfrac{du}{2}$, sustituyendo, I= $-\dfrac{1}{2a}\int\dfrac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow$

$I=-\dfrac{1}{2a}\int u^{-\frac{1}{2}}du \Rightarrow I=-\dfrac{1}{2a}\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=-\dfrac{1}{a}u^{\frac{1}{2}}$, volviendo el cambio:

I= $-\sqrt{1-z^2} \Rightarrow$ I= $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \Rightarrow$ I=-cost, por lo tanto:

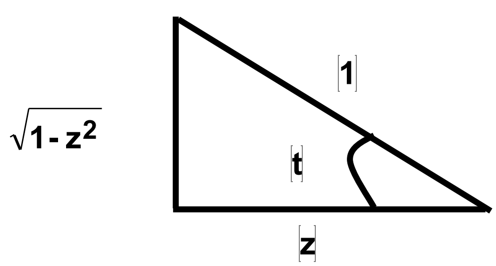
I= $\dfrac{1}{a}\int \operatorname{sen}tdt \Rightarrow I=-\cos t+C$, Volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que:

I= $\int \operatorname{sen}(ax+b)dx \Rightarrow I=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

6. I= $\int \cos(ax+b)dx \Rightarrow I=\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx= $\dfrac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en

$I=\dfrac{1}{a}\int \cos tdt$, aplicando otra vez la propiedad Nº 4, z=cost $\Rightarrow$ dz=-sentdt $\Rightarrow$ dt= $-\dfrac{dz}{\operatorname{sen}t}$, por el teorema de Pitágoras tenemos que:



$sent=\sqrt{1-z^2}$ $\Rightarrow$ $dt=-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, sustituyendo nos resulta que $I=-\frac{1}{a}\int\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$, aplicando de nuevo la propiedad Nº 4, $u=1-z^2$ $\Rightarrow$ $du=2zdz \Rightarrow zdz=\frac{du}{2}$, sustituyendo, $I=\frac{1}{2a}\int\frac{du}{\sqrt{u}}$ $\Rightarrow$

$I=\frac{1}{2a}\int u^{-1/2}du \Rightarrow I=\frac{1}{2a}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=\frac{1}{a}u^{1/2}$, volviendo el cambio:

$I=-\sqrt{1-z^2}$ $\Rightarrow I=\sqrt{1-\cos^2 z}$ $\Rightarrow$ I=sent, por lo tanto:

$I=\frac{1}{a}\int costdt \Rightarrow I=\frac{1}{a}sent+C$, Volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que: $I=\int\cos(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}sen(ax+b)+C$

7. $I=\int tg(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}Ln(cos(ax+b)+C \Rightarrow I=\frac{1}{a}Lnsec(ax+b)$

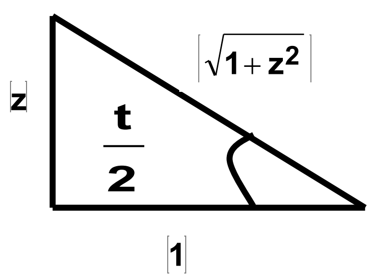
<u>Deducción:</u> $I=\int tg(ax+b)dx \Rightarrow I=\int\frac{sen(ax+b)}{cos(ax+b)}dx$, Por propiedad Nº 4, t=cos(ax + b) $\Rightarrow$ $dt=-\frac{1}{a}sen(ax+b)dx$, sustituyendo tenemos: por (1) que $I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} \Rightarrow I=-\frac{1}{a}Lnt$, volviendo el cambio tenemos que: $I=-\frac{1}{a}lncos(ax+b)$ $\Rightarrow$ $I=\frac{1}{a}lnsec(ax+b)$, por lo tanto: $I=\int tg(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}Ln(cos(ax+b)+C \Rightarrow I=\frac{1}{a}Lnsec(ax+b)$

8. $I=\int ctg(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}Ln(senx)+C$

Deducción: I=$\int ctg(ax+b)dx \Rightarrow I=\int \frac{cos(ax+b)}{sen(ax+b)}dx$, Por propiedad Nº 4, t=sen(ax + b) $\Rightarrow$ dt=$\frac{1}{a}$cos(ax + b)dx, sustituyendo tenemos: por (1) que $I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} \Rightarrow I=\frac{1}{a}Lnt$, volviendo el cambio tenemos que: I=$\frac{1}{a}$ln(sen(ax + b)), por lo tanto: I=$\int ctg(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}Ln(senx)+C$

9. I=$\int sec(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}Ln\left[sec(ax+b)+tg(ax+b)\right]+C$

Deducción: Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en $I=\frac{1}{a}\int sectdt$, aplicando las identidades trigonométrica se tiene que: I=$\int\frac{dt}{cost}$, aplicando la propiedad Nº 4, z=$tg\frac{t}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{t}{2}=tg^{-1}z \Rightarrow x=2tg^{-1}z \Rightarrow dt=\frac{2dz}{1+z^2}$, por el teorema de Pitágoras tenemos:



$sen\frac{t}{2}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ y $cos\frac{t}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

$cost=cos^2\frac{t}{2}-sen^2\frac{t}{2}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

Sustituyendo en I tenemos que:

$I = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{(1+z^2)\frac{(1-z^2)}{1+z^2}} \Rightarrow I = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{1-z^2} \Rightarrow I = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{(1-z)(1+z)}$, por el método de las fracciones parciales tenemos: $I=2\left[A_1\int \frac{dz}{1-z} + A_2\int \frac{dz}{1+z}\right] \Rightarrow$

$I=2\left|A_1 \ln(1-z) + A_2 \ln(1+z)\right|$, donde $A_1=\lim_{z \to 1} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ y $A_2=\lim_{z \to -1} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$I = -Ln(1-z) + Ln(1+z) \Rightarrow I = Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, volviendo el cambio nos resulta:

$$I = Ln\left(\frac{1+tg\frac{t}{2}}{1-tg\frac{t}{2}}\right) \Rightarrow I = Ln\left(\frac{1+\frac{sen\, t/2}{cos\, t/2}}{1-\frac{sen\, t/2}{cos\, t/2}}\right) \Rightarrow I = Ln\left(\frac{cos\, t/2 + sen\, t/2}{cos\, t/2 - sen\, t/2}\right) \Rightarrow$$

$$I = Ln\left(\frac{(cos\, t/2 + sen\, t/2)^2}{cos^2 t/2 - sen^2 t/2}\right) \Rightarrow I = Ln\left(\frac{cos^2 t/2 + 2sen\, t/2\, cos\, t/2 + sen^2 t/2}{cost}\right)$$

$$\Rightarrow I = Ln\left(\frac{1+sent}{cost}\right) \Rightarrow I=Ln\left(\frac{1}{cost} + \frac{sent}{cost}\right) \Rightarrow I = Ln\left|sect + tgt\right|,$$

por lo tanto: $I=\frac{1}{a}\int sectdt \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln\left[sect + tgt\right] + C$, volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que:

$$I=\int sec(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln\left[sec(ax+b) + tg(ax+b)\right] + C$$

10. $I=\int csc(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln\left[csc(ax+b) - ctg(ax+b)\right] + C$

<u>Deducción:</u> se deduce de manera semejante a $I=\int sec(ax+b)dx$

11. $\mathbf{I} = \int \sec^2(ax+b)x \Rightarrow I = \frac{1}{a}tg(ax+b) + C$

Deducción: Aplicando la propiedad N° 4, hacemos t=ax + b, entonces dt=adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}$dt, con lo que I se transforma en I=$I = \frac{1}{a}\int \sec^2 tdt$, aplicando las propiedades de los números se ales se tiene que $I = \frac{1}{a}\int \sec^2 tdt \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int sectsectdt$, aplicando la propiedad Nº 4, tenemos: z=sect $\Rightarrow$ dz=tgtsectdt $\Rightarrow$ sectdt=$\frac{dtz}{tgt}$, como tgt=$\sqrt{\sec^2 t - 1}$ $\Rightarrow$ sectdt=$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$, sustituyendo, $I = \frac{1}{a}\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2-1}}$, aplicando nuevamente la propiedad Nº 4, tenemos:

u=z^2 – 1 $\Rightarrow$ du=2zdzt $\Rightarrow$ zdz=$\frac{du}{2}$, sustituyendo $I = \frac{1}{2a}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2a}\int u^{-\frac{1}{2}}du \Rightarrow I = \frac{1}{2a}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I = \sqrt{u}$, volviendo los cambio nos resulta: $I = \sqrt{z^2-1} \Rightarrow I = \sqrt{\sec^2 t - 1} \Rightarrow I = tgt$, por lo tanto:

I=$\int \sec^2 tdt \Rightarrow I = tgt + C$, volviendo el cambio t=ax + b, se tiene que: $I = \int \sec^2(ax+b)x \Rightarrow I = \frac{1}{a}tg(ax+b) + C$

12. $\mathbf{I} = \int \csc^2(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}ctg(ax+b) + C$

Deducción: Se resuelve de manera semejante a $I = \int \sec^2(ax+b)x$

Para deducir las integrales (13-21) utilizaremos las siguientes identidades trigonométricas:

$sen^2x + cos^2x=1 \Rightarrow sen^2x=1 - cos^2x \Rightarrow cos^2x=1 - sen^2x$

$sec^2x - tg^2x=1 \Rightarrow sec^2x=1 + - tg^2x \Rightarrow tg^2x= sec^2x - 1$, para $a^2 - x^2$ se hace el cambio x=asent, para $a^2 + x^2$ se hace el cambio x=atgt y para para $x^2 - a^2$ se hace el cambio x=asect

13. $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln \frac{a+x}{a-x} + C$

<u>Deducción:</u> $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$, aplicando la propiedad Nº 4, x=atgt $\Rightarrow$ $dx=asec^2tdt$, sustituyendo tenemos:

$I = a\int \frac{sec^2tdt}{a^2 + a^2tg^2t} \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{sec^2t}{sec^2t}dt \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int dt \Rightarrow I = \frac{1}{a}t$, como x=atgt

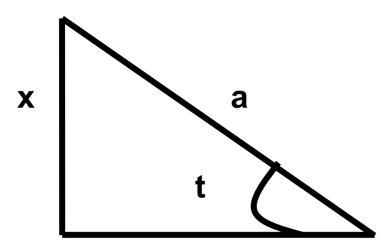
$\Rightarrow tgt=\frac{x}{a} \Rightarrow t=tg^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow I=\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{x}{a}$, por lo tanto:

$I=\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \Rightarrow I = \frac{x}{a}tg^{-1}\frac{x}{a} + C$

14. $I=\int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln \frac{a+x}{a-x} + C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad Nº 4, x=asent $\Rightarrow$ x=acostdt $\Rightarrow$

$I = a\int \frac{costdt}{a^2(1 - sen^2t)} \Rightarrow I=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{cost} \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int sectdt \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln|secx + tgx|$



$\sqrt{a^2 - x^2}$

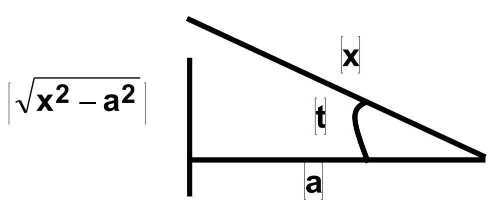
$I = \frac{1}{a} Ln\left|\frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| \Rightarrow I = \frac{1}{a} Ln\left|\left(\frac{(a + x)^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2}\right| \Rightarrow$

$I = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{(a + x)^2}{(a - x)(a + x)}\right| \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|$ Por lo tanto:

$I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\frac{a + x}{a - x} + C$

15. $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\frac{a - x}{a + x} + C$

<u>Deducción:</u> **Aplicando la propiedad N°4, x=asect $\Rightarrow$ dx=atgtsectdt, sustituyendo en I se tiene que $I = \frac{1}{a}\int \frac{tgtsect}{tg^2t} dt$, aplicando las identidades trigonométricas se obtiene que $I = \frac{1}{a}\int csctdt$, por tabla de integración (10) se tiene que $I = \frac{1}{a} \ln|csct - ctgt|$, como $sect = \frac{x}{a}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que:**



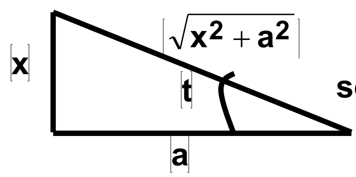
$cgt = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ y $csct = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Sustituyendo en I, $I = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{x - a}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right|$, por las propiedades de los números reales: $I = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{(x - a)^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right|^{\frac{1}{2}} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{(x - a)(x - a)}{(x - a)(x + a)}\right| \Rightarrow$

$I = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$, por lo tanto, I = $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a}Ln\frac{a - x}{a+x} + C$

16. I = $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow I = Ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

Deducción: Aplicando la propiedad N°4, x=atgt $\Rightarrow$ dx=asec^{2}tdt, sustituyendo en I se tiene que $I = \int \frac{sec^2 t}{sect}dt$, aplicando las identidades propiedades de los números reales se tiene que $I = \int sectdt$, por tabla de integración (9) se tiene que: I=ln|sect + tgt|, como tgt=$\frac{x}{a}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que:



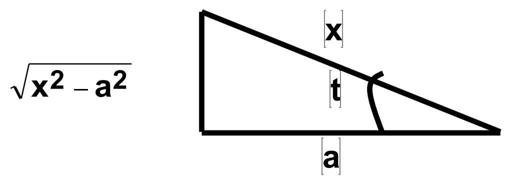
sect=$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ y tgt=$\frac{x}{a}$

Sustituyendo en I tenemos: I=ln$\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right|$ $\Rightarrow$ I=ln$\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$ - lna

por lo tanto: I = $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow I = Ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

17. I=$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

Deducción: Aplicando la propiedad N°4, x=asect $\Rightarrow$ dx=atgtsectdt, sustituyendo en I se tiene que I=$\int \frac{sec^2 t}{sect}dt$, aplicando las propiedades de los números reales se tiene que: $I = \int sectdt$, por tabla de integración (9) se tiene que: **I=ln$|$sect + tgt$|$, como tgt=$\frac{x}{a}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que:**



$$tgt=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} \quad y \quad sect=\frac{x}{a}$$

Sustituyendo en I tenemos: $I=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| \Rightarrow I=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$ **- lna**

por lo tanto: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow I=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

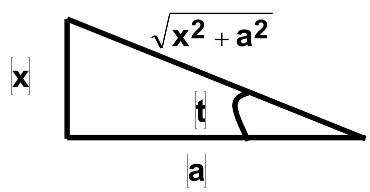
18. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow I=sen^{-1}\frac{x}{a}+C$

<u>Deducción;</u> Aplicando la propiedad N°4, x=asent $\Rightarrow$ dx=acostdt, sustituyendo en I se tiene que $I=\int\frac{cost}{cost}dt \Rightarrow I=\int dt$, **por la propiedad N° 1 se tiene que I=t, volviendo el cambio x=asent $\Rightarrow$ sent=$\frac{x}{a}$ $\Rightarrow$ t=sen$^{-1}\frac{x}{a}$, por lo tanto,** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow I=sen^{-1}\frac{x}{a}+C$

19. $I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+Ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N°4, x=atgt $\Rightarrow$ dx=asec^{2}tdt, sustituyendo en I se tiene que I=a$^2\int$sectsec^{2}tdt, aplicando la propiedad N° 5 donde f(t)=sect $\Rightarrow$ d[f(t)]=tgtsectdt y d[g(t)]=sec^{2}tdt, tenemos por

tabla de integración (11) que g(t)=tgt, sustituyendo en I tenemos: $I=a^2[\text{tgtsect} - \int \text{tg}^2\text{tsectdt}]$, aplicando las identidades trigonométricas se tiene que $I=a^2[\text{tgtsect} - \int(1-\sec^2 t)\text{sectdt}]$ $\Rightarrow$ $I=a^2[\text{tgtsect} - \int \sec^3\text{tdt} + \int \text{sectdt}]$ $\Rightarrow 2I= a^2[\text{tgtsect} + \ln|\text{sect} + \text{tgt}|]$, como $\text{tgt}=\frac{x}{a}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que:



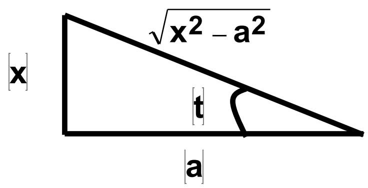
$\text{sect}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ y $\text{tgt}=\frac{x}{a}$

Sustituyendo en I tenemos: $I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$, por lo tanto, $I=\int\sqrt{x^2+a^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \text{Ln}(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

20. $I=\int\sqrt{x^2-a^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \text{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N°4, x=asect $\Rightarrow$ dx=atgtsectdt, sustituyendo en I se tiene que $I=a^2\int \text{tg}^2\text{tsectdt}$, aplicando las identidades trigonométricas se tiene que $I=a^2\int(1-\sec^2 t)\text{sectdt}$ $\Rightarrow$ $I=a^2[\int\sec^3\text{tdt} - \int\text{sectdt}]$, por la deducción anterior se tuvo que $\int\sec^3\text{tdt}=\text{tgtsect} - \int\sec^3\text{tdt}+\int\text{sectdt}$, nos queda que:

$2I=a^2[\text{tgtsect} + \ln|\text{sect} + \text{tgt}|]$, como $\text{sect}=\frac{x}{a}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que:



$\text{sect}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ y $\text{tgt}=\frac{x}{a}$

Sustituyendo en I tenemos: $I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$, por lo tanto, $I=\int\sqrt{x^2-a^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\text{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

21. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

<u>Deducción:</u> Aplicando la propiedad N°4, x=asent $\Rightarrow$ dx=acostdt, sustituyendo en I se tiene que $I=a^2\int\cos^2 t dt$, aplicando las identidades trigonométricas se tiene que $I=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt$, aplicando las propiedades (1 y 3) y la tabla de integración (6), se tiene que $I=\frac{a^2}{2}[t + \frac{1}{2}\text{sen}2t]$, como $\text{sent}=\frac{x}{a} \Rightarrow t=\text{sen-1}\frac{x}{a}$ y sen2t=2sentcost, donde $\text{cost}=\sqrt{a^2-x^2}$, nos resulta que $I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$, por lo tanto:

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx \Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES.

Definición 2: Por definición, una función algebraica racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Teóricamente, toda función racional tiene una integración que puede expresarse en términos de funciones elementales. Si una función integral no puede ser integrada directamente, con frecuencia el método de fracciones parciales es útil para transformar la fracción racional en una suma de funciones más sencillas que pueden integrarse por medio de las fórmulas normales. El método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, esto es, aquellas en la que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador. Cualquier fracción impropia, es decir, aquella en la cual el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador, puede transformarse, por división, en la suma de un polinomio (integrable fácilmente) más una función propia (integrable por el medio de fracciones parciales). El método de integración por fracciones parciales consta de los siguientes pasos:

1. La integral de la función F(x) puede ser expresada como la razón de dos polinomios f(x) y g(x). Considere que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendentes de la potencia de x, es decir,

$$F(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x - a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

En donde $a_0, a_1, \ldots\ldots a_m$, $b_0, b_1 \ldots\ldots b_m$ son constantes reales.

El denominador g(x) puede factorizarse en factores de primer orden y cuadráticos con coeficientes reales de la manera:

$$F(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_m)}$$

En donde x_1, $x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ son las n raíces de la ecuación g(x)=0 y son llamadas ceros del polinomio g(x). F(x) puede ser entonces expresado como una serie de fracciones, es decir, $F(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$ y se presentan varios casos dependiendo de las características del denominador.

<u>Caso 1 Las raíces x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$ son distintas y el grado de g(x) es menor que el grado de f(x).</u>

Las A's de la ecuación anterior son constantes y llamadas los residuos de F(x). Para determinar el valor de estos residuos, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_1 = \lim_{x \to x_1} (x - x_1)F(x); \quad A_2 = \lim_{x \to x_2} (x - x_2)F(x); \ldots\ldots A_n = \lim_{x \to x_n} (x - x_n)F(x)$$

Ejemplo: $F(x) = \frac{3x + 5}{x^2 + 4x + 3} = \frac{3x + 5}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x + 3}$

$A_1 = \lim\limits_{x \to -1} \frac{3x+5}{x+3} = 1$; $A_2 = \lim\limits_{x \to -3} \frac{3x+5}{x+1} = 2$ $\Rightarrow$ $F(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+3}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3}$

Caso 2: Las raíces son iguales y el grado de f(x) es menor que el de g(x).

Si una raíz, por ejemplo x_1, de g(x)=0 es de orden k y las otras raíces son simples con grado de f(x) menor que el grado de g(x), el desarrollo de F(X) es:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-x_1)r(x-x_2).....(x-x_n)} \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^r} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{r-1}} + ... \frac{A_{1(r-1)}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{1r}}{x-x_1} +$$

$$\frac{A_2}{x+x_2} + \frac{A_3}{x+x_3} + ... + \frac{A_n}{x+x_n}$$

Los residuos A_2, A_3,..........A_n, pueden ser encontrados en la forma descrita anteriormente. Para evaluar a A_{11}, A_{12}, A_{13},...............A_{1r}, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_{11} = \lim_{x \to x_1} (x - x_1)F(x) \quad ; \qquad A_{12} = \frac{d}{dx}\left[(x - x_1)^r F(x)\right]_{x = x_1} ;$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx^2}\left[(x - x_1)^{r-1} F(x)\right]_{x = x_1} ,\ldots\ldots\ldots\ldots A_{1r} = \frac{1}{(r-1)!}$$

$$\frac{d}{dx^2}\left[(x - x_1)^{r-1} F(x)\right]_{x = x_1}$$

$$\text{Ejemplo: } F(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3 (x+2)} = \frac{A_{11}}{(x+1)^3} + \frac{A_{12}}{(x+1)^2} + \frac{A_{13}}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+2)}$$

$$A_{11} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = 2$$

$$A_{12} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right]_{x = -1} = \frac{2x(x+2) - (x^2 + 1)}{(x+2)^2} = -4$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx^2}\left[\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right]_{x = -1} = 5$$

$$A_2 = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3} = -5$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3 (x+2)} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x+1)} - \frac{5}{(x+2)}$$

Caso 3: El grado de f(x) es igual o mayor que el grado de g(x).

Si el grado de f(x) es igual o mayor que el grado de g(x), a la función F(x) se le llama impropia y el desarrollo en fracciones parciales

se obtiene primero dividiendo f(x) entre g(x) hasta que el remanente sea de un grado menos que el grado de g(x). Dependiendo de si las raíces de g(x) sean simples o no, el desarrollo puede ser efectuado en la forma descrita en los casos 1 y 2.

$$\text{Ejemplo: } F(x)=\frac{x^3+9x^2+28x+29}{x^2+7x+12} \Rightarrow F(x)=x+2+\frac{2x+5}{x^2+7x+12} \Rightarrow$$

$$F(x)=x+2+\frac{2x+5}{(x+3)(x+4)} \Rightarrow$$

$$F(x)=x+2+\frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(x+4)}$$

$$A_1=\lim_{x\to -3}\frac{2x+5}{x+4}=-1$$

$$A_2=\lim_{x\to -4}\frac{2x+5}{x+3}=3$$

$$F(x)=\frac{x^3+9x^2+28x+29}{x^2+7x+12} \Rightarrow F(x)=x+2-\frac{1}{(x+3)}+\frac{4}{(x+4)}$$

Caso 4 El denominador g(x) contiene factores cuadráticos irreducibles:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x^2+b_nx+b_{n-1})(x^2+b_{n-2}x+b_{n-3})........(x^2+b_1x+b_0)} \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{A_1x+B_1}{(x^2+b_1x+b_0)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+b_2x+b_3)}+...............+\frac{A_nx+B_{n-1}}{(x^2+b_nx+b_{n+1})}$$

Ejemplo: $F(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3-2x^2+x-2} \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2-3}{(x-2)(x^2+1)} \Rightarrow$

$F(x)=\dfrac{A_1}{x-2}+\dfrac{A_2x+A_3}{x^2+1}$, quitando denominadores por medio del método de los coeficientes indeterminados tenemos: $x^2 - 3=A_1(x^2 + 1) + (A_2x + A_3)(x - 2)$, para obtener A_1 aplicamos límite: $A_1=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$A_1=\dfrac{1}{5}$, derivando ambos miembro de la ecuación: $x^2 - 3=A_1(x^2 + 1) + (A_2x + A_3)(x - 2)$ tenemos: $2x=2xA_1 + A_2(x - 2) + A_2x + A_3$ o $2x=2A_1x + 2A_2x - 2A_2 + A_3$ (1) Si $x=0$, se resulta que: $0=-2A_2 + A_3$, derivando (1) 0btenemos: $2=2A_1 + 2A_2=$, como $A_1=\dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$2-\dfrac{2}{5}=2A_2 \Rightarrow A_2=\dfrac{4}{5}$, sustituyendo el valor de A_2 en $0=-2A_2 + A_3$, obtenemos que: $A_3=\dfrac{8}{5}$, $\therefore$, $\dfrac{x^2-3}{x^3-2x^2+x-2}=\dfrac{\frac{1}{5}}{x-2}+\dfrac{\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}$

Veamos un último ejemplo donde apliquemos todos los casos antes visto en el cual el lector completara los pasos intermedios:

$F(x)=\dfrac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+21x^3+16x^2+7x+4}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2} \Rightarrow$

F(x)= $\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{(x^2+x+1)^2}+\frac{A_5x+A_6}{x^2+2x+2}+\frac{A_7}{x-1}+\frac{A_8}{(x-1)^2}$, quitando denominadores y resolviendo respeto a A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 y A_8, resulta: A_1=0, A_2,=0, A_3=0, A_4=1, A_5=1, A_6=3, A_7=1 y A_8=2, por lo tanto,

$$\frac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+21x^3+16x^2+7x+4}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}=$$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x+3}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes integrales indefinidas, aplicando para ello las propiedades de los números reales y las tablas de integración.

1. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

Solución: colocando el radical en forma de potencia y cambiándolo de miembro se obtiene que $I=\int x^{-\frac{1}{2}}dx$, por la tabla de integración se tiene que: $I=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=2\sqrt{x}$ + C

2. $I=\int\frac{x^2}{x^2+2}dx$

Solución: aplicando la propiedad del elemento neutro de la suma simple o adición se tiene que: $I=\int\frac{x^2+(2-2)}{x^2+2}dx \Rightarrow I=\int\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$, por la propiedad N° 2, se tiene que: $I=\int `dx \; -2\int\frac{dx}{x^2+2}$, por las tablas de integración tenemos: $I=x - \frac{2}{\sqrt{2}}tg^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow I=x - \sqrt{2}tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}x$ + C

3. $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable u=1 + Lnx $\Rightarrow$ $du=\frac{dx}{x}$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int\sqrt[3]{u}du \Rightarrow I=\int u^{\frac{1}{3}}du$, por la tabla de integración se tiene que: $I=\frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{u^4}$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{u(1+Lnx)^4}$ + C

$I=\int\frac{e^{tg^{-1}x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}$

Solución: aplicando la propiedad N° 2 de las integrales obtenemos:

4. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=\frac{1}{u} \Rightarrow dx=-\frac{du}{u^2}$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=-\int\frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-2}} \Rightarrow I=-\int\frac{du}{\sqrt{1-2u^2}} \Rightarrow I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}}$, por la tabla de integración se tiene que:

$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}sen^{-1}u$ $\Rightarrow$ $I=-sen^{-1}u$, volviendo el cambio a x nos resulta:

$I=sen^{-1}\frac{1}{x}+C$

5. $I=\int\frac{dx}{e^{x}+1}$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=-Lnu \Rightarrow Lnu=-x \Rightarrow$ $u=e^{-x} \Rightarrow du=e^{-x}dx \Rightarrow dx=\frac{du}{e^{-x}} \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$, sustituyendo en I, tenemos que:

$I=\int\frac{du}{u(u+1)}$, aplicando fracciones parciales tenemos: $I=A_1\int\frac{du}{u}$ + $A_2\int\frac{du}{u+1}$, donde $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{u+1} \Rightarrow A_1=1$ y $A_2=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{u}$ $A_2=1$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u+1}$, por la tabla de integración se tiene que: $I=Lnu + Ln(u + 1)$, aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que $I=Lnu(u + 1)$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=Lne^{-x}(e^{-x} + 1) + C$

6. $I=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{x}+1}}dx$

Solución: $I=\int\frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1}}e^{x}dx$, haciendo el cambio de variable:

$u=e^x+1 \Rightarrow e^x=u-1 \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow I=\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du \Rightarrow I=\int (u^{1/2}-u^{-1/2})du \Rightarrow$

$I=\frac{2}{3}u^{3/2}-2u^{1/2} \Rightarrow I=\frac{2}{3}u^{1/2}(u-3) \Rightarrow I=\frac{2}{3}u\sqrt{e^x+1}(e^x-2) + C$

7. $I=\int \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}dx$

Solución: haciendo el cambio el variable u=x2 + 1 $\Rightarrow$ du=2xdx $\Rightarrow$

$xdx=\frac{du}{2} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+\sqrt{u}}$ **, haciendo el cambio de variable: u=t2 $\Rightarrow$ du=2tdt**

$\Rightarrow I=\int \frac{t}{t`+1}dt \Rightarrow I=\int \frac{t+1-1}{t`+1}dt \Rightarrow I=\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \Rightarrow I=t - Ln\,|1+t|$ **, volviendo**

el cambio de t a u y de u a x, se tiene que $I=\sqrt{u} - Ln\left|1+\sqrt{u}\right| \Rightarrow$

$I=\sqrt{x^2+1}-Ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right| + C$

8. $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=\frac{1}{u} \Rightarrow dx=-\frac{du}{u^2}$,

sustituyendo en I, tenemos que: $I=-\int \frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{4-\frac{1}{u^2}}} \Rightarrow I=-\int \frac{du}{\sqrt{4u^2-1}} \Rightarrow I=-$

$\frac{1}{2}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}}$ **, haciendo el cambio de variable** $t=u^2-\frac{1}{4} \Rightarrow dt=2udu \Rightarrow$

$udu=\frac{dt}{2}$ **, sustituyendo en I tenemos que** $I=-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow I=-\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$ **, por la** tabla de integración se tiene que: I=$-\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ I=$-\frac{1}{2}\sqrt{t}$, volviendo el cambio de t a u y de u a x nos resulta: I=$-\frac{1}{2}\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}$ $\Rightarrow$ I=$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}$ $\Rightarrow$

I=$-\frac{1}{4x}\sqrt{4-x^2}$ + C

9. I= $\int x2^{-x}dx$

Solución: Solución: aplicando la propiedad N° 5 de las integrales tenemos: u=x $\Rightarrow$ du=dx y dv=2^{-x}dx $\Rightarrow$ v=$-\frac{2^{-x}}{Ln2}$, sustituyendo en I tenemos: I=$-x\frac{2^{-x}}{Ln2}$ + $\frac{1}{Ln2}\int 2^{-x}dx$, por la tabla de integración se tiene que I=$-x\frac{2^{-x}}{Ln2}$ - $\frac{2^{-x}}{(Ln2)^2}$ $\Rightarrow$ I=$-\frac{2^{-x}}{Ln2}$(xLn2 + 1) + C

10. I=$\int\frac{Lnx}{\sqrt{x}}dx$

Solución: aplicando la propiedad N° 5 de las integrales tenemos: u=Lnx $\Rightarrow$ du=$\frac{dx}{x}$ y dv=$\frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ v=2$\sqrt{x}$, sustituyendo en I tenemos: I=2$\sqrt{x}$ Lnx - 2$\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx$ $\Rightarrow$ I=2$\sqrt{x}$ Lnx - 2$\int x^{-\frac{1}{2}}dx$ $\Rightarrow$ I=2$\sqrt{x}$ Lnx - $\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ I=$\sqrt{x}$ (2lnx – 1) + C

11. I=$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$

Solución: completando cuadrado en el denominador se tiene que $I=\int \frac{dx}{(x+1)^2+5-1} \Rightarrow I=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$, haciendo un cambio de variable $u=x+1 \Rightarrow du=dx$, sustituyendo en I, nos que $I\int \frac{du}{u^2+4}$, por la tabla de integración nos resulta que $I=\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{u}{2}$, volviendo el cambio a x, tenemos que $I=\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{ux+1)}{2}$ + C

12. $I=\int \frac{dx}{x^2+(a+b)x+ab}$

Solución: desarrollando el denominador se tiene que $I=\int \frac{dx}{x^2+ax+bx+ab} \Rightarrow I=\int \frac{dx}{(x+b)x+(x+b)} \Rightarrow I=\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, aplicando fracciones parciales, tenemos que $I=A_1\int \frac{dx}{x+a} + A_2\int \frac{dx}{x+b}$, donde:

$A_1=\lim_{x \to -a} \frac{1}{x+b} \Rightarrow A_1=\frac{1}{b-a}$ y $A_2=\lim_{x \to -b} \frac{1}{x+a} \Rightarrow A_2=-\frac{1}{b-a}$, sustituyendo estos valores en I, se tiene que: $I=\frac{1}{b-a}(\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x+b})$, por las tablas de integración se tiene que $I=\frac{1}{b-a}(Ln(x+a) - Ln(x-b))$, por las propiedades de los logaritmo nos queda que $I=\frac{1}{b-a}Ln\frac{x+a}{x-b}$ + C

13. $I=\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

Solución: haciendo un cambio de variable, u=x – 1, $\Rightarrow$ x=u + 1 $\Rightarrow$ du=dx, sustituyendo en I, tenemos que: I=$\int \frac{(u+1)^3}{\sqrt{u}}du$, realizando el producto notable en el numerador y aplicando las propiedades de los números reales nos resulta que I=$\int (u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}})du$, resolviendo I por medio de las tablas de integración se tiene que I=$\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$ + 3$\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ + 3$\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + $\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$

I=$\frac{2}{7}\sqrt{u^7}$ + $\frac{6}{5}\sqrt{u^5}$ + 2$\sqrt{u^3}$ + 2$\sqrt{u}$ $\Rightarrow$ I=2$\sqrt{u}$($\frac{1}{7}\sqrt{u^5}$ + $\frac{3}{5}\sqrt{u^3}$ + $\sqrt{u}$ + 1), volviendo el cambio a x, se tiene que:

I=2$\sqrt{(x+1)}$($\frac{1}{7}\sqrt{(x+1)^5}$ + $\frac{3}{5}\sqrt{(x+1)^3}$ + $\sqrt{(x+1)}$ + 1) + C

14. I=$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable x=u2 $\Rightarrow$ u=$\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ dx=2udu, sustituyendo en I, se tiene que: I=2$\int \frac{u^2}{u^2+2}du$, aplicando la propiedad del elemento neutro de la suma simple y la propiedad N° 2 de las integrales tenemos: I=2[$\int du$ - 2$\int \frac{du}{u^2+2}$], por la tabla de integración se tiene que I=2[u - $\frac{2}{\sqrt{2}}$tg$^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}$] $\Rightarrow$ I=2[u - $\sqrt{2}$tg$^{-1}\frac{\sqrt{2}u}{2}$], volviendo el cambio a la variable x, se tiene que: I=2[$\sqrt{x}$ - $\sqrt{2}$tg$^{-1}\frac{\sqrt{2x}}{2}$] + C

15. $I=\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable $x=u^6 \Rightarrow u=\sqrt[6]{x} \Rightarrow dx=6u^5du$, sustituyendo en I, se tiene que $I=6\int \frac{(u^3+1)u^5}{u^2+1}du \Rightarrow$ $I=6\int \frac{u^8+u^5}{u^2+1}du$, realizando la división, se tiene:

$\frac{u^8+u^5}{u^2+1}=u^6 - u^4 - u^3 + u^2 + u - 1 - \frac{u-1}{u^2+1} \Rightarrow$

$I=6\int \left(u^6 - u^4 - u^3 + u^2 + u - 1 - \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\right)du$, por las tablas de integración se tiene que:

$I=6[\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + tg^{-1}u]$, volviendo el cambio a la variable x tenemos que:

$I=6[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x}+1) + tg^{-1}\sqrt[6]{x}\,] + C$

16. $I=\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12}dx$

Solución: factorizando el denominador, por el método de Ruffini,

	1	-2	-11	12
1		1	-1	-12
1		-1	-12	0
-3		-3	12	
	1	-4	0	

entonces se tiene que $x^3 - 2x^2 - 11x + 2=(x - 4)(x - 1)(x + 3)$, luego I se puede escribir como: $I=\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x-1)(x+3)}dx$, aplicando las fracciones parciales tenemos que $I=A_1\int \frac{dx}{x-4} + A_2\int \frac{dx}{x-1} + A_3\int \frac{dx}{x+3}$, donde:

$A_1=\lim_{x \to 4} \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow A_1=5$

$$A_2=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x+3)}\Rightarrow A_2=4$$

$$A_3=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x-1)}\Rightarrow A_3=-7$$

Sustituyendo estos valores en i, nos resulta: $I=5\int\frac{dx}{x-4}+4\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x+3}$, por medio de las tablas de integración se obtiene: I=5Ln(x – 4) + 4Ln(x – 1) -7Ln(x + 3), aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene entonces que $I=\frac{(x-4)^5(x-1)^4}{(x+3)^7}+C$

17. $I=\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

Solución: como la función racional no es propia dividiremos el numerador entre le numerador para así trabajar con funciones propias, es decir,

$$\begin{array}{r|l} x^4-6x^3+12x^2+6 & x^3-6x^2+12x-8 \\ \cline{2-2} & x \\ \underline{-x^4+6x^3-12x^2+8x} & \\ 8x+6 & \end{array}$$

entonces, $I=\int\left(x+\frac{2(x+4)}{x^3-6x^2+12x-8}\right)dx$, por la propiedad N° 2 de las integrales indefinidas, tenemos que $I=\int xdx+2\int\frac{2(x+4)}{x^3-6x^2+12x-8}dx$, donde $I=I_1+I_2$, para $I_1=\int xdx$, implica por medio de las tablas de integración que $I_1=\frac{x^2}{2}$, para I_2 aplicamos Ruffini en el numerador para factorizarlo

	1	-6	12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	

entonces se tiene que $x^3 - 6x^2 + 12x - 8=(x - 2)^3$, luego I_2 se puede escribir como: $I_2=2\int\frac{`4x`+3}{(x-2)^3}dx$, haciendo u n cambio de variable $u=x - 2$ $\Rightarrow x=u + 2 \Rightarrow du=dx$, sustituyendo en I_2, se tiene que $I_2=2\int\frac{`4(u+2)+3}{u^3}dx$ $\Rightarrow$ $I_2=2\int\left(4u^{-2}+11u^{-3}\right)du$, por medio de las tablas de integración se obtiene: $I_2=2[-4u^{-1} -11u^{-2}] \Rightarrow I_2=-2[\frac{4}{u}+\frac{11}{u^2}]$, volviendo el cambio a x, se tiene que $I_2=-2[\frac{4}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}]$, por lo tanto se tiene que:

$$I=\frac{x^2}{2} - 2[\frac{4}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}] + C$$

18. $I=\int\frac{5x^2+6x+9}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9}dx$

Solución: factorizando el denominador, por el método de Ruffini,

	1	-4	- 2	12	9
-1		-1	5	-3	-9
	1	-5	3	9	0
-1		-1	6	-9	
	1	-6	9	0	
3		3	-9		
	1	-3	0		

Entonces, se tiene que $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9=(x + 1)^2(x - 3)^2$, luego I se puede escribir como: $I=\int \frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2(x-3)^2}dx$, aplicando las fracciones parciales tenemos que:

$$I=A_{11}\int \frac{dx}{x+1} + A_{11}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + A_{21}\int \frac{dx}{x-3} + A_{22}\int \frac{dx}{(x-3)^2}$$, donde:

$$A_{11}=\underset{x \to = 1}{\text{Lim}}\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2} \Rightarrow A_{11}=\frac{1}{2}$$

$$A_{12}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2}\right)_{x=-1} \Rightarrow$$

$$A_{12}=\left(\frac{(10x+6)(x-3)^2-2(x-3)(5x^2+6x+9)}{(x-3)^4}\right)_{x=-1} \Rightarrow A_{12}=\frac{5}{16}$$

$$A_{21}=\underset{x \to 3}{\text{Lim}}\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2} \Rightarrow A_{21}=\frac{9}{2}$$

$$A_{22}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2}\right)_{x=3} \Rightarrow$$

$$A_{22}=\left(\frac{(10x+6)(x+1)^2-2(x+1)(5x^2+6x+9)}{(x+1)^4}\right)_{x=3} \Rightarrow A_{22}=0$$

Sustituyendo estos valores en I, nos resulta:

$I=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{16}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-3}$, por medio de las tablas de integración se obtiene: $I=\frac{1}{2}Ln(x + 1) - \frac{5}{16(x+1)} - \frac{9}{2}Ln(x - 3)$, aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$I=Ln\sqrt{(x+1)(x-1)^9} - \frac{5}{16(x+1)} + C$$

19. $I=\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Solución: como la función racional no es propia dividiremos el numerador entre le numerador para así trabajar con funciones propias, es decir,

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & 4x^3 - x \\ \hline & \frac{1}{4} \\ -x^3 + \frac{1}{4}x & \\ \hline \frac{1}{4}x \;\; -1 & \end{array}$$

Entonces, $I=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}x-1}{4x^3-x}\right)dx$, por la propiedad N° 2 de las integrales se tiene que $I=\frac{1}{4}[\int dx + \frac{1}{16}\int\frac{x-4}{x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}dx]$, donde $I=\frac{1}{16}[4I_1 + I_2]$, $I_1=x$, para I_2 aplicaremos las fracciones parciales: tenemos: $I=\int\frac{x-4}{x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}dx = A_1\int\frac{dx}{x} + A_2\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}} + A_3\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$, donde

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{x-4}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})} \Rightarrow A_1=-16$$

$$A_2=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{2})} \Rightarrow A_2=-7$$

$$A_3=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{4})} \Rightarrow A_3=9$$

Sustituyendo estos valores, tenemos: $I_2=-16\int\frac{dx}{x} - 7\int\frac{dx}{x-1} + 9\int\frac{dx}{x+1}$,

por las tablas de integración y las propiedades de los logaritmos,

tenemos: $I_2=Ln\frac{(x+\frac{1}{2})^9}{x^{16}(x-\frac{1}{2})^7}$ **, luego tenemos que:**

$$I=\frac{1}{4}[x+\frac{1}{4}Ln\frac{(x+\frac{1}{2})^9}{x^{16}(x-\frac{1}{2})^7}]+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \frac{x^2-4}{x^2}dx$ 2. $\int x^2\sqrt{x}dx$ 3. $\int (x^2-\sqrt{x}+4)dx$ 4. $\int\sqrt{2+5x}dx$

5. $\int (x^2-\sqrt{x}+4)dx$ 6. $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}dx$ 7. $\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 8. $\int 2\sqrt{2x^2+1}dx$

9. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ 10. $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}$ 11. $\int\frac{3(1-2x)^2dx}{\sqrt{2x}}$ 12. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

13. $\int (x\sqrt{x}-5)^2dx$ 14. $\int\frac{(x^3-1)}{x-1}dx$ 15. $\int(2x+3)dx$ 16. $\int(x^2-\sqrt{x})dx$ 17.

$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ 18. $\int\frac{x}{x^2+1}dx$ 19. $\int xe^x dx$ 20. $\int Lnx\,dx$ 21. $\int x\sqrt{x+5}dx$ 22.

$\int(2x+6)^{15}dx$ 23. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{ax+b}}$ 24. $\int\frac{ax\,dx}{a-x}$ 25. $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}dx$ 26.

$\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$ 27. $\int xe^{2x}dx$ 28. $\int\frac{Ln(x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$ 29. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ 30.

$\int xe^{-x}dx$ 31. $\int x^2e^x dx$ 32. 33. $\int xLnx\,dx$ 34. $\int(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^2dx$ 35.

$\int\frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+(a+1)^2}$ 36. $\int(x+1)Lnx\,dx$ 37. $\int(x^2+3x+4)^3(2x+3)dx$ 38.

$\int(x+1)e^{3x^2+6x+10}dx$ 39. $\int(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})^2dx$ 40. $\int\frac{6x^2+8x+8}{x^3+2x^2+4x}dx$

41. $\int\frac{(x^3+x)dx}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+2}}$ 42. $\int(\frac{1}{x}+x^2+6x)dx$ 43. $\int\frac{x^3+2}{x^4+8x+10}dx$

44. $\int \frac{x}{x^4+6x^2+5}dx$ 45. $\int \frac{(x+3)}{x^2+3x+2}dx$ 46. $\int \frac{x^3-2x}{x^4-81}dx$ 47. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

48. $\int \frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}dx$ 49. $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x}$ 50. $\int \frac{2x^2+6}{x^3+3x}dx$ 51. $\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx$

52. $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$ 53. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$ 54. $\int \frac{(x-2)}{x^3-x^2-2x}dx$

55. $\int \frac{2x^2-8x-8}{(x-2)(x^2-4)}dx$ 56. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$ 57. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$ 58. $\int \frac{(5x+9)dx}{(x-9)\sqrt{x^3}}$

59. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x^3}}$ 60. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$ 61. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a+bx)^5}}$ 62. $\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$

63. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$ 64. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$ 65. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 66. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$

67. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ 68. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}}$ 69. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 70. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x^2+a^2}}$

71. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}}{x^4}dx$ 72. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 73. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$ 74. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}}$

75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-x^2}}$ 76. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}-\sqrt[4]{5-x}}$ 77. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}$

78. $\int x(x+2)(x+3)dx$ 79. $\int \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$ 80. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ 82. $\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$ 83. $\int \frac{x}{(x+1)^n}dx$

84. $\int x^3\sqrt{x^4+2}dx$ 85. $\int\frac{xdx}{x^3+x^2-x-1}$ 86. $\int\frac{3x^2-2x+2}{\sqrt{(x^3-x^2+2x-5)^{12}}}dx$

87. $\int\frac{\lg(2x+3)}{x}dx$ 88. $\int\frac{x+2}{(x-8)^7}dx$ 89. $\int(x+3)\sqrt{x+5}dx$

90. $\int\frac{(2x+11)dx}{3x^3-6x^2+3x}$ 91. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x-5)^9}}dx$ 92. $\int\frac{\lg 5x}{x}dx$

93. $\int\frac{x+3}{(x-4)^2}dx$ 94. $\int\frac{dx}{3x^2-6x}$ 95. $\int\frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}dx$ 96. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

97. $\int xe^{x^2-1}dx$ 98. $\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$ 99. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ 100. $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$

101. $\int\sqrt{e^x+1}dx$ 102. $\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 103. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}$

104. $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$ 105. $\int\frac{x^2}{(3+x^2)^2}dx$ 106. $\int\frac{3-6x-x^2}{2x^3-3x^2-14x+15}dx$

107. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-x}$ 108. $\int\frac{dx}{e^{3x}+1}$ 109. $\int\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3}dx$

110. $\int\ln(x^2+2)dx$ 111. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$ 112. $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$

113. $\int x^5\sqrt{1-x^3}dx$ 114. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 115. $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 116. $\int\frac{2x^5}{x^2+3}dx$

117. $\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ 118. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ 119. $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

120. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ 121. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ 122. $\int\frac{x}{x^2-7x+13}dx$

123. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$

124. $\int \frac{dx}{2x+x^2}dx$

125. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

126. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$

127. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

128. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$

129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^3}}$

130. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

131. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$

132. $\int x^2e^{3x}dx$

133. $\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$

134. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

135. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}dx$

136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

137. $\int \frac{x(x-1)^2}{x^2+3x^2+4}dx$

138. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

139. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

140. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

141. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+ex+1}}$

142. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

143. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x+1}dx$

144. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

145. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

146. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

147. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

148. $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$

149. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$

150. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}dx$

151. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$

152. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\ dx$

153. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^3}}$

154. $\int \frac{dx}{x^2+7}$

155. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

156. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$

157. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$

158. $\int \frac{dx}{x^2+(a+b)x+ab}dx$

159. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$

160. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)dx$

161. $\int \frac{x\,dx}{e^x}$

162. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

163.

$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ 164. $\int x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ 165. $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 166.

$\int(a+bx^3)^3dx$ 167. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$ 168. $\int\frac{x}{(x+1)^{25}}dx$ 169.

$\int\frac{\ln 2x}{xlx4x}dx$ 170. $\int\frac{2x^2+41x-91}{x^3+4x^2+x-6}dx$ 171. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 172.

$\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$ 173. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ 174. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$ 175.

$\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}dx$ 176. $\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}dx$ 177. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ 178.

$\int(x^2+1)^2e^{2x}dx$ 179. $\int\frac{(x^m-x^n)^2dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ 180. $\int\frac{1-3x}{3+2x}dx$ 181.

$\int\frac{dx}{x^4+10x^3+37x^2+60x+36}$ 182. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$ 183. $\int\frac{x^3+x+1}{x(1+x^2)}dx$ 184.

$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ 185. $\int\frac{xdx}{x^4-x^2+3}$ 186. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ 187. $\int x^2\ln x\,d$ 188.

$\int\frac{dx}{2x+x^2}dx$ 189. $\int\frac{dx}{x^8+x^6}$ 190. $I=\int\frac{bx+1}{\sqrt{1-x}}dx$ 191. $I=\int\frac{bx+1}{\sqrt{1-x}}dx$

192. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 193. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{45-4x+x^2}}dx$ 194. $\int\frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}dx$

195. $\int\frac{dx}{2x+x^2}dx$ 196. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ 197. $\int\frac{9x^3}{\sqrt{x^4-1}}dx$ 198. $\int x^7\sqrt{1-x^3}dx$

199. $\int\frac{2x^2+5x-18}{x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18}dx$ 200. $\int\frac{x^2}{1-4x^6}dx$

CAPÍTULO VII

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE INTEGRALES DEFINIDAS Y APLICACIONES

En este capítulo se estudiara: LAS INTEGRALES DEFINIDAS: Integral Definida, Interpretación Geométrica de las Integrales definidas, La integral Definida vista como una Suma, Ejemplos de integrales Definidas Vistas como una Suma, Teorema Fundamental para las Integrales Definidas, Propiedades de las Integrales Definidas, Calculo de Áreas, Función Promedio, Longitud de Arco, Volumen de un cuerpo de revolución, Aplicación de las Integrales Definidas a las Ciencias Sociales. Ejercicios Resueltos. Ejercicios Propuestos.

<u>Definición 1:</u> Sea $F(x)$ una función definida en el intervalo $[a,b]$ donde $a=x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots\ldots<x_{n-1}<x_n<b$, una división arbitraria del intervalo $[a,b]$ en n partes como se muestra en la Fig. N° 1

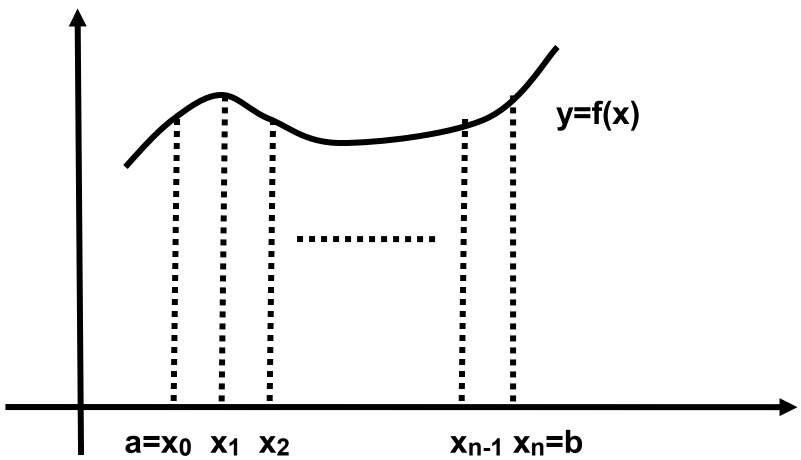


Fig. N° 1

Si consideramos el área bajo la curva de los distintos rectángulos: $A_1=\Delta x_1 f(x_1)=(x_1 - x_0)f(x_1)$, $A_2=\Delta x_2 f(x_2)=(x_2 - x_1)f(x_2)$, ……….., $A_n=\Delta x_n f(x_n)=(x_n - x_n)f(x_{n-1})$,

donde el área total será: $A_t=A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n=s_n$ o $s_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

$\forall i\in Z^+$ y $\xi\in[x_i, x_{i-1}]$, la suma s_n recibe el nombre de <u>suma integral</u> de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, donde s_n es la representación geométrica de estas suma algebraica de todas las áreas de los correspondientes paralelogramos, Teorema fundamental del cálculo integral.

<u>Definición 2:</u> Si hacemos que Δx tienda a cero cuando n crece indefinidamente, es decir, $\Delta x \to 0$, cuando $n \to \infty$, s_n recibe el nombre de

<u>integral definida</u> de la función f(x) entre los límites formados por las rectas x_0=a y x_n=b, es decir:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

, Si f(x) es continua en todo el intervalo [a,b], $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, existe y la función f(x) es integrable, independientemente del método que se aplique para dividir el segmento [a,b] y de la elección de ξ_i dentro de dicho intervalo.

Los valores de Δx_i y ξ_i, se obtienen en la forma siguiente: $\Delta x_i=\dfrac{x_1 - x_0}{n} \Rightarrow \Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$ y $\xi_i=x_i=a + i\Delta x_i \Rightarrow \xi_i=a + \dfrac{b-a}{n}i$, por lo tanto, $f(\xi_i)=f\left[a-\dfrac{b-a}{n}i\right]$ y en consecuencia, la integral vista como una suma se obtiene de la forma: $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a-\dfrac{b-a}{n}i\right]\left[\dfrac{b-a}{n}\right]$

<u>Ejemplo:</u> Hallar el área total de la función f(x)=2x + 3 en el segmento [1,8], dividiendo este en n partes.

<u>Solución:</u> Obtenemos $\Delta x_i=\dfrac{8-1}{n} \Rightarrow \Delta x_i=\dfrac{7}{n}$; $\xi_i=1 + \dfrac{7}{n}i, \Rightarrow \xi_i=\dfrac{n+7i}{n}$, por lo tanto, $f(\xi_i)=2\left[\dfrac{n+7i}{n}\right] + 3$ o $f(\xi_i)=\left[\dfrac{5n+14i}{n}\right]$, sustituyendo estos valores tenemos que:

$$s_n = \lim_{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{5n+4i}{n}\right]\frac{7}{n} \Rightarrow s_n = 7\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(5n+14i) \Rightarrow s_n = 7\lim_{n \to \infty}\frac{12n-7}{n} \Rightarrow$$

$$s_n = 7x12 \Rightarrow s_n = 84$$

Propiedades de las Integrales Definidas:

1. **Si f es continua en el intervalo [a, b], entonces puede interpretarse a $\int_a^b f(x)dx$, como el área de la región limitada por la curva y=f(x), el eje X y las rectas x=a y x=b**

Demostración: Ver Teorema Fundamental del Cálculo Integral

2. $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A=-\int_b^a f(x)dx$

3. $A=\int_a^a f(x)dx\text{a} \Rightarrow A=0$

4. $A=\int_a^b kf(x)dx \Rightarrow A=k\int_a^b f(x)dx$

5. $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A=\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $c\in[a,b]$

6. $A=\int_a^b [kf(x) \pm hf(x)]dx \Rightarrow A=k\int_a^b f(x)dx \pm h\int_a^b f(x)dx, \forall h,k\in\Re$

7. **Sea y=f(x), continua en el intervalo [a,b] y x=φ(t) $\Rightarrow$ φ'(t)dt, continua conjuntamente con su derivada, φ(t) esta en el intervalo [α,β] donde a=$\varphi(\alpha)$ y b=$\varphi(\beta)$ y la función f[φ(t)] esta definida y**

continua en el intervalo $t\in[\alpha,\beta]$ se tiene, entonces, $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$

$$A=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

8. Si $A=\int_a^b f(x)d[g(x)] \Rightarrow A=f(x)g(x) \mid_a^b - \int_a^b g(x)d[f(x)]$

Ejemplo: Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral indefinida. $A=\int_{-1}^{3}(4x^2+5x+6)dx$

Solución: $A=\int_{-1}^{3}(4x^2+5x+6)dx \Rightarrow A=\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x \mid_{-1}^{3} \Rightarrow$

$$A=36 + \frac{45}{2} + 18 -(-\frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 6) \Rightarrow A=\frac{244}{3}$$

Teorema Fundamental del Cálculo integral: 1. Sea f(x) definida por f(t) en el intervalo [a, b] y F una función real definida en [a, b] por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, con f continua en el intervalo [a, b] y $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a, b]$

Demostración: como f es continua en todo el intervalo [a, b], entonces f alcanza un valor mínimo relativo y un máximo relativo en [a, b]. supongase que estos valores sean m y M respectivamente. Si hacemos una división del intervalo [a, b] en n subintervalos de longitud igual a $\Delta x=x_i - x_{i-1}$, $\forall i\in Z+$ y sea $c_i\in[x_{i-1}, x_i]$, entonces se tiene que: m(a –

b)$\leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ y M(a b)$\geq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ y como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, se tiene

que m(a – b)$\leq \int_a^b f(x)dx \leq$ M(a b) (1), las gráficas 2 y 3 ilustran estos

resultados, para el caso en f(x)≥0, ∀∈[a, b]

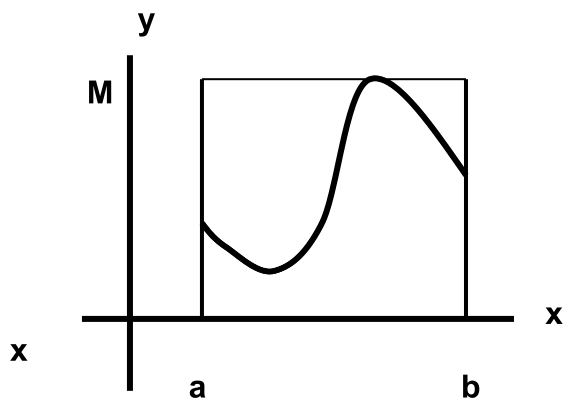


Fig. N° 2

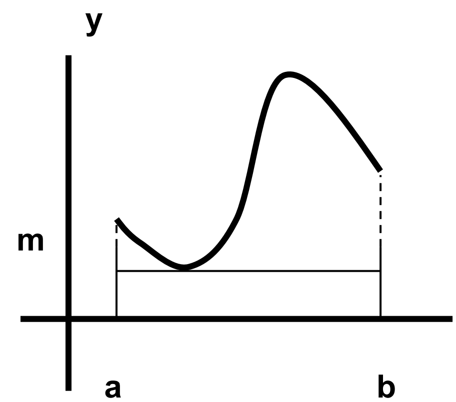


Fig. N° 3

Supongamos que Δx>0, ∃x∈(a, b)/ F(x + Δx) – F(x)= $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$ -

$\int_a^{x} f(t)dt \Rightarrow$ F(x + Δx) – F(x)= $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^{a} f(t)dt \Rightarrow$ F(x + Δx) – F(x)= $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$,

como f es continua en todo el intervalo [a, b], tiene que ser también continua en el intervalo [x, x + Δx]⊂[a, b], entonces, f alcanza valores mínimo y máximo en [x, x + Δx]. Si $m_{\Delta x}$ y $M_{\Delta x}$ denotan los valores mínimo y máximo respectivamente, entonces, por la ecuación (1), se cumple que: $\Delta x_x m_{\Delta x} \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq \Delta x_x M_{\Delta x} \leq$, ∴ $m_{\Delta x} \leq \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leq M_{\Delta x}$ (2)

Consideremos ahora $\Delta x \leq 0$, se conforma el subintervalo $[x, x + \Delta x]$ y razonando de manera análoga se llega de nuevo a la ecuación (2), Como f es continua en $[x, x + \Delta x]$, cuando $\Delta x \to 0$ es $m_{\Delta x}=f(x)=M_{\Delta x}$, $\therefore$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ es decir, } F'(x)=f(x),\ \forall x \in (a, b)$$

Para x=a o x=b, el procedimiento es similar al ya hecho, por lo tanto, se deja al lector estos casos como ejercicios.

2. Sea f(x) continúa y derivable en el intervalo [a, b] y F'(x)=f(x), entonces: $A_t=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

<u>Demostración</u>; definamos a $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, según la parte anterior del Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, por lo que F(x) y G(x) son ambas antiderivadas de f y se cumple que G(x)=F(x) + C, $\forall C \in \Re$, por lo tanto, $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, como, por definición se tiene que $G(a)=\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C=-F(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ y $\therefore$ $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, quedando esto demostrado

<u>Definición 3:</u> **Si la función $f(x) \geq 0$ está definida en el intervalo [a, b], entonces, *el área del trapecio curvilíneo* limitado por las curvas $y=f(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a: $\int_a^b f(x)dx$ (1), ver la gráfica**

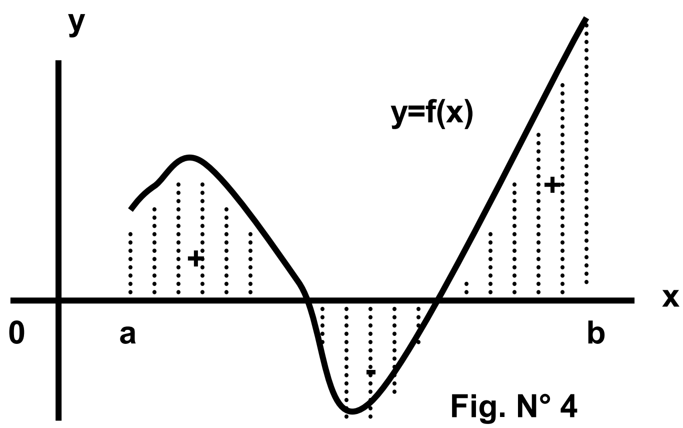


Fig. N° 4

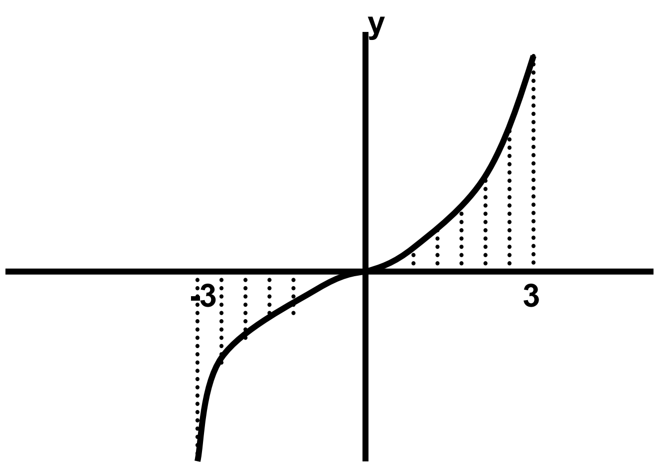
Si $f(x) \leq 0$ en el intervalo [a, b], la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es también menor o igual que cero (≤ 0). Su valor absoluto es igual al área A del trapecio curvilíneo correspondiente: $-A=\int_a^b f(x)dx$.

Si F(x) cambia de signo un número finito de veces en el intervalo [a, b], entonces podemos descomponer la integral en el intervalo [a, b] en suma de integrales en los intervalos parciales. La integral será positiva en los intervalos donde $f(x) \geq 0$, y negativa en aquellos intervalos en que $f(x) \leq 0$. La integral extendida a todo el intervalo dado representa la diferencia de las áreas dispuestas superior e inferiormente al eje X, ver la Fig. N° 4

Para obtener, prescindiendo de su signo, la suma de las áreas, es preciso hallar la suma de los valores absolutos de las integrales en los intervalos parciales indicados o bien calcular la integral.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el área de la región limitada por la siguiente curva: $f(x)=x^3$ en el intervalo [-3, 3]

<u>Solución</u>: $f(x)=x^3$ en el intervalo [-3, 3], En primer lugar realicemos la gráfica de esta función:



En este caso, resolvemos la integral definida de f(x), desde x=-3 hasta x=3, es decir, $A=\int_{-3}^{3} x^3 dx$, por las tablas de integración se tiene que

$A=\left|\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^{3} \Rightarrow A=\frac{3^4}{4}-\frac{-3^4}{4}$=0, pero si observamos la gráfica 5 vemos que para poder calcular el área debemos hacer:

$$A=-\int_{-3}^{0} x^3dx + \int_{0}^{3} x^3dx \Rightarrow A= -\left(\frac{0^4}{4}-\frac{-(3)^4}{4}\right) + \left(\frac{3^4}{4}-\frac{-(0)^4}{4}\right) \Rightarrow A=\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\right)$$

entonces, $A=\frac{81}{2}$, por lo tanto el área buscada es de $\frac{81}{2}$ u^2, (unidades al cuadrado)

<u>Definición 4:</u> Sea la función real tal que f: D $\rightarrow \Re$, donde D$\subseteq\Re$ y sea el intervalo [a, b]$\subseteq$D, siendo f integrable en el intervalo [a, b], se define una <u>función media o valor medio o promedio (μ(x))</u> de f en el intervalo [a, b] a la función μ(x) de f(x), tal que $\mu(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, donde μ(x) es un número de todas las imágenes de la función f en el intervalo [a, b].

El teorema del valor medio para integrales definidas nos demuestra que siendo la función continua en el intervalo cerrado, ella alcanza su valor medio en algún punto intermedio de dicho intervalo. Enunciaremos el teorema del valor medio para integrales definida sin demostrarlo. Sea f una función real tal que f: D $\rightarrow \Re$ y f(x), donde D$\subseteq\Re$ y sea [a, b]$\subseteq$D, f continua en [a, b] $\Rightarrow$

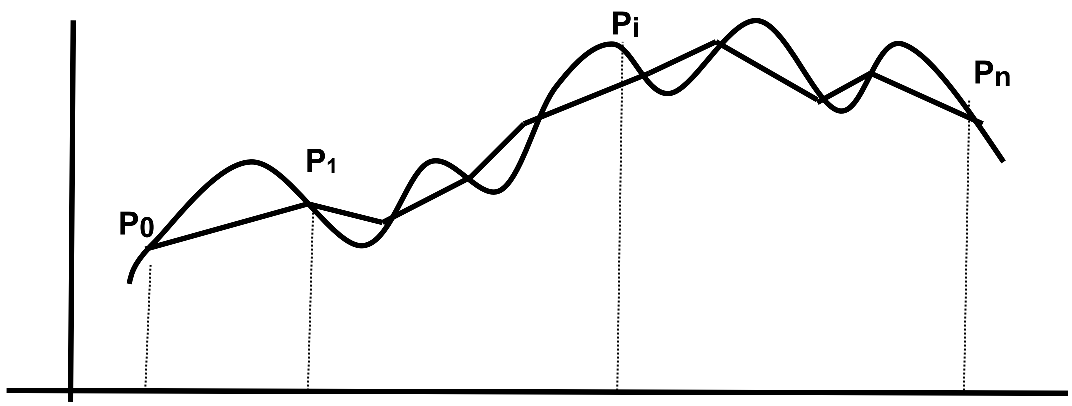
$\exists c\in$(a, b)/ $\int_a^b f(x)dx$ =f©(b – a); siendo f(c)=μ(x) en el intervalo [a, b]

<u>Ejemplo:</u> Hallar el valor medio de la función $f(x)=x^2 + 1$, en el intervalo [1,4].

<u>Solución:</u> $\mu(x)=\frac{1}{3}\int_1^4 (x^2+1)dx \Rightarrow \mu(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 \Rightarrow$

$\mu(x)=\frac{1}{3}\left[(\frac{64}{3}+4)-(\frac{1}{3}+1)\right] \Rightarrow A=8$

<u>Definición 5:</u> Sea y=f(x) diferenciable en el intervalo x∈[a, b], si consideramos la distancia de la función y=f(x) desde el punto (a, f(a)) hasta (b, f(b)) y dividimos el segmento [a, b] en n sub-intervalos iguales de longitud Δx y asignamos cada punto xi un punto ($P_i(x_i)$, $f(x_i)$) como se muestra en la figura más abajo, si obtenemos que las distancias de los segmentos $\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+........+\overline{P_{n-1}P_n}+\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$ que es la suma de las longitudes de los segmentos de la recta P_{i-1} y P_i, la cual nos resulta en una aproximación de la curva de la figura:



$a=x_0$ x_1 .... x_i .... $x_n=b$ Fig. N° 2

nos resulta por la definición de la distancia entre dos puntos que: $\overline{P_0P_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$ con $\Delta x=x_i-x_{i-1}$, por el teorema del valor medio se tiene $f(x_i)-f(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})f'(x_j)=\Delta x f(x_j)$ para algún $x_j\in(x_i-x_{i-1})$, por lo tanto, $\overline{P_0P_i}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2(f'(x_i))^2} \Rightarrow \overline{P_0P_i}=\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x \Rightarrow$

$\overline{P_0P_i} = \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\ \Delta x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\ \Delta x$ y esta suma se puede aproximar a la integral definida $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ o $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(y')^2}dx$ o $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$ la cual se define como la longitud de Arco a una Curva.

Análogamente se obtiene $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(f'(y))^2}dy$ o $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(x')^2}dx$ o $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy$

Ejemplo: Hallar la longitud de arco de la función $y=\sqrt{x^3}$ en el intervalo $x\in[1, 4]$

Solución: Derivando la función $y=\sqrt{x^3}$ y luego Aplicando la fórmula $I=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(y')^2}dx$, obtenemos: $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ entonces, $I=\int_{1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$ por la propiedad Nº 7 de las integrales definida se tiene: $t=1+\frac{9}{4}x \Rightarrow$ $dt=\frac{9}{4}dx \Rightarrow dx=\frac{4}{9}dt$, cuando $x\to 1 \Rightarrow t\to \frac{13}{4}$ y cuando $x\to 4 \Rightarrow t\to 10$, sustituyendo en I, se obtiene: $I=\frac{4}{9}\int_{\frac{13}{4}}^{10}\sqrt{t}dt$ por las tablas de integración tenemos:

$$I=\frac{8}{27}\sqrt{t^3}\ \Big|_{\frac{13}{4}}^{10} \Rightarrow \frac{8}{27}\left[\sqrt{1000}-\frac{\sqrt{2197}}{2}\right] \Rightarrow I=\frac{80\sqrt{10}-52\sqrt{13}}{27}$$

Definición 6: Sea f una función tal que ($f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$) definida en el intervalo $x\in[a, b]$ (en el intervalo $x\in[a, b]$) por encima del eje X (por encima del eje Y), al girar la función f en torno al eje Y (al girar la función g en torno al eje X) se obtiene el volumen de sólido de revolución y se representan por las fórmulas: (Fórmula del Disco)

$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b [y]^2 dx$ y $V=\pi\int_a^b [g(x)]^2 dx = \pi\int_a^b [x]^2 dx$ (ver graficas)

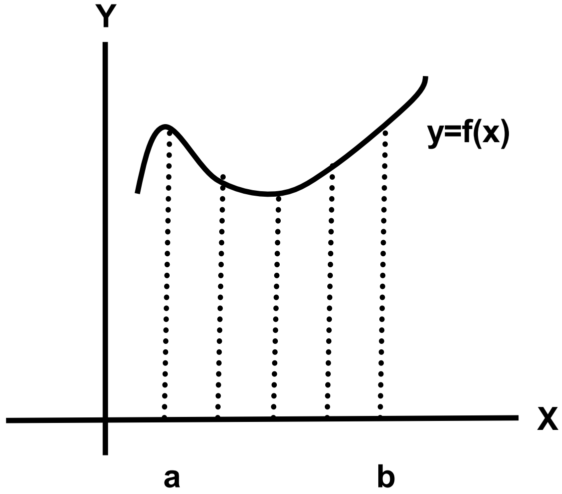


Fig. N° 5

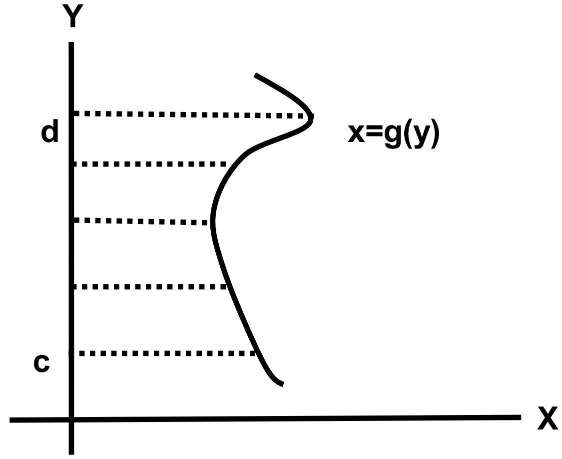


Fig. N° 6

Ejemplo: Hallar el volumen de sólido de revolución de la parábola $y = 3\sqrt{3x}$ y la recta $x = 3$

Solución: sustituyendo la función en la fórmula $\pi\int_a^b [y]^2 dx$ y aplicando la tabla de integración se tiene: $V=9\pi\int_0^3 x dx \Rightarrow V\frac{1}{2}\pi x^2|_0^3 = \Rightarrow$

$V=\frac{27}{2}\pi$

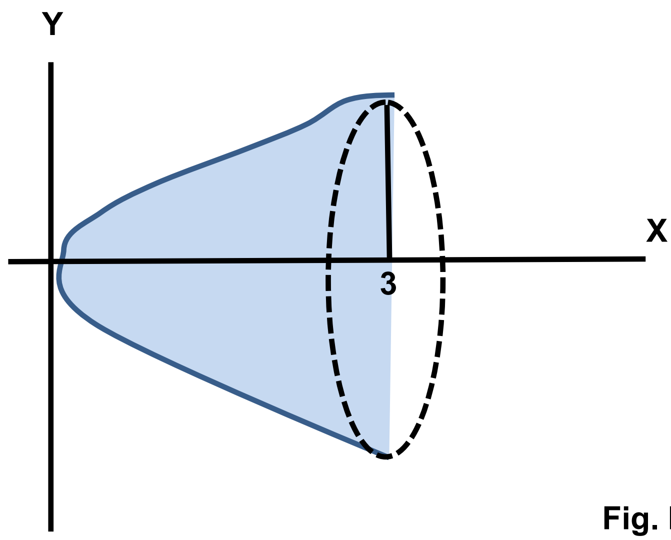


Fig. N° 7

<u>Definición 7:</u> Supongamos ahora que 0≤g(x)≤f(x) para x∈[a, b] y las funciones y_1=f(x) e y_2=g(x) están entre las rectas x=a e y=b, entonces el volumen del solido de revolución se obtiene al girar esta región sobre el eje X se obtiene la fórmula: (Fórmula de la Arandela)

$$V = \pi\int_a^b\left[[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right]dx = \pi\int_a^b\left[[y_1]^2 - [y_2]^2\right]dx$$

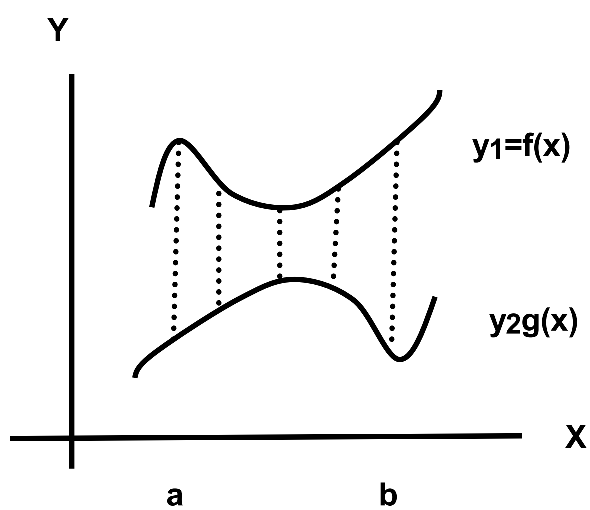


Fig. N° 8

Análogamente $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $x \in [c, d]$ y las funciones $x_1=f(y)$ e $x_2=g(y)$ están entre las rectas y=c y x=d, entonces el volumen del solido de revolución se obtiene al girar esta región sobre el eje Y se obtiene la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \left[[f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right] dy = \pi \int_a^b \left[x_1^2 - x_2^2 \right]^2 dx$$

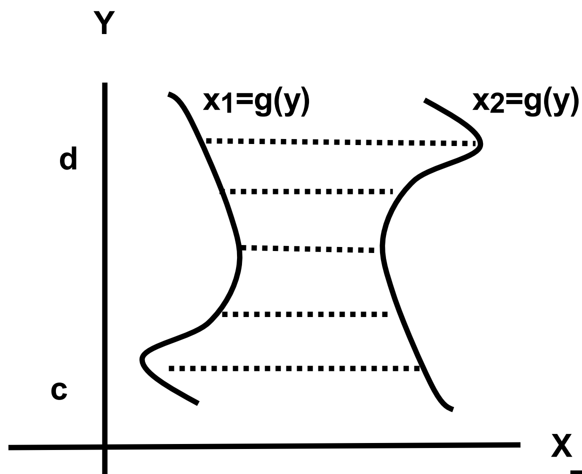


Fig. N° 9

Ejemplo: Sea la función $f(x)=4x^2$ entre las rectas x=0 e y=16, hallar el volumen del solido de revolución obtenido al girarlo en torno al eje X

Solución: aplicando la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \left[[f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right] dy \text{ se obtiene } V = \pi \int_0^2 \left[[16)]^2 - \left[(4x)^2 \right]^2 \right] dy \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^2 (216 - 16x^4) dx \Rightarrow V = \pi (256x - \frac{16}{5} x^5) \Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{2048}{5} \pi$$

<u>Definición 8:</u> Si ahora se asume que $0 \le g(x) \le f(x)$ en el intervalo $x \in [a,b]$, $\forall a \ge 0$, si la región $\Re$ está n l primer cuadrante y entre las curvas y1=f(x) e y2=g(x) entre las rectas x=a y x=b, entonces, el volumen del solido de revolución es obtenido al girar $\Re$ en torno al eje Y está dado por la fórmula:

$V = \pi\int_a^b x[[f(x)]-[g(x)]]dx = \pi\int_a^b x\left[y_1 - y_2\right]dx$, análogamente en el eje X la formula viene dada por: $V = 2\pi\int_c^d y[[f(y)]-[g(yx)]]dy = 2\pi\int_a^b y\left[x_1 - x_2\right]dy$

<u>Ejemplo:</u> Sea la función $f(x)=x^2$ que está por debajo de la función $g(x)=x^3$, entre las rectas x=0 y x=1. Hallar el volumen cuando se gira la región en torno al eje Y.

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b x[[f(x)]-[g(x)]]dx = \pi\int_a^b x\left[y_1 - y_2\right]dx$ se tiene que: $V=2\pi\int_a^b x\left[y_1 - y_2\right]dy$ se tiene que; $V=2\pi\int_0^1 x\left[x^2 - x^3\right]dx$, por las tablas de integración se tiene que: $2\pi(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 \Rightarrow V=\frac{\pi}{10}$

EJERCICIOS RESUELTOS

INTEGRAL DEFINIDA

1. Hallar el área total de la función $f(x)=x^2+2x+3$, en el intervalo [2,5], dividiendo este en n partes.

Solución: Obtenemos $\Delta x_i=\frac{5-2}{n} \Rightarrow \Delta x_i=\frac{3}{n}$; $\xi_i=2+\frac{3}{n}i$, $\Rightarrow \xi_i=\frac{2n+3i}{n}$,

por lo tanto, $f(\xi_i)=\left[\frac{2n+3i}{n}\right]^2+2\left[\frac{2n+3i}{n}\right]+3$ o

$f(\xi_i)=\frac{4n^2+12ni+9i^2}{n^2}+\frac{4n+6i}{3}+3 \Rightarrow f(\xi_i)=\frac{4n^2+12ni+9i^2+4n^2+6ni+3n^2}{n^2}$

$\Rightarrow f(\xi_i)=\frac{11n^2+18ni+9i^2}{n^2}$, sustituyendo estos valores tenemos que:

$$s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{11n^2+18ni+9i^2}{n^2}\right]\left[\frac{3}{n}\right] \Rightarrow$$

$$s_n=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(11n^2+18ni+9i^2) \Rightarrow$$

$$s_n=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[11n^3+19n^2(n+1)+\frac{3n(n+1)(2n+1}{2}\right] \Rightarrow s_n=69$$

2. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar las siguientes integrales indefinidas.

a. $A=\int_{-x}^{x} e^{t}dt$ b. $A=\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^3}$ c. $A=\int_{1}^{3} x(x^2-4)dx$ d. $A=\int_{0}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$

e. $A=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$ f. $A=\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$ g. $\int_{0}^{1} xe^{2x}dt$

<u>Solución a:</u> $A=\int_{-x}^{x} e^{t}dt$, Por las tablas de integración se tiene que: $A=e^t \big|_{-x}^{x} \Rightarrow A=(e^x - e^{-x})$

<u>Solución b:</u> $A=\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^3}$, Por las tablas de integración se tiene que: $A=\int_{-3}^{-1} x^{-3}dx \Rightarrow A=-\frac{1}{2x^2}\Big|_{-3}^{-1} \Rightarrow A=-(\frac{1}{2} - \frac{1}{18}) \Rightarrow A=\frac{4}{9}$, el signo negativo significa que está en el tercer cuadrante, por lo tanto el área es: $A=\frac{4}{9}$

<u>Solución c:</u> $A=\int_{1}^{3} x(x^2-4)dx$, Aplicando la propiedad número 7, tenemos: $t=x^2 - 4 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$, cuando $x\to 1 \Rightarrow t\to -3$, $x \to 3 \Rightarrow t\to 5 \Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{-3}^{5} t^2dt \Rightarrow A=\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^{5} \Rightarrow A=\frac{1}{6}(125 + 27) \Rightarrow$ $A=\frac{76}{3}$

<u>Solución d:</u> $A=\int_{0}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$, aplicando la propiedad número 7 tenemos: $t=1 + x^5 \Rightarrow dt=5x^4dx$

$\Rightarrow$ $A=x^4dx=\frac{dt}{5}$; cuando $x\to 0 \Rightarrow t \to 1$, $x \to 1 \Rightarrow t \to 2 \Rightarrow A=\frac{1}{5}\int_1^2 t^{-1/2}dt$ $\Rightarrow$

$A=\frac{2}{5}t^{1/2} \mid_1^2 \Rightarrow A=\frac{2}{5}(\sqrt{2}-1)$

<u>Solución e:</u> $A=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, Por las tablas de integración se tiene que:

$A=\ln|1+x| \,\Big|_0^1 \Rightarrow A=\ln 2$

<u>Solución f:</u> $A=\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$ $\Rightarrow$ $A=\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$, aplicando fracciones parciales, tenemos: $A= A_1\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + A_2\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$ $\Rightarrow$

$A=\ln|x+1|^{A_1}|x+2|^{A_2}$, donde $A_1=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x+2}$ $\Rightarrow A_1=-1$ y $A_2=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{x+1}$ $\Rightarrow A_2=2$

$\Rightarrow A=\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|_0^1 \Rightarrow A=\ln\frac{3}{2} - \ln 2 \Rightarrow A=\ln\frac{3}{4}$

<u>Solución g:</u> $\int_1^e xe^{2x}dx$, aplicando la propiedad número 8, tenemos:

$f(x)=x \Rightarrow d[f(x)]=dx$ y $d[g(x)]=e^{2x} \Rightarrow g(x)= \frac{1}{2}\, e^{2x}dx \Rightarrow$

$A=\frac{1}{2}\, xe^{2x} \mid_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e e^{2x}dx \Rightarrow A=\frac{1}{2}\left[e.e^{2e}-e^2\right]-\frac{1}{4}e^{2x} \mid_1^e \Rightarrow$

$A=\frac{1}{4}\left[2.e^{2e+1}-2e^2-e^{2e}+e^2\right] \Rightarrow A=\frac{1}{4}\left[e^{2e}(2-e)-e^2\right]$

CALCULO DE AREA

3. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$

Solución: Realizando la gráfica de las funciones: $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$, tenemos:

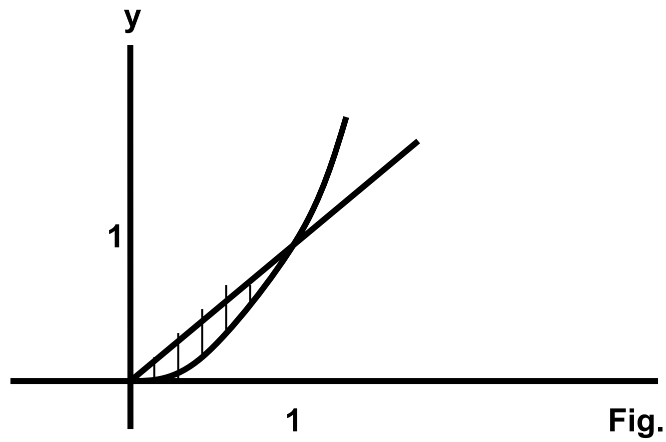


Fig. N° 10

El área buscada es la sombreada en la gráfica, tenemos que hallar los puntos donde las dos líneas se interceptan, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$, para $x=0$, se tiene que $y=0$ y para $x=1$ se tiene que $y=1$, es decir los puntos de intersección son P(0, 0) y P(1, 1), luego el área buscada será integral desde $x=0$ hasta $x=1$, $f(x)$ menos $g(x)$, es decir: $A=\int_0^1 (x-x^2)dx$, aplicando las tablas de integración se obtiene: $A=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \Rightarrow A=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{6}$, por lo tanto, el área es de $\frac{1}{6}$ u^2

4. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$

<u>Solución</u>: $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$, Primero buscaremos los puntos de intersecciones de las dos gráficas f(x) y g(x), luego graficamos las dos funciones y por último calculamos la integral definida para obtener el área buscada

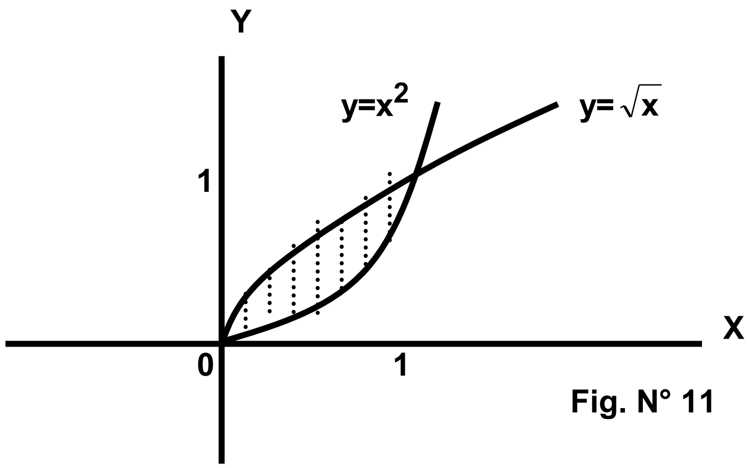


Fig. N° 11

Para hallar los puntos de intersección igualamos las dos gráficas, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x - x^4=0 \Rightarrow x(1 - x^3)$, de donde x=0 y x=1, sustituyendo estos valores de x en una de las dos gráfica se tiene que: para x=0, y=0 y para x=1, y=1, luego estas gráficas se intersecan en los puntos P(0, 0) y P(1, 1), por lo tanto, el área es: $A=\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$,

aplicando las tablas de integración se tiene que el área es: $A=\left|\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1$

$\Rightarrow A=\left|\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^3}{3}\right| \Rightarrow A=\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow A=\frac{1}{3}$, luego el área buscada es $\frac{1}{3}$ u^2

5. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $g(x)=3(x - 2)$

Solución: $f(x)=x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $g(x)=3(x - 2)$ Lo primero que hacemos es buscar los puntos de intersección entre ambas gráfica, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow 3x - 6=x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x=0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8)=0$, factorizando se tiene que $x(x^2 - 6x + 8)=x(x - 2)(x - 4)=0$, de donde se tiene que x=0, x=2 y x=4, sustituyendo estos valores en f(x) o en g(x) se obtienen los valores de y en este caso lo sustituiremos en f(x), obteniéndose: para x=0 $f(0)=3(0 -2) \Rightarrow y=-6$, para x=2, $f(2)=3(2 -2) \Rightarrow y=0$ y para x=4 $f(4)=3(4 -2) \Rightarrow y=6$, es decir los puntos de intersección son; P(0, -6), P(2, 0) y P(4, 6), así las gráficas de f(x) y g(x) limitan las regiones en los intervalos [0, 2] y [2, 4]

Para determinar las áreas correspondientes, debemos conocer si $f(x)\geq g(x)$ o $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[0, 2]$ y $\forall x\in[2, 4]$

Como f(x) y g(x) son continuas en estos intervalos, elegimos en cada uno de ellos un punto de prueba, es decir, en el intervalo [0, 2] elegimos al punto de prueba x=1 y evaluando la función se tiene que: $f(1)=1 - 6 + 11 - 6 \Rightarrow f(1)=0$ y $g(1)=3(1 - 2) \Rightarrow g(1)=-3$, por lo tanto, como $f(1)>g(1)$, se concluye que $f(x)\geq g(x)$, $\forall\in[0, 2]$, en el intervalo [2, 4] elegimos como punto de prueba a x=3 y evaluando la función se tiene que: $f(3)=27 - 54 + 33 - 6 \Rightarrow f(3)=0$ y $g(3)=3(3 - 2) \Rightarrow g(1)=3$, por lo tanto, como $f(3)<g(3)$, se concluye que $g(x)\geq f(x)$, $\forall\in[2, 4]$, ahora realizamos la gráficas de las funciones f(x) y g(x), es decir:

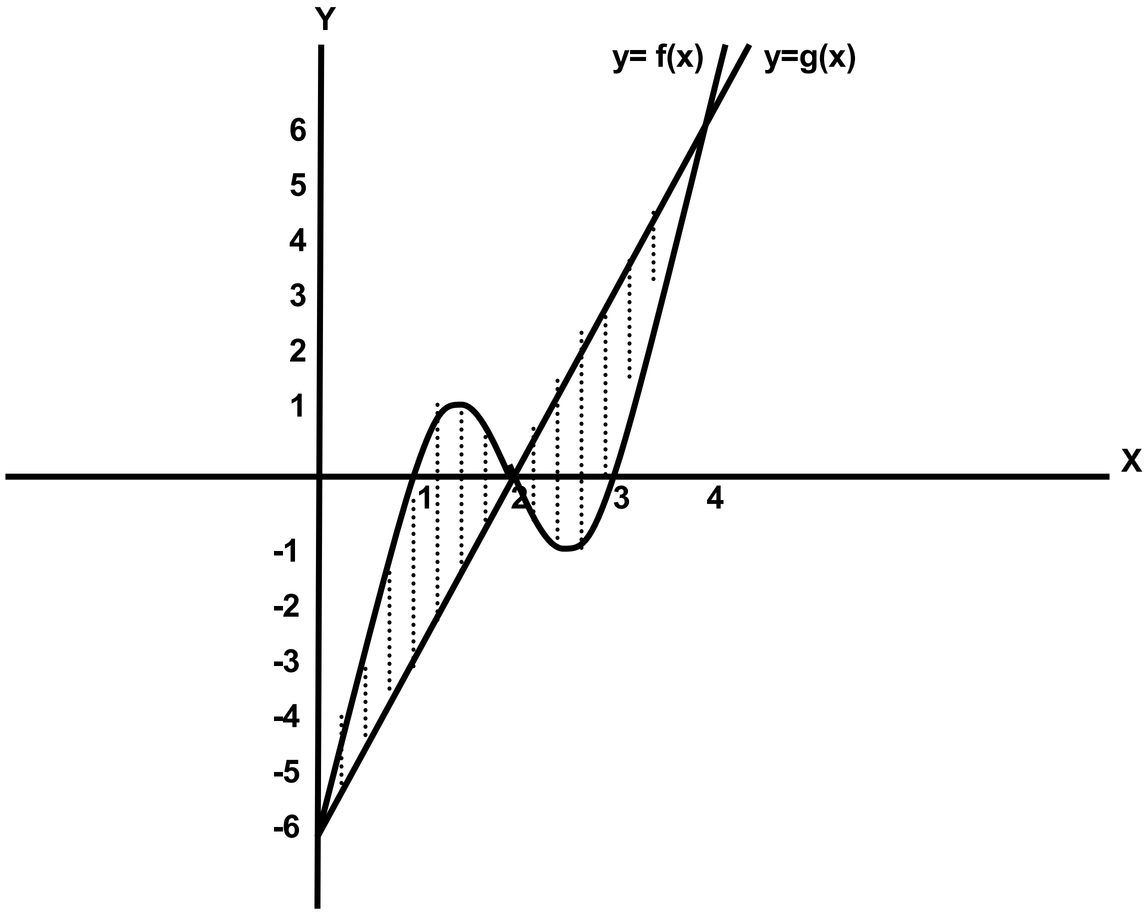


Fig. N° 12

Por último el área se calcula mediante la integral:

$A=\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx + \int_2^4 \left(-x^3 + 6x^2 - 8x\right)dx$, aplicando las tablas de integración se tiene que: $A= \left|\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right|_0^2 + \left|-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right|_2^4 \Rightarrow$

$A=\left|\frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 4(2)^2\right| + \left|-\frac{(4)^4}{4} + 2(4)^3 - 4(4)^2\right| - \left|-\frac{(2)^4}{4} + (2)^3 - 4(2)^2\right| \Rightarrow A=8$ u^2, por lo tanto, el área buscada es de 8 unidades cuadradas.

6. **Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x)=-\frac{x}{2} + 1$, $g(x)=x + 1$ y $h(x)=-2x + 7$**

<u>Solución</u>: f(x)=-$\frac{x}{2}$ + 1, g(x)=x + 1 y h(x)=-2x + 7, lo primero que vamos hacer es realizar la gráfica de las tres rectas, es decir: f(x) corta al eje Y en el punto P(0, 1) y al eje X en el punto P(2, 0), g(x) corta al eje Y en el punto P(0, 1) y al eje X en el punto P(-1, 0) y la recta h(x) corta al eje Y en el punto P(0, 7) y al eje X en el punto P(3.5, 0), luego la gráfica es:

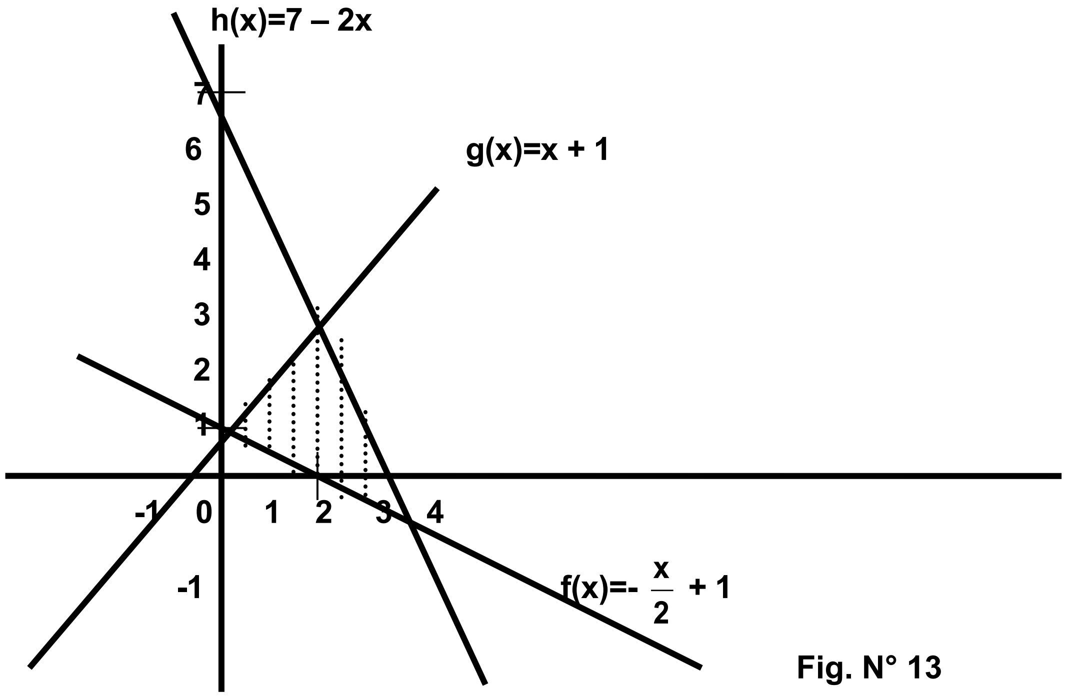


Fig. N° 13

Como se puede observar en la gráfica la intersección entre f(x) y g(x) está en el punto P (0, 1) y la intersección entre f(x) y h(x) está en el punto P (4, -1) y la intersección entre g(x) y h(x) está en el punto P(2,3), por último calculamos el área por medio de las integrales:

$$A=\int_0^2\left((x-1)-(-\frac{x}{2}+1)\right)dx + \int_2^4\left((7-2x)-(-\frac{x}{2}+1)\right)dx \Rightarrow$$

$A=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x\right)dx + \int_2^4\left(6-\frac{3}{2}x)\right)dx$, por medio de las tablas de integración se tiene $\Rightarrow$ $A=\left|\frac{3x^2}{4}\right|_0^2 + \left|6x-\frac{3x^2}{4}\right|_2^4 \Rightarrow A=\left|\frac{3(2)^2}{4}\right| + \left|6(4)-\frac{3(4)^2}{4}\right| - \left|6(2)-\frac{3(2)^2}{4}\right|$ $\Rightarrow$ A=6 Por lo tanto el área buscada es de 6 unidades cuadradas.

VALOR MEDIO

7. Siendo f la función real definida por f(x)=x, encuentre el número c de [0, 2] que satisface para f el teorema del valor medio para las integrales definidas.

<u>Solución:</u> Como f es continua en el intervalo [0, 2], ella debe alcanzar su valor medio en algún numero c de (0, 2) que satisface que $f(c)=(0 - 2)=\int_0^2 f(x)dx$, aplicando la tabla de integración se tiene que $f(c)=\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow f(c)=\left[\frac{1}{2}\frac{2^2}{2}\right] \Rightarrow f(c)=1$, geométricamente, este resultado significa que el área del triángulo rectángulo cuya base y altura es de dos unidades, es igual al área del rectángulo en el que un lado mide dos unidades y el otro lado mide una unidad, ver la gráfica N° 10

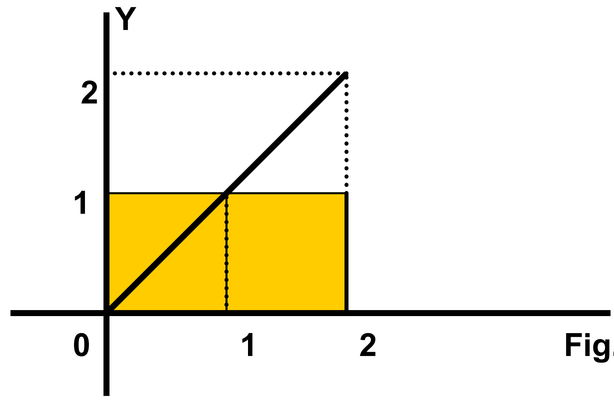


Fig. N° 14

8. Pedro Pérez recién ha adquirido una máquina industrial, la cual disminuirá su valor durante los próximos 15 años según el modelo matemático dado por la ecuación f(t)=15000t – 150000, donde t esta dado en años. Sabiendo que Pedro Pérez compró la maquinaría en 1000000 $, determine su valor promedio durante el período de 15 años.

<u>Solución:</u> El valor de la máquina en función del tiempo está dado por la ecuación: $f(t)=\int(15000-150000)dt$, por medio de la tabla de integración se tiene que $f(t)=7500t^2 - 150000t + C$, como $\mu(0)=1000000$, entonces tenemos que C=1000000, por lo tanto, $f(t)= 7500t^2 - 150000t + 1000000$, luego el valor promedio de la máquina, en el período de 15 años, lo obtendremos apoyándonos en la definición del valor medio, es decir, $\mu(t)=\dfrac{1}{15-0}\int_0^{15}(7500t^2 - 150000t + 10000009)dt$, aplicando las tablas de integración se tiene que $\mu(t)=\dfrac{1}{15}\left[2500t^3 - 75000t^2 + 1000000t\right]_0^{15} \Rightarrow$

$\mu(t)=\frac{1}{15}\left[2500(15)^3-75000(15)^2+1000000(15)\right] \Rightarrow \mu(t)=437500$, es decirle valor promedio de la máquina trascurrido 15 años es de 437500 $

LONGITUD DE ARCO

9. Hallar la longitud de arco de la circunferencia en el origen de radio 2

Solución: La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2=4$, luego la derivada de esta función es: $y'=-\frac{x}{y}$ sustituyendo en la fórmula de longitud de arco se tiene:

$$I=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx \Rightarrow I=\int_0^2\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx \Rightarrow I=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx \Rightarrow 2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Por las tablas de integración se tiene: $I=2sen^{-1}\frac{1}{2}x\ \Big|_0^2 \Rightarrow y=\pi$

10. Hallar la longitud de arco de la función $x=5\sqrt{(y-3)^3}$ en el intervalo $x\in[2, 4]$

Solución: Derivando la función $x=5(y-3)^{\frac{3}{2}}$ en función de y, se tiene $\frac{dx}{dy}=\frac{15}{2}(y-3)^{\frac{1}{2}}$, aplicando la fórmula $L=\int_\alpha^b\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy \Rightarrow$

$$L=\int_2^4\sqrt{1+(\frac{15}{2}(y-3)^{\frac{1}{2}})^2}dy \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{1+\frac{225}{4}(y-3)}dy, \Rightarrow L=\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{225y-221}dy,$$

por la tabla de integración nos resulta: $L=\frac{2}{750}\left[\sqrt{(225y-221)^3}\right]_2^4 \Rightarrow$

$$L=\frac{2}{750}\left[\sqrt{(225(4)-221)^3}-\sqrt{(225(2)-221)^3}\right]\Rightarrow L=7.94$$

11. Hallar la longitud de arco de la función $x^4 - 24xy + 48=0$ en el intervalo $x\in[2, 4]$

Solución: Despejando y, tenemos: $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{x}$; derivando esta función se tiene: aplicando la fórmula: $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dy \Rightarrow$

$$L=\int_2^4\sqrt{1+(\frac{1}{8}x^2-\frac{2}{x^2})^2}dx \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{2}+\frac{4}{x^4}}dx \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{(\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{x^2})^2}dx$$

$\Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{x^2}}dx$, Por la tabla de integración tenemos: $L=\left[\frac{1}{8}x^2-\frac{2}{x^2}\right]_2^4$

$$\Rightarrow L=\left[\frac{64}{8}-\frac{1}{2}-\frac{8}{24}-1\right]\Rightarrow L=\frac{17}{8}$$

12. Hallar la longitud de arco de la función $y=\text{senh}\frac{x}{2}$ en el intervalo $x\in[0, 1]$

Solución: Derivando la función y=senh $y=\text{senh}\frac{x}{2}$ con respecto a x se tiene: $y`=\cosh\frac{x}{2}$ sustituyendo en la fórmula: $L=\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$ se tiene que

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{2}\cosh\frac{x}{2})^2}dx \Rightarrow \qquad L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2}dx \Rightarrow$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{4}(e^x-2+e^{--x})^2}dx \Rightarrow \qquad L=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{(e^x-e^{--x})^2}dx \Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x-e^{--x})dx \Rightarrow \qquad L=\int_0^1(\cosh x dx \Rightarrow$$

$$L=\text{senh}x_0^1 \Rightarrow \text{senh}1-\text{senh}0 \Rightarrow e+e^{-1}$$

13. Hallar la longitud de arco de la asteroide $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = \sqrt{a^3}$ en el intervalo $x \in [0, 4]$

<u>Solución:</u> Hallado la derivada de la función $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = \sqrt{a^3}$ se tiene:

$y' = -\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ como la curva es simétrica tomaremos una cuarta parte de ella y el resultado lo multiplicamos por 4, por lo tanto la longitud de arco será:

$$l = 4\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx \Rightarrow l = 4a^{\frac{2}{3}}\int_0^4 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx, \text{por la tabla de integración se tiene} : l = \frac{3}{2}a$$

VOLUMEN

14. Hallar el volumen del cono de 10 cm. de altura y 32cm. de radio.

<u>Solución:</u> El cono lo genera la región que se encuentra en la recta $y = \dfrac{16}{5}$ y el eje X, entre x=0 y x=10, al girar en torno al eje X, aplicando la fórmula: $V = \pi\int_a^b [y]^2 dx \Rightarrow$ $V = \dfrac{1024}{256}\pi\int_0^{10} [x]^2 dx$, por las tablas de integración se tiene que: $V = \dfrac{1024}{256}\pi x^3\Big|_0^{10} \Rightarrow V = \dfrac{4000}{768}\pi$

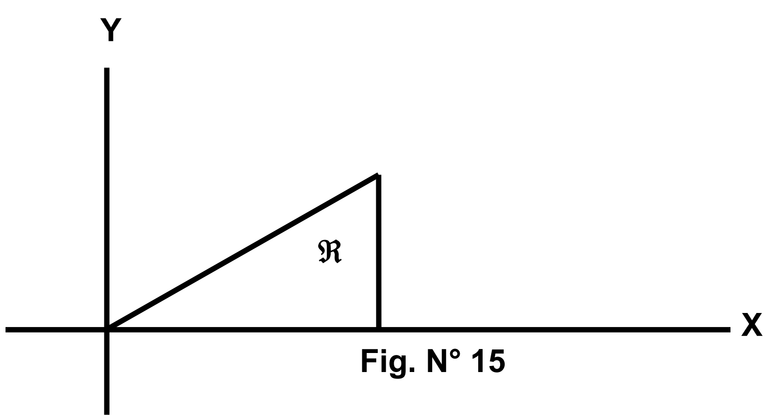


Fig. N° 15

15. **Sea $\Re$ la región comprendida entre el eje X, la curva x=2**

Solución: **Aplicando la fórmula:**

$V = \pi\int_a^b [y]^2 dx$ **se tiene:** $V = \pi\int_0^2 [x^3]^2 dx$, **por la tabla de integración se tiene que:** $V = \frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{128}{7}\pi$

16. **Hallar el volumen del solido engendrado haciendo girar alrededor del eje de las X la elipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Solución: **Aplicando la fórmula:**

$V = \pi\int_a^b [y]^2 dx$, **donde** $V=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, **entonces se tiene que:**

$V = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a \left[\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 dx$ **por la tabla de integración se tiene que:**

$V = 2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{4}{3}ab^2\pi$

17. **Hallar el volumen engendrado por la superficie limitada por la parábola cubica $ay^2=x^3$ en el eje de las Y y la recta AB (y=a) y gira alrededor de AB.**

Solución: **Aplicando la fórmula:**

$V=\pi\int_a^b[y]^2dx$, se tiene que: $V=\pi\int_0^a[a-y]^2dx \Rightarrow V=\pi\int_0^a[a^2-2ay+y^2]^2dx$,

como $y=\frac{\sqrt{a}}{a}x^{\frac{3}{2}}$ tenemos que: $V=\pi\int_0^a\left[a^2-2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{a}x^3\right]dx \Rightarrow$ por la tabla

de integración se tiene que: $V=\pi(a^2x+\frac{2}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4a}x^3)\Big|_0^a \Rightarrow V=\frac{15}{4}\pi$

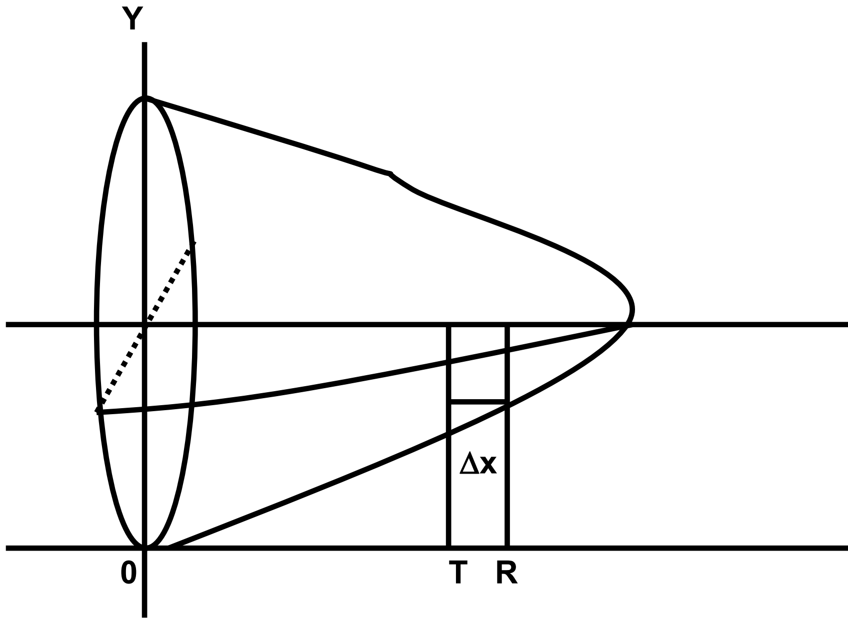


Fig. N° 16

18. Hallar el volumen del toro, engendrado al girar el circulo $x^2(y-b)^2 \leq a^2$

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$V=\pi\int_a^b x[y_1-y_2]dx$, donde $y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}$ e $y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$ tiene que:

$V=\pi\int_{-a}^{a}x\left[b-\sqrt{a^2-x^2}-b+\sqrt{a^2-x^2}\right]dx \Rightarrow V=4ab\pi\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}dx$, por la

tabla de integración se tiene que: $V=\left[4b\pi b\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right]\Big|_{-a}^{a} \Rightarrow$

$V=2a^2b\pi^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

INTEGRALES INDEFINIDAS

1. Formar las sumas integrales s_n, para las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^2$ en el intervalo [-2,1]

b. $f(x)=x^2$ en el eje 0X y la vertical x=a, $\forall a>0$

c. $f(x)=2^x$ en el intervalo [0,10]

d. $f(x)=x^3 + 2x + 3$ en el intervalo [1,5]

e. $f(x)=2x + 1$, para y=0 e x=1

f. $f(x)=x^2 - 2x - 4$ en el intervalo [0,1]

g. $f(x)=4 - x^2$ en el intervalo [0,2]

h. $f(x)=3x - 2$ en el intervalo [4,8]

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a. $A=\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$ b. $A=\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx$ c. $A=\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

d. $A=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+2x}}$ e. $A=\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$ f. $A=\int_0^1 \frac{x^5}{x+2}dx$ g. $A=\int_0^9 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

h. $A=\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$ i. $A=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ j. $A=\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x2}}$ k. $A=\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$

l. $A=\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$ m. $A=\int_0^1 x^{15}\sqrt[3]{1+3x^8}dx$ n. $A=\int_{-1}^2 \frac{x^2dx}{x`+2}$ o. $A=\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^2`+1}$

p. $A=\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+16}}$ q. $A=\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ r. $A=\int_1^3 \sqrt{x+1}dx$ s. $A=\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$

t. $A=\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt[3]{x-2}+8}dx$ u. $A=\int_0^{\ln 2} (\sqrt{e^x-1})dx$ v. $A=\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

w. $A=\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ x. $A=\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ y. $A=\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

z. $A=\int_0^a (\sqrt{ax-x^2}dx$ aa. $A=\int_0^e \ln x\,dx$ ab. $A=\int_0^1 x^3e^{2x}dx$ ac. $A=\int_{1/3}^{1} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$

ad. $A=\int_0^1 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ ae. $A=\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ af. $A=\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}dx$ ag. $A=\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$

CALCULO DE AREA

1. Calcular el área de las regiones limitadas por las gráficas de las funciones definidas por:

a. $f(x)=\ln x$, el eje x y la recta $x=e$

b. $f(x)=4x-x^2$, y el eje de las abscisas

c. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, la recta $x=4$ y el eje

y

d. $f(x)=4-x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$

e. $y^3=x$, y las rectas $y=1$ y $x=8$

f. $f(x)=x + x^2 + x^3$, los ejes de coordenadas y la recta $x=1$

g. $f(x)=4x(x - 1)(x - 2)$, el eje x y la recta $x=-1$

h. $f(x)=\frac{a^3}{x^2 + a^2}$

i. $f(x)=3x^2$ y $g(x)=1$, en [1, 2]

j. $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, el eje x y la recta $x=2$

k. $y^2=2px$ y $x^2=2py$

l. $f(x)=(x - 1)(x - 2)$ y $g(x)=(1 + x)(x + 2)$

m. $f(x)=3x^2$, $y=6$ y el eje y

n. $f(x)=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ y la recta $y=2x$

o. $f(x)=x^3$, $y=8$ y el eje y

p. $xy=a^2$ y el eje x, en [a, 2a]

q. $f(x)=\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=4 - \frac{2}{3}x^2$

r. $f(x)=-x^2 + 4x - 3$ y las rectas tangentes trazadas a la gráfica de f en los puntos P(0, -3) y P(3, 0)

s. $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta $x=1$

t. $f(x)=\frac{1}{x^2 + 1}$ y $g(x)= \frac{x^2}{2}$

u. $f(x)=\ln x$, las rectas trazadas en $y=\ln a$ e $\ln b$ y el eje y

v. $f(x)=x^2 + 2x + 3$ y $g(x)=x + 5$

w. $f(x)=3 + x – x^2$ y $g(x)=2x – 3$ en [-2, 4]

x. $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ y $h(x)=2x$

y. $f(x)=x + 6$, $g(x)x3$ y $h(x)=-\frac{x}{2}$

z. $f(x)=x$, $g(x)=3x$ y $h(x)=4 – x$

aa. $y=x^3$, la recta $y=8$ y el eje OY

ab. De las dos partes en que la parábola $y^2=2x$ divide al círculo $x^2 + y^2=8$

ac. Por la cisoide $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y su asíntota $x=2a$ $(a>0)$

ad. Comprendida entre la curva de Agnesi $y = \frac{a^2}{x^2 + a^2}$ y el eje de las abscisas

ae. De la figura comprendida entre la curva $y = \frac{1}{x^2}$, el eje OX y la recta $x=1$ $(x>1)$

af. De la región limitadas por las curvas $y=8 + 4x – x^2$ e $y=x^2 – 2x$

ag. De la figura limitada por la parábola $y=2x – x^2$ y la línea recta $y=3 – 2x$

ah. De la figura limitada por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la línea recta $x=1$

VALOR MEDIO

2. Hallar el valor promedio de las siguientes funciones sobre el intervalo dado:

a. $f(x)=x^2$, en el intervalo [0, 4]

b. $f(x)=3x - 1$, en el intervalo [1, 2]

c. $f(x)=2 - 3x^2$, en el intervalo [-1, 2]

d. $f(x)=x^2 + x + 1$, en el intervalo [1, 3]

e. $f(x)=4x^3$, en el intervalo [-2, 2]

f. $f(x)=\sqrt{x}$, en el intervalo [1, 9]

g. $f(x)=x\sqrt{x^2-9}$, en el intervalo [0, 4]

h. $f(x)=\frac{1}{x}$, en el intervalo [2, 4]

i. $f(x)=|x|$, en el intervalo [3, 5]

j. $\begin{cases} -x-2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

k. $\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \\ x-3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

l. $\begin{cases} x+4 & \text{si } x<0 \\ x-4 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

m. $\begin{cases} x+6 & \text{si } z<0 \\ -x-6 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

3. Represente gráficamente todas las funciones anteriores e intérprete geométricamente los valores medios obtenidos.

4. Encuentre el valor medio, en el intervalo indicado en cada caso, de las funciones definidas por:

a. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo [1, 4]

b. $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ en el intervalo $[1, \frac{3}{2}3]$

5. Encuentre el valor de a, para el cual el valor medio de la función determinada por f(x)=lnx en el intervalo [1, a], es igual a la razón promedio de cambio de esa función en el intervalo indicado

6. Suponiendo ahora que, después de producir 30 unidades, la función de aprendizaje está definida por: $f(x)=1272x^{-0.25}$, determine el número de horas necesarias para producir 50 unidades adicionales.

LONGITUD DE ARCO

7. Hallar la longitud de arco de las funciones:

a. $y^3=8x^2$ en el intervalo $x\in[1, 8]$

b. $6xy=x^4 + 3$ en el intervalo $x\in[1, 2]$

c. $27y^2=4(x -2)$ en el intervalo $x\in[2, 6\sqrt{2}]$

d. $y=\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln y$ en el intervalo $x\in[1, e]$

e. $y=\ln\cos x$ en el intervalo $x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

f. $y=x^3$, en el intervalo $x\in[1, 8]$

g. $x^2 - 6x + y=0$ y $x^2 - 2x - y=0$ en el intervalo $x\in[3, 7]$

h. $y=2x - x^2$, en el intervalo $x\in[0, 2]$

i. $y=\tan x$, en el intervalo $x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

j. $y=\sqrt[3]{x}$, en el intervalo $x\in[1, 2]$

k. $y=\cos x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

l. $y=x\,\mathrm{sen}x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

m. $y=e^{-x}\mathrm{sen}x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

n. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, en el intervalo $x\in[1, 3]$

o. $y=\ln\sec x$, en el intervalo $x\in\left[\frac{\pi}{3}, \ln 2\right]$

p. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, en el intervalo $x\in[0, \ln 3]$

q. $y=e^{y}=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ en el intervalo $x\in[a, b]$

r. $y=a\,\mathrm{coh}\frac{x}{a}$, en el intervalo $x\in[0, a]$

s. $y=e^x$, en el intervalo $x\in[1, e]$

t. $y=\ln x$, en el intervalo $x\in[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

u. $y=\mathrm{sen}\text{-}1(e^{-x})$, en el intervalo $x\in[0, 1]$

v. x=lnsecy, en el intervalo $x\in\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

w. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}$ lny, en el intervalo $x\in[1, e]$

x. $9ay^2=x(x-3a)^2$, en la parte cerrada de esta.

y. $y=\ln(\text{ctgh}\frac{x}{2})$, en el intervalo $x\in[a, b]$

8. Se desea tender una cuerda entre dos postes distantes 20 mts. Si la cuerda toma la forma de la catenaria, $y=4\left(e^{\frac{x}{30}}-e^{-\frac{x}{30}}\right)$ $x\in\{-10, 10\}$, calcule la longitud de la cuerda.

9. Al patear un balón de fútbol, este sigue una trayectoria de $y=\frac{1}{15}x(60-x)$ mts. Calcule la longitud de arco si el balón permanece 4 segundos en el aire.

VOLUMEN DE REVOLUCIÓN DE SOLIDOS

10. Considerar la región $\Re$ acotada por la parábola $y^2=8x$ y la recta x=2 (ver figura)

a. Hallar el volumen del sólido generado por $\Re$ al girar en torno del eje Y

b. Hallar el volumen del sólido generado por $\Re$ al girar en torno a la recta x=2

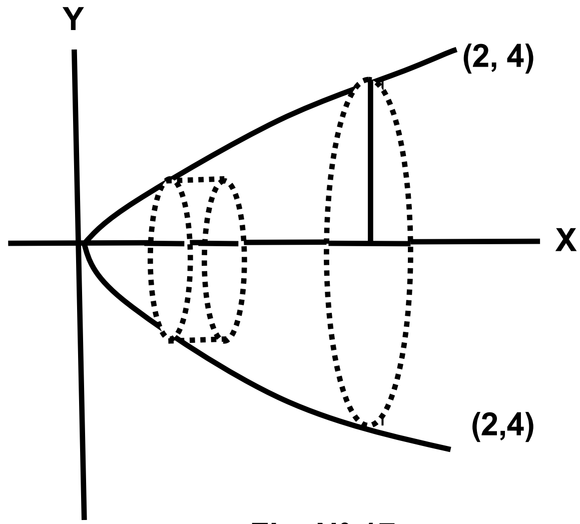


Fig. N° 17

11. Hallar el volumen del solido generado por la región que está entre el eje X y la parábola $y=4-x^2$ al girar en torno de la recta $y=6$

12. Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región acotada por $y=x^2$, $x=0$ e $y=16$, en torno a $y=16$, utilizar la fórmula del disco.

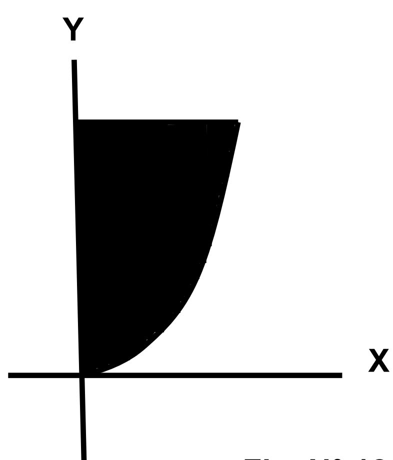


Fig. N° 18

13. **Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región dentro de la curva $y^2=x^4(1 - x^2)$, en torno al eje X, utilizar la fórmula del disco**
14. **Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región dentro de la parábola $x=9 - y^2$ y entre el eje Y, en torno al eje Y, utilizar la fórmula del disco.**
15. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^3$, $x=0$, e $y=8$, en torno de $x=2$, utilizar la fórmula de arandela.**
16. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $x=9 - y^2$, $y=x - 7$, en torno de $x=4$, utilizar la fórmula de arandela.**
17. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^3$, $y=4x - x^2$, en torno de $x=5$, utilizar la fórmula de capas cilíndricas.**
18. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=e^{x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, en torno al eje Y.**
19. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^2$, $x=y^2$, en torno al eje X.**
20. **Un sólido tiene una base circular con radio de cuatro unidades, hallar el volumen del solido si todo plano perpendicular a un**

diámetro fijo (el eje de las X de la figura) es: a. un semicírculo, b. un cuadrado, c. un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa en el plano de la base.

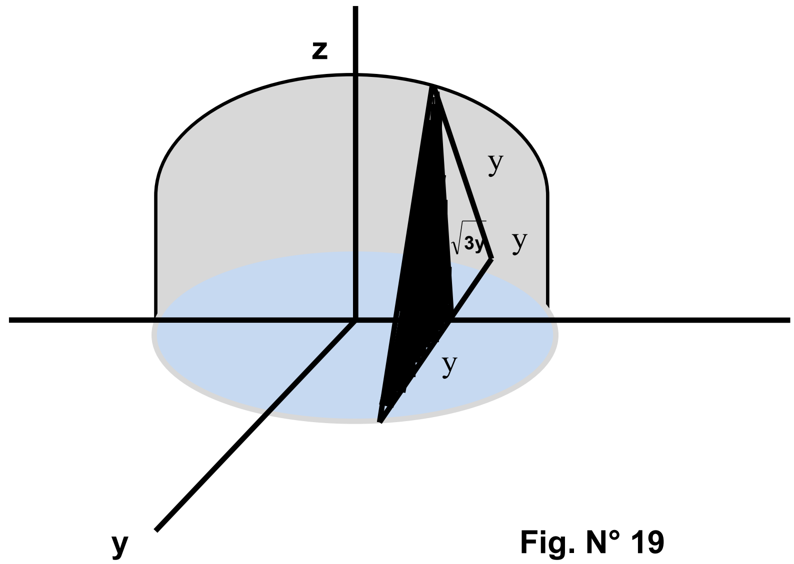


Fig. N° 19

21. La base de un sólido es el circulo $x^2 + y^2=16x$, y toda sección plana circular al eje X es un rectángulo cuya altura es el doble de la distancia del plano de la sección al origen, hallar el volumen.
22. Se perfora un hoyo con radio de una unidad en una esfera cuyo radio equivale a tres unidades; el eje del hoyo es el diámetro de la esfera. Hallar el volumen de la parte restante de la esfera.
23. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del eje 0X, de la superficie limitada por el eje 0X y la parábola $y=ax - x^2$ $(a>0)$
24. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje 0X, la curva $y=\text{sen}2x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

25. **Hallar el volumen de los cuerpos engendrado al girar las superficies limitadas por las líneas y=ex, x=0, e y=0 alrededor: a. del eje 0X, b. del eje 0Y.**

26. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor de la recta y=-p, la figura limitada por la parábola y^2=2px y la recta x=$\frac{p}{2}$**

27. **Hallar el volumen del cuerpo que engendra al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ alrededor de su asíntota x=2a.**

28. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje 0Y, la parte de la parábola y^2=4ax, que intercepta la recta x=a**

29. **Demostrar, que el volumen de la parte del cuerpo de revolución, engendrado al girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor del eje 0X, que intercepta el plano x=2a, es igual al de una esfera de radio a.**

30. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje 0X, la superficie comprendida entre las parábolas y=x^2 e $y = \sqrt{x}$**

31. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicùbica y^2=x^3, el eje 0X y la recta x=1, alrededor del eje 0X.**

32. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la astroide x=a$\cos^3$t, y=bsen^3t alrededor del eje 0X.**

33. **Sobre las cuerdas de la astroide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, paralelas al eje 0X, sean construidos unos cuadrados, cuyos lados son iguales a las longitudes de las cuerdas y los planos que se encuentran son perpendiculares al plano X0Y, hallar el volumen del cuerpo que forman estos cuadrados.**
34. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y=x^2$, y=0, x=2, alrededor del eje X.**
35. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2 - Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2x, y=2 y, x=0 alrededor de la recta x=3.**
36. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y=2, x=0, alrededor del eje Y.**
37. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2x, y=2, y x=0, alrededor del eje Y.**
38. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=cosx, y=0, 01.**
39. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y=x^3$, y=02, y x=-1, alrededor del eje X.**
40. **Sea $\Re$ la región limitada por y=x, y=-x y x=1. Calcule el volumen del solido formado cuando $\Re$ gira alrededor de la recta x=-1**

    Suponga que el cuadrado definido por $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq x \leq 1$ gira alrededor del eje Y. Demuestre que el volumen del solido resultante es 2π.

41. **Suponga que el triangulo cuyos vértices son (-1, -1); (0, 1) y (1, -1) gira alrededor del eje Y. Demuestre que el volumen del solido resultante es $2\frac{2}{3}\pi$.**

42. **Compruebe la fórmula para hallar el volumen de una esfera girando el circulo $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor del eje Y.**

43. **La base de un sólido tiene forma de una elipse con eje mayor de 20 unidades y eje mayor de 10 unidades. Hallar el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje es: un triangulo isósceles de 10 unidades de altura.**

44. **Un cilindro de 5 unidades de radio corta una cuña mediante dos planos: uno es perpendicular al eje del cilindro, y el otro pasa por un diámetro de la sección hecha en el primer plano y forma con este un ángulo de 45º. Hallar el volumen de la cuña.**

45. **Un triángulo equilátero variable se mueve de manera que su plano se mantiene perpendicular al eje de las X, mientras que los vértices de su base se apoya sobre las curvas $y^2=16ax$ e $y^2=4ax$, situadas por encima del eje de las X. hallar el volumen que el triángulo engendra cuando se mueve del origen a los puntos cuya abscisa es a.**

46. **Dada la elipse $9x^2 + 25y^2=225$, alrededor de esta curva se forma un sólido de manera que todas las secciones planas perpendiculares en el eje de las X son elipses cuyos focos están sobre la elipse dada.**

Los ejes mayor y menor son proporcionales a los de la elipse dada. Hallar el volumen del sólido.

47. **La superficie limitada por la curva $y^2=(x + 4)^2$ y su tangente en el punto (12, 16) giran alrededor de las X. Hallar el volumen engendrado.**

48. **La sección de cierto solido cortado por un plano perpendicular al eje X es un cuadrado con extremos de una diagonal en las parábolas $y^2=4x$, $x^2=4y$, hallar el volumen.**

CAPÍTULO VIII

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Ecuaciones Diferenciales: Tipos de Ecuaciones Diferenciales: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Orden de una Ecuación Diferencial, Grado de una Ecuación Diferencial, Solución de una Ecuación Diferencial: Solución General, Solución Particular, Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables, ecuaciones Diferenciales que se Reducen a Ecuaciones de Variables Separables: Ecuaciones Diferenciales del Tipo: $\varphi_1(x)\Psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\Psi_2(y)dx$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f(ax + by)$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, Ecuaciones Diferenciales Lineales, Ecuaciones Diferenciales Método de los Coeficientes Determinados, Ecuaciones Diferenciales Exactas o Ecuaciones Diferenciales Totales, Factor de Integración, Integrales Impropias.

<u>Definición 1</u>: Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada y=f(x) y sus derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}$ se llama <u>ecuación diferencial</u> (E.D).

Esta se escribe simbólicamente como: $F(x,y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n})$ o en forma explícita $\frac{d^ny}{dx^n}=F(x,y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} - 25x + 7=0 \tag{1}$$

$$(\frac{d^2y}{dx^2}Lny)^2 + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 2=0 \tag{2}$$

$$5\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}tgx + 2senx - 5xy=0 \tag{3}$$

$$(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + 4y(\frac{dy}{dx})^5 + e^y(\frac{dy}{dx})^2 - 4xy=0 \tag{4}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta y} \tag{5}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \tag{6}$$

<u>Definición 2</u>: Si la ecuación buscada y=f(x) es de una sola variable independiente, la (E.D) se llama <u>ecuación diferencial ordinaria</u> (E.D.O). Si la

ecuación buscada z=F(x,y) es de más de una variable independiente la (E.D) se llama ecuación diferencial parcial (E.D.P).

En el ejemplo anterior las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) son ecuaciones ordinarias y las ecuaciones (5) y (6) son ecuaciones parciales.

Definición 3: El orden de la derivada superior que entra en la (E.D) se llama orden de la (E.D).

Las ecuaciones (1) y (5) son ecuaciones de primer orden, la ecuación (2), (4) y (6) son ecuaciones de segundo orden, la ecuación (3) es una ecuación de tercer orden.

Definición 4: El grado de una (E.D), que puede escribirse como un polinomio desconocido y sus derivadas es la potencia a la cual está elevada su derivada de mayor orden.

Las ecuaciones (1), (3), (5) y (6) son de grado (1), la (2) de grado 2 y la ecuación (4) es de grado (3).

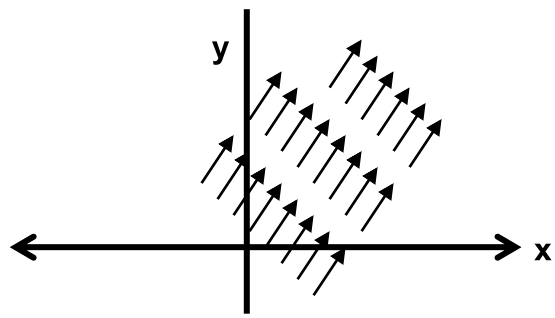
Definición 5: Toda función y=f(x) que introducida en la (E.D) la transforma en una identidad, se llama solución o integral de la (E.D).

Ejemplo: La función $y=e^{-x}\cos x$ es solución de la (E.D): $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$.

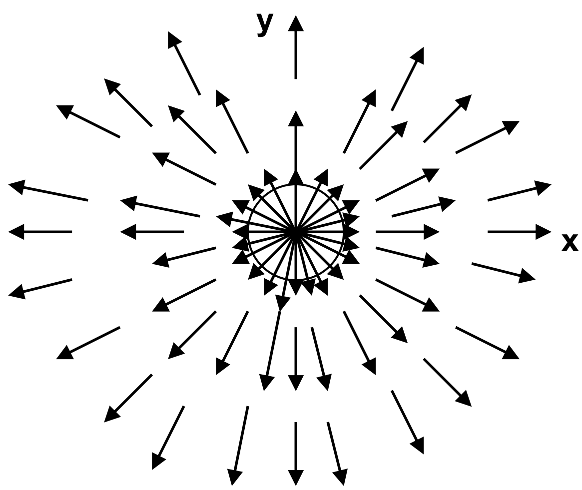
INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA (E.D):

La (E.D) y=F(x,y) establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular de la tangente $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución

en ese punto. Conociendo a x e y, se puede calcular y por consiguiente, la (E.D) de la forma considerada determina un campo de direcciones y el problema de la integración de la (E.D) se reduce hallar las llamadas <u>curvas integrales</u> para las cuales las direcciones de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo.



Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, En cada punto diferente del punto (0,0), el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada es igual a la razón $\frac{y}{x}$, o sea, coincide con el coeficiente angular de la recta dirigida desde el origen de coordenadas al mismo punto (x,y) la cual está representado por flechas el campo de direcciones determinados por la ecuación estudiada. Es evidente que en este caso las curvas integrales serán las rectas y=cx, ya que las direcciones de estas rectas coinciden en todas partes con la dirección del campo.



Definición 6: La (E.D) de primer orden tiene la forma: $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$, si esta ecuación se resuelve respecto a $\frac{dy}{dx}$, se puede escribir la forma: $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$, en este caso se dice que la (E.D) está solucionada con respecto a la derivada, por ejemplo: $\frac{dy}{dx}=2xy^2$.

Definición 7: Se llama solución general de una (E.D) de primer orden a la función $y=\varphi(x,c)$, que depende de una constante arbitraria C y satisface las condiciones siguientes:

a. Satisface la (E.D) para cualquier valor de la constante arbitraria C.

b. Cualquiera que sea la condición inicial $y=y_0$ para $x=x_0$, es decir, $y_{x=x_0}=y_0$, se puede encontrar un valor $C=C_0$ tal que la función $y=\varphi(x,c)$ satisfaga la condición inicial dada.

Durante la búsqueda de la solución general de una (E.D) llegamos a menudo a una condición de la forma: $\varphi(x,y,c)=0$, no resuelta respecto a y. Al resolverla respecto a y, obtenemos la solución general. Aunque esto no siempre sea posible, pues queda implícitamente.

Una igualdad de la forma $\varphi(x,y,c)=0$ que da la solución en forma implícita, se llama integral general de la (E.D), por ejemplo: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ tiene como solución general a la familia de hipérbolas en el origen de coordenadas de la forma $y=\frac{C}{x}$

<u>Definición 8</u>: Toda función $y=\varphi(x,c_0)$ deducida de la solución general $y=\varphi(x,c)$, en el cual se le de valores arbitrarios a la constante C de un valor determinado $C=C_0$, se llama <u>solución particular</u>. En este caso la correlación $\varphi(x,y,C)=0$ se llama <u>integral particular</u> de la (E.D), por ejemplo en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, cuya solución general es $y=\frac{C}{x}$, tendrá como soluciones particulares a la familia de hipérbolas en el origen de coordenadas de la forma $\{\frac{1}{x}, \frac{2}{x},\ldots\ldots\ldots, \frac{n}{x}\}$

Eliminatoria de constantes arbitrarias de una ecuación diferencial, para ello seguiremos los siguientes pasos:

a. Se deriva la ecuación tantas veces como constantes arbitrarias se encuentren.

b. El sistema que se forma tiene que ser un sistema consistente, es decir compatible determinado.

Ejemplos: hallar las ecuaciones diferenciales si la solución general de esta ecuación es:

a. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, como nada más hay una constantes arbitrarias tenemos que hallar la primera derivada, es decir, $2(x - C) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ $x - C + y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C = x + y\frac{dy}{dx}$, sustituyendo este valor de C en la ecuación $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, obtenemos la ecuación diferencial $y^2 = x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$

b. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$, como las constantes arbitrarias son dos, tenemos que hallar la primera y segunda derivada de la función dada, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 4C_1e^{-2x} + 9C_2e^{3x} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por dos (2) y sumándosela a la segunda se obtiene que el valor de $C_2 = \frac{e^{-3x}}{15}\left(2\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ahora multiplicando la primera ecuación por menos tres (-3) y se la sumamos a la segunda ecuación se obtiene el valor de $C_1 = \frac{e^{2x}}{10}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx}\right)$, si se sustituyen los valores encontrados de C_1 y C_2 $y=c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, se obtiene que la ecuación diferencial es: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

<u>Definición 9</u>: Solucionar o, como se dice a menudo, <u>integrar una (E.D)</u> significa:

a. Encontrar la solución general o integral general (si no están dadas las condiciones iniciales).

b. Hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales (si existen).

<u>Definición 10</u>: Las (E.D) del tipo: $f_2(y)dy=f_1(x)dx$, se llaman ecuaciones con <u>variables separadas</u>. Consideremos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas, supongamos que $y(x)$ es solución de esta ecuación; entonces, al sustituir $y(x)$ en la ecuación dada obtenemos una identidad que al ser integrada resulta: $\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C$, donde C es una constante arbitraria. Si hay que obtener la resolución particular que satisfaga la condición $y(x_0)=y_0$, esta evidentemente se determina por la ecuación: $\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx + C$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $xdx + ydy=0$, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int ydy = -\int xdx + C$ es una familia de circunferencias en el origen de coordenadas, y^2=-x^2 + C ó $x^2 + y^2$=C^2.

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{4x}$, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int \frac{dy}{y} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow$ lny=$\frac{3}{4}$lnCx $\Rightarrow$ lny=lnC$x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow$ y=C$\sqrt[4]{x^3}$

c. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int dy = \int \frac{dx}{x^2 - 1} + C \Rightarrow$ y=$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{C(x-1)}{x+1}\right]$

Muchas (E.D) pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separables mediante una sustitución de variables. A dicho grupo pertenecen las ecuaciones de la forma:

1º. Las ecuaciones del tipo: $\varphi_1(x)\Psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\Psi_2(y)dx$, en las cuales los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores dependientes sólo de x o de y, también son <u>(E.D) con variables separables</u>, en este caso se multiplican cada miembro de la ecuación diferencial por el factor $\frac{1}{\psi_2(y)\varphi_1(x)}$ con lo que resulta:

$\int \frac{\Psi_1(y)}{\Psi_2(y)}dy = \int \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}dx + C$, que es una ecuación de variable separable.

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $x(1 + y^2)dx – y(1 + x^2)dy=0$, multiplicando por el factor: $\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}$, nos resulta: $\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C \Rightarrow \ln(1 + y^2)=\ln C(1 + x^2) \Rightarrow y=\sqrt{C(1+x^2)-1}$

b. $(4 + e^{2x})dy=ye^{2x}dx$, multiplicando por el factor: $\frac{1}{y(4+e^{2x})}$, nos resulta:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^{2x}dx}{4+e^{2x}} + C \Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln C(4 + e^{2x}) \Rightarrow y=\sqrt{C(4+e^{2x})}$

2º. Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx}=f(ax + by)$, donde a y b$\in\Re$, las cuales se transforman en ecuaciones de variables separables por medio de la sustitución $z=ax + by \Rightarrow \frac{dz}{dx}=a + b\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=a + bf(z) \Rightarrow dx=\frac{dz}{a+bf(z)} \Rightarrow$

$x=\int \frac{dz}{a+bf(z)} + C$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx}$=2x + y, haciendo la transformación z=2x + y $\Rightarrow$ $\frac{dz}{dx}$=2 + $\frac{dy}{dx}$,

sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$=2x + y, tenemos que $\frac{dz}{dx}$=2 + z $\Rightarrow$ dx=$\frac{dz}{z+2}$ $\Rightarrow$

x=$\int \frac{dz}{z+2}$ + C $\Rightarrow$ x=lnC(z + 2) $\Rightarrow$ z=Ce^{x} – 2, volviendo el cambio, nos resulta

que 2x + y=Ce^{x} – 2 $\Rightarrow$ y=Ce^{x} – 2x – 2

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$, haciendo la transformación z=x + y + 1 $\Rightarrow$ $\frac{dz}{dx}$=1 + $\frac{dy}{dx}$,

sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$=x + y + 1, tenemos que $\frac{dz}{dx}$=1 + $\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ dx=$\frac{zdz}{z+1}$

$\Rightarrow$ x=$\int \frac{zdz}{z+1}$ + C $\Rightarrow$ x=$\int \left(1-\frac{1}{z+1}\right)$dz $\Rightarrow$ x=z – lnC(z+ 1) $\Rightarrow$ z + 1=Ce$^{z\ -\ x}$

volviendo el cambio, nos resulta que y=Ce$^{y\ +\ 1}$ – x – 2 $\Rightarrow$ y=Ce^{x} – 2x – 2

c. $\frac{dy}{dx}$=1 + $\frac{1}{x - y}$, haciendo la transformación z=x - y $\Rightarrow$ $\frac{dz}{dx}$=1 - $\frac{dy}{dx}$,

sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$ tenemos que $\frac{dz}{dx}$=-$\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ dx=-zdz $\Rightarrow$ x=$\int$zdz +

C $\Rightarrow$ x=-$\frac{1}{2}$z^{2} + C $\Rightarrow$ 2x + z^{2} + C=0, volviendo el cambio, nos resulta que:

2x + (x – y)^{2} + C =0

3º. Las (E.D) de la forma: $\frac{dy}{dx}$=f($\frac{y}{x}$) llamadas <u>(E.D) homogéneas</u> de grado cero (0), también se reducen a ecuaciones separables. En efecto si hacemos el cambio de variable $z=\frac{y}{x}$ ó $y=xz \Rightarrow \frac{dy}{dx}=z + x\frac{dz}{dx}$ sustituyendo este valor en la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ nos queda: $z + x\frac{dz}{dx}=f(z) \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z} + C \Rightarrow$ $\ln x=Ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $xydx - x^2dy=y\sqrt{x^2+y^2}\,dy$, reordenando esta ecuación tenemos:

$xydx - (x^2 - y\sqrt{x^2+y^2})dy=0$, aplicando diferenciales a ambos miembros de la ecuación $y=xz$, tenemos que $dy=zdy + xdz$, sustituyendo este valor en la ecuación diferencial obtenemos: $(xz)x(zdy + xdz) - [(xz)^2 + x\sqrt{x^2+y^2}\,]=0 \Rightarrow$

$x^2z(zdx + xdz) - [x^2z^2 + x\sqrt{x^2+y^2}\,]=0 \Rightarrow$

$x^2z^2dx + x^3zdz - x^2y^2dx - y\sqrt{x^2(1+z^2)}\,dx=0 \Rightarrow x^3zdz - x^2\sqrt{1+z^2}\,dx=0 \Rightarrow$

$x^3zdz=x^2\sqrt{1+z^2}\,dx \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}dz=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}dz=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \sqrt{1+z^2}=\ln Cx \Rightarrow$

$x=Ce^{\sqrt{1+z^2}}$, volviendo el cambio, nos resulta: $y=Ce^{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}} \Rightarrow y=Ce^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}}$

b. $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$, haciendo la transformación

$y=xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, sustituyendo en el valor de $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$,

tenemos que:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 z}{x^2 - x^2 z + x^2 z^2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1 - z - z^2} - z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z - z + z^2 - z^3}{1 - z - z^2} \Rightarrow$$

$\frac{dx}{x} = \frac{1 - z - z^2}{z^2 - z^3}dz \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1 - z - z^2}{z^2 - z^3}dz + C$, aplicando fracciones parciales la

integral de la derecha, tenemos: $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-1 + z + z^2}{z^2(z-1)}dz + C \Rightarrow$

$\ln x = A_1\int \frac{dz}{z^2} + A_2\int \frac{dz}{z} + A_3\int \frac{dz}{z-1}$, donde los coeficientes de A_1, A_2 y A_3 los

hallamos aplicando límites y derivadas, $A_1 = \lim\limits_{z \to 0} \frac{-1 + z + z^2}{z - 1} \Rightarrow A_1 = 1$,

$A_2 = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{-1 + z + z^2}{z - 1}\right)_{z \to 0} \Rightarrow A_2 = \left(\frac{(2z+1)(z-1) - (-1 + z + z^2)}{(z-1)^2}\right)_{z \to 0} \Rightarrow A_2 = 0$,

$A_3 = \lim\limits_{z \to 1} \frac{-1 + z + z^2}{z^2} \Rightarrow A_3 = 1$, por lo tanto, $\ln x = \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dz}{z-1} + C \Rightarrow$

$\ln x = \frac{1}{z} + \ln(z - 1) \Rightarrow \frac{1}{z} = \ln \frac{C(z-1)}{x} \Rightarrow \frac{C(z-1)}{x} = e^{\frac{1}{z}} \Rightarrow z - 1 = Cx^2 e^{\frac{1}{z}}$, volviendo

el cambio, nos queda: $y = Cx^2 e^{\frac{x}{y}} + 1$

4º. Las (E.D) de la forma: $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, puede reducirse a una ecuación de variables separables, trasladando al origen de coordenadas el punto de intersección (x,y) de las rectas l_1: $a_1x + b_1y + c_1=0$ y l_2: $a_2x + b_2y + c_2=0$, las nuevas coordenadas serán: $X=x - x_1$ e $Y=y - y_1$, donde $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$ y la ecuación toma la forma: $\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$, la cual es una ecuación homogénea de grado cero(0) y en consecuencia de variable separable, este método no se puede aplicar solamente en el caso de que las dos rectas resulten ser paralelas, es decir, $l_1//l_2$, pero en este caso los coeficientes de las coordenadas son proporcionales, es decir, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, con lo cual la ecuación se transforma en: $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(a_1x + b_1y)$, que ya se estudio en el segundo caso.

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$, resolviendo el sistema de ecuaciones, $x - y=-1$ y $x + y=3$,

Obtenemos que x=1, e y=2, haciendo x=X + 1, e y=Y + 2, tenemos que:

$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$, ahora hacemos el cambio Y=zX, $\Rightarrow$ $\frac{dY}{dX}$=z + $X\frac{dz}{dX}$, que al sustituirla en la ecuación conduce a la ecuación $\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$, se transforma en:

$$z + X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z} \Rightarrow \frac{dX}{X}=\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} \Rightarrow =\int\frac{dX}{X}=\int\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} \Rightarrow$$

$$\ln X=-\frac{1}{2}\ln(1-2z-z^2)+\frac{1}{2}\ln C \Rightarrow$$

$C=(1-2z-z^2)X^2 \Rightarrow C=X^2-2Xz-X^2z^2 \Rightarrow$ volviendo el cambio Y=zX, nos queda:

$C=x^2-2xy-y^2+2x+6y$

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+3}{4x-2y-5}$ resolviendo el sistema de ecuaciones, $2x-y=-3$ y $4x-2y=5$,

Vemos que las rectas l_1: $2x-y+3$ y l_2: $4x-2y-5$ son paralelas, entonces hacemos el cambio $z=2x-y$, con lo que nos queda $\frac{dz}{dx}=2-\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{dy}{dx}=2-\frac{dz}{dx}$, sustituyendo esta en la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+3}{4x-2y-5}$, obtenemos que $2-\frac{dz}{dx}=\frac{z+3}{2z-5} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=2-\frac{z+3}{2z-5} \Rightarrow dx=\frac{2z-5}{3z-13}dz \Rightarrow$

$$\int dx=\int\frac{2z-5}{3z-13}dz + C, \Rightarrow x=\int\left(\frac{2}{3}-\frac{22}{9z-39}\right)dz + C \Rightarrow$$

$x=\frac{2}{3}z - \frac{22}{13}\ln(3z - 13) + C$, sustituyendo a z=2x – y en esta ecuación nos queda:

$$x=\frac{2}{3}(2x - y) - \frac{22}{13}\ln(3(2x - y) - 13) + C$$

<u>Definición 11</u>: Se llama (E.D) <u>lineal de primer orden</u> a una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada. Esta ecuación tiene la forma: $A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y=C(x)$, donde A(x), B(x) y C(x) se consideran en lo sucesivo funciones continuas de x en la región en que se exige integrar la ecuación. Si multiplicamos toda la ecuación por el factor $\frac{1}{A(x)}$, nos resulta: $\frac{dy}{dx} + \frac{B(x)}{A(x)}y=\frac{C(x)}{A(x)}$, haciendo el cambio $p(x)=\frac{B(x)}{A(x)}$ y $q(x)=\frac{C(x)}{A(x)}$, la ecuación de Bernoulli se transforma en $\frac{dy}{dx} + p(x)=q(x)$, la cual resolveremos por el método de los <u>coeficientes indeterminados</u> para lo cual seguiremos los siguientes pasos:

i. Se obtiene la solución general de la ecuación diferencial homogénea, es decir, Se toma la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y=0$ que se llama <u>lineal homogénea</u>, esta es una ecuación de variable separable, cuya solución es: $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$ $\Rightarrow \ln y=-\int f(x)dx + C \Rightarrow y=Ce^{-\int xdx}$,

ii. Se considera la constante C, como una función que dependerá de la variable x, es decir: $y=C(x)e^{-\int xdx}$

iii. Se calcula la derivada de la función $y=C(x)e^{-\int xdx}$ con respecto a x, es decir, $\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx} - C(x)p(x)e^{-\int xdx}$

iv. Sustituimos los valores encontrados de $\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx} - C(x)p(x)e^{-\int xdx}$ y $y=C(x)e^{-\int xdx}$ en la ecuación diferencial no homogénea $\frac{dy}{dx}$ + p(x)=q(x), es decir, $\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx} - C(x)p(x)e^{-\int xdx} + C(x)p(x)e^{-\int xdx}=q(x) \Rightarrow$ $\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx}=q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}=q(x)e^{\int xdx}$

v. Integramos $\frac{dC(x)}{dx}$, para obtener el valor de C(x), que en este caso es $C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$

vi. Sustituimos el valor de C(x) en la solución de la ecuación general encontrada $y=C(x)e^{-\int xdx} \Rightarrow y=(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C_1)e^{-\int xdx} \Rightarrow$

$y=C_1 e^{-\int xdx} + e^{-\int xdx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}=x^2$, siguiendo los pasos mencionados tenemos:

1. $\frac{dy}{dx}$ - $\frac{y}{x}$=0 $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, integrando ambos miembros obtenemos lny=lnCx

$\Rightarrow$ y=xC(x)

2. y=C(x)

3. $\frac{dy}{dx}$=C(x) + x$\frac{dC(x)}{dx}$

4. C(x) + x$\frac{dC(x)}{dx}$ - x$\frac{C(x)}{x}$=x^2 $\Rightarrow$ x$\frac{dC(x)}{dx}$=x^2 $\Rightarrow$ dC(x)=xdx

5. $\int dC(x) = \int x dx + C_1 \Rightarrow C(x)= \frac{x^2}{2} + C_1$

6. $y=\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)x \Rightarrow y=\frac{x^3}{2}+C_1x$

b. $\frac{dy}{dx}$ - y=$\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}}$

1. $\frac{dy}{dx}$ - y=0 $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y}$=dx, integrando ambos miembros obtenemos lny=x + C $\Rightarrow$

y=Ce^x

2. y=C(x)e^x

3. $\frac{dy}{dx}$ = e^x$\frac{dy}{dx}$ + C(x)e^x

4. $e^x\frac{dC(x)}{dx}$ + C(x)e^x - C(x)e^x=$\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}}$ $\Rightarrow$ $e^x\frac{dC(x)}{dx}=\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}}$ $\Rightarrow$ $\frac{dC(x)}{dx}=\frac{11}{8}e^{-\frac{4}{3}x}$

5. $\int dC(x) = \frac{11}{8}\int xe^{-\frac{4}{3}x}dx \Rightarrow C(x) = -\frac{11}{6}e^{-\frac{4}{3}x} + C_1$

6. $y = (-\frac{11}{6}e^{-\frac{4}{3}x} + C_1)e^x \Rightarrow y = -\frac{11}{6}e^{-\frac{x}{3}} + C_1e^x$

<u>Definición 12:</u> Ecuaciones diferenciales totales o diferenciales exactas, puede suceder que la ecuación diferencial se escriba en la forma $p(x,y)dx + q(x,y)dy=0$, si esta ecuación es una diferencial exacta de cierta función $u(x,y)$, es decir, $u(x,y)=p(x,y)dx + q(x,y)dy$, donde $du(x,y)=0$, debe cumplirse la condición de Euler: $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, si $du(x,y)=p(x,y)dx + q(x,y)dy \Rightarrow du(x,y)=\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}dx + \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}dy$, por lo tanto, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = p(x,y)$ y $\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} = q(x,y)$

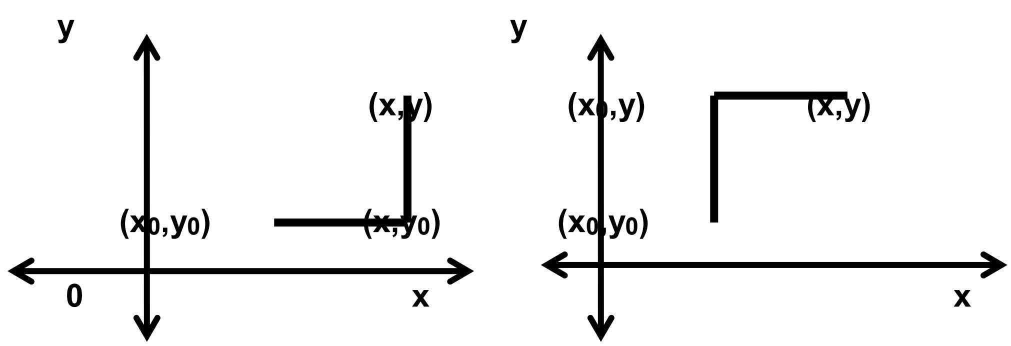
Donde $u(x,y)=\int p(x,y)dx + \psi(y)$, al calcular $\int p(x,y)dx$, la magnitud y se considera constante, por eso $\psi(y)$ es una función arbitraria de y.

Para determinar la función $\psi(y)$, derivaremos $u(x,y)$ con respecto a y, teniendo en cuenta que $\frac{\delta q(x,y)}{\delta y} = q(x,y)$, es decir, la función $\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right] + \frac{d\psi}{dy} = q(x,y)$, si despejamos $\frac{d\psi}{dy}$ nos queda:

$\frac{d\psi}{dy}$=q(x,y) - $\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]$, ahora si integramos con respecto a y, tenemos que $\psi(y)=\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]dy$ + C, por ultimo sustituimos el valor de $\psi(y)$ en la ecuación u(x,y), con lo cual encontramos la solución general de la ecuación diferencial exacta o de la diferencial total:

$$u(x,y)=\int\left[p(x,y)\,dx+\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]\right]dy + C$$

La función u(x,y) se puede determinar también tomando la integral curvilínea de p(x,y)dx + q(x,y)dy desde cierto punto fijo (x_0,y_0) hasta un punto con coordenada variable (x,y) por cualquier camino:



En este caso, $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} p(x,y)dx+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)} q(x,y)dy$ o bien

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} p(x,y)dx+\int_{(x_0,y)}^{(x,y)} q(x,y)dy$$

En conclusión para resolver una ecuación diferencial total seguiremos los siguientes pasos:

1. **Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir, que** $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$
2. **Se integra la función u(x,y) con respecto a x manteniendo a y constante**
3. **Se deriva la función que resulto de integral a la función u(x,y) con respecto a y, considerando a la constante de integración como una función estrictamente de y**
4. **Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y**
5. **Se integra con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y**
6. **Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y) que se obtuvo al principio cuando integramos con respecto a x**

Ejemplos: Hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales totales:

a. **$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy=0$, aplicando los pasos descritos anteriormente tenemos:**

1. **$p(x,y)=x + y + 1 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1$, $q(x,y)=x - y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler**
2. **$u(x,y)=\int (x+y+1)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + x + \psi(y)$**

3. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}$=x + $\frac{d\psi}{dy}$=x – y^2 + 3 ⇒ $\frac{d\psi}{dy}$=-y^2 + 3

4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int(3-y^2)dy$ ⇒ $\psi(y)=3y - \frac{1}{3}y^3 + C$

5. Sustituimos el valor de $\psi(y)=3y - \frac{1}{3}y^3 + C$ en u(x,y), es decir, $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + x + 3y - \frac{1}{3}y^3 + C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que u(x,y)=0 ⇒ $3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 + C=0$

Resolviendo esta ecuación diferencial como una integral de línea $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$, escogiendo a (x_0,y_0) en el origen de coordenadas tenemos:

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(x+1)dx+\int_{(0\,x,0)}^{(x,y)}(x-y^2+3)dy \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y + C$,

como u(x,y)=0 ⇒ $C=3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3$

b. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy=0$, aplicando los pasos tenemos:

1. $p(x,y)=3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=12xy$, $q(x,y)=6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=12xy$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler
2. $u(x,y)=\int (3x^2 + 6xy^2)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=x^3 + 3x^2y^2 + \psi(y)$
3. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=6x^2y + \frac{d\psi}{dy}=6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{d\psi}{dy}=4y^3$
4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int 4y^3dy + C \Rightarrow \psi(y)=y^4 + C$
5. Sustituimos el valor de $\psi(y)$ en u(x,y), es decir, $u(x,y)=x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que $u(x,y)=0 \Rightarrow C=x^3 + 3x^2y^2 + y^4$

c. $(x + y)dx + (x + 2y)dy=0$

1. $p(x,y)=x + y \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1$, $q(x,y)=x + 2y \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler
2. $u(x,y)=\int (x + y)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y)$
3. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=x + \frac{d\psi}{dy}=x + 2y \Rightarrow \frac{d\psi}{dy}=2y$

4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int 2y dy + C \Rightarrow$ $\psi(y)=y^2 + C$

5. Sustituimos el valor de $\psi(y)$ en u(x,y), es decir, $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que $u(x,y)=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2$

<u>Definición 13:</u> Cuando en la ecuación $p(x,y)dx + q(x,y)dy=0$ no se satisface la condición de Euler, se tiene que escoger una función $\mu(x,y)$ que llamaremos factor integrante, el cual se multiplicara por la diferencial total, de tal manera que $\mu p(x,y)dx + \mu q(x,y)dy=0$ satisfagan las condiciones de Euler, es decir, $\frac{\delta \mu p(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta \mu q(x,y)}{\delta x} \Rightarrow$

$p(x,y)\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta y} + \mu(x,y)\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = q(x,y)\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta x} + \mu(x,y)\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}$ si multiplicamos toda esta expresión por el factor: $\frac{1}{\mu(x,y)}$, tenemos:

$$\frac{p(x,y)}{\mu(x,y)}\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta y} + \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{q(x,y)}{\mu(x,y)}\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} \Rightarrow$$

$\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = p(x,y)\frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta y} - q(x,y)\frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta x}$, si $\frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta y}=0$

$$\Rightarrow -q(x,y)\frac{d\mu(x,y)}{dx} = \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \Rightarrow \ln\mu(x,y)=\int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} dx + \ln C$$

$\Rightarrow \mu(x,y)=C\,e^{\int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}dx}$, se puede considerar C=1, ya que es suficiente tener un solo factor integrante, es decir si la función es estrictamente de x tenemos que: $\mu(x)=e^{\int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}dx}$, si es una función estrictamente de y tenemos que $\mu(y)=e^{\int \frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)}dy}$, en caso contrario, no existe ningún factor integrante de de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

<u>Definición 14:</u> La condición de existencia de un <u>factor integrante</u> que depende sólo de x, se cumple para la ecuación lineal:

$\frac{dy}{dx}$ + p(x)=q(x) o bien [p(x)y – f(x)]dx + dy=0, efectivamente $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}$ =p(x), y por lo tanto, $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$, de manera análoga se puede hallar las condiciones de existencia de factores integrantes de la forma: $\mu(x \pm y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(\frac{y}{x})$, $\mu(\frac{x}{y})$, etc.

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy=0$,

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=4xy + 3y^2 - x \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=4x + 6y$, $q(x,y)=x(x + 2y) \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=2x + 2y$, como podemos

observar no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} = \frac{4x + 6y - 2x - 2y}{x(x+2y)}$ $\Rightarrow$ $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} = \frac{2}{x}$, luego el factor integrante será $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx}$ $\Rightarrow$ $\mu(x) = e^{2\ln x} \Rightarrow$ $\mu(x) = e^{\ln x^2}$ $\Rightarrow$ $\mu(x)=x^2$, por lo tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial:

$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy=0$, por el factor $\mu(x)=x^2$ y probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir:

$(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + x^3(x + 2y)dy=0$, $p\mu(x,y)=4x^3y + 3x^2y^2 - x^3$ $\Rightarrow$ $\frac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}=4x^3 + 6x^2y$, $q\mu(x,y)=x^4 + 2x^3y \Rightarrow$ $\frac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}=4x^3 + 6x^2y$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, con lo cual decimos que es una ecuación diferencial total, encontramos el valor de:

$u[\mu(x,y)]=\int(4x^3y + 3x^2y^2 - y^3)dx + \varphi(y)$ $\Rightarrow$ $u[\mu(x,y)]=x^4y + x^3y^2 - xy^3 + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u\mu(x,y)$ con respecto a y, y la igualamos a $q\mu(x,y)$, es decir: $\frac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}=x^4 + 2x^3y - 3xy^2 + \frac{d\varphi(y)}{dy}=x^4 + 2x^3y$ $\Rightarrow$ $\frac{d\varphi(y)}{dy}=-3xy^3$, integrando con respecto a y, tenemos que:

$\varphi(y)=-\frac{3}{4}xy^4 + C$, sustituyendo este valor en la función $u\mu(x,y)$, tenemos que:

$u[\mu(x,y)]=x^4y + x^3y^2 - xy^3 - \frac{3}{4}xy^4 + C$

b. $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0$

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=xy + y^2 - y \Rightarrow$ $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=x + 2y$, $q(x,y)=x(x + 3y + 2) \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=2x + 3y + 2$, como podemos observar no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante:

$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=-\frac{(x+y+1)}{x(x+3y+2)}$, vemo que esta función no es exclusivamente de x, luego no es un factor integrante, probaremos ahora con $\frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)}=\frac{(x+y+1)}{y(x+y+1)} \Rightarrow \frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)}=\frac{1}{y}$, que si es una función exclusivamente de y, por lo tanto, podemos obtener el factor de integración como: $\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}} \Rightarrow \mu(y)=e^{\ln y} \Rightarrow \mu(y)=y$, por lo tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0$, por el factor integrante $\mu(x)=y$, luego probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir, $(y^2x + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3y^2x + 2xy)dy=0$,

$p\mu(x,y)=y^2x + y^3 + y^2 \Rightarrow \frac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}=2xy + 3y^2 + 2y$, $q\mu(x,y)=x^2y + 3y^2x + 2xy \Rightarrow$

$\frac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}=2xy + 3y^2 + 2y$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, y en consecuencia es una direfencial total, encontramos el valor de $u[\mu(x,y)]=\int(xy^2+y^3+y^2)dx+\varphi(y) \Rightarrow u[\mu(x,y)]=\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u[\mu(x,y)]$ con respecto a y, y la igualamos a $q[\mu(x,y)]$, es decir, $\frac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}=x^2y + 3xy^2 + 2xy + \frac{d\varphi(y)}{dy}= x^2y + 3y^2x + 2xy \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy}=0$, integrando con respecto a y, tenemos que $\varphi(y)=C$, sustituyendo este valor en la función $u[\mu(x,y)]$, tenemos que: $u[\mu(x,y)]=\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + C$

c. $y(x + y)dx + (x + 2y – 1)dy=0$

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=xy + y^2 \Rightarrow$

$\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=x + 2y$, $q(x,y)=x + 2y - 1 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, como podemos ver no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}\neq\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=1$, por lo tanto, podemos obtener el factor de integración como: $\mu(x,y)=e^{\int dx} \Rightarrow \mu(x,y)=e^x$, por l o tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0$, por el factor integrante $\mu(x,y)=e^x$, luego probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir, $y(x + y)e^x dx + (x + 2y – 1)e^x dy=0$, $p[\mu(x,y)]=y^2x + y^3 + y^2 \Rightarrow \frac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}=xe^x + 2ye^x$, $q[\mu(x,y)]=xe^x + 2ye^x - e^x \Rightarrow$

$\frac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}= xe^x + 2ye^x$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, y entonces es una direfencial total, encontramos el valor de $u[\mu(x,y)]=\int(xye^x + y^2e^x)dx + \varphi(y) \Rightarrow u[\mu(x,y)]=y(x – 1)e^x + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u[\mu(x,y)]$ con respecto a y, e igualamos a $q[\mu(x,y)]$, es decir:

$\frac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}=(x – 1)e^x \ (x – 1)e^x + \frac{d\varphi(y)}{dy}=xe^x + 2ye^x \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy}=-e^x + 2ye^x$,

integrando con respecto a y, tenemos que:

$\varphi(y)=-ye^x + y^2e^x + C$, sustituyendo este valor en la función $u[\mu(x,y)]$, tenemos que: $u[\mu(x,y)]=y(x – 1)e^x - ye^x + y^2e^x + C$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En cada uno de los siguientes ejercicios indique si la ecuación es ordinaria o parcial, lineal o no lineal, e indique su orden.

a. $$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 5t^2=0$$

b. $$3\frac{\delta^3 y}{\delta x^3}+5\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}=\frac{\delta y}{\delta x}$$

Solución: 1a. La ecuación $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 5t^2=0$ es una ecuación diferencial ordinaria, de tercer orden y de primer grado

Solución: 1b. La ecuación $3\frac{\delta^3 y}{\delta x^3}+5\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}=\frac{\delta y}{\delta x}$ es una ecuación diferencial parcial, de tercer orden y de primer grado

2. En cada una de las igualdades que se indican a continuación, eliminar las constantes arbitrarias.

a. $$y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$$

b. $$y=C_1e^x + C_2xe^x$$

Solución: 2a. $y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$, como la función posee solamente una constante derivamos la función $y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$ una vez y obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[2\lg x-\frac{1}{\ln 10}-2\right]\frac{1}{\sqrt{2x\lg x-2x+C}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\ln 10\lg x-\ln 10-1}{\ln 10\sqrt{2x\lg x-2x+C}},$$

manipulando esta ecuación y despejando C se obtiene que:

$C=\left(\dfrac{\ln 10 \lg x - \ln 10 - 1}{\dfrac{dy}{dx}}\right)^2 - 2x\lg x + 2x$ sustituyendo el valor de C en la ecuación

y= $\sqrt{2x\lg x - 2x + C}$, se obtiene que: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln 10 \lg x - \ln 10 - 1}{\sqrt{2x\lg x - 2x + C}}$

Solución: 2b. $y=C_1e^x + C_2xe^x$, como la función posee dos constante derivamos la función $y=C_1e^x + C_2xe^x$ dos veces y obtenemos:

$C_1+(x+1)C_2=e^{-x}\dfrac{dy}{dx}$ (1), derivando la ecuación (1) obtenemos:

$C_1+(x+2)C_2=e^{-x}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (2), restando (1) de (2) obtenemos el valor de

$C_2=e^{-x}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}\right)$, sustituyendo el valor de C2 en (1) se obtiene que

$C_1=e^{-x}\left((x+2)\dfrac{dy}{dx}-(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ y por ultimo sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la ecuación $y=C_1e^x + C_2xe^x$ se obtiene: $y=2\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

b. $(x - y)dx + (3x + y)dy=0$,

<u>Solución: 3b:</u> $\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$, haciendo el cambio z=x + y en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$ tenemos que: $\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$, sustituyendo estos valores en la E.D. y despejando tenemos: $\frac{dz}{dx}=\frac{1-3z}{1+z}$, reacomodando e integrando se tiene que: $\int\frac{1+z}{1-3z}dz=\int dx$, aplicando las propiedades de los números reales, estas integrales se transforman en: $\frac{1}{3}\int dz+\frac{2}{3}\int\frac{1}{1-3z}dz=\int dx \Rightarrow \frac{1}{3}z-\frac{2}{9}Ln(1-3z)=x+C$, luego del cambio nos da: $\frac{1}{3}(x+y)-\frac{2}{9}Ln(1-3x-3y)=x+C$

<u>Solución: 3c:</u> $(x-y)dx+(3x+y)dy=0$, Aplicando las propiedades de los números reales en la ecuación diferencial nos resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+3x}$, como es una ecuación homogénea de grado cero, hacemos el cambio y=xz, derivando esta ecuación con respecto a x, sustituyendo este valor e integrando se obtiene $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1-z}{3+z}-z \Rightarrow \int\frac{z-3}{z^2-4z+1}dz=\int\frac{dx}{x}$, completando cuadrado y aplicando nuevamente las propiedades de los números reales se tiene: $\int\frac{z-3}{(z-2)^2-3}dz=LnCx \Rightarrow \int\frac{z-2}{(z-2)^2-3}dz-\int\frac{1}{(z-2)^2-3}dz=LnCx$, por las

tablas de integración se tiene que: $\frac{1}{2}\text{Ln}\left|z^2-4z+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{z-2+\sqrt{3}}{z-2-\sqrt{3}}\right|$,

sustituyendo z=$\frac{y}{x}$ tenemos: $\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\frac{y}{x}+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{\frac{y}{x}-2+\sqrt{3}}{\frac{y}{x}-2-\sqrt{3}}\right|=\text{LnCx}\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{x^2-4xy+y^2}{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right|=\text{LnCx}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{(x-y)^2}{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right|=\text{LnCx}\qquad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\text{Ln}\left|\frac{x-y}{\sqrt{x}}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right|=\text{LnCx}$$

4. **Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.**

a. $\frac{dy}{dx}=xe^{(y-x^2)}$, y(2)=8

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$ y(2)=1

Solución: 4a: $\frac{dy}{dx}=xe^{(y-x^2)}$, y(2)=8. Aplicando las propiedades de los números reales en la ecuación diferencial, nos resulta: $\frac{dy}{dx}=xe^{-x^2}e^{y}$, separando las variables e integrando se tiene que: $\int xe^{-x^2}dx=\int e^{y}dy$ y por las tablas de integración y las propiedades de los números reales obtenemos: $\frac{y}{x^2}$=C, ahora sustituyendo el punto (2,8) en esta ecuación hallamos el valor de C y lo sustituimos concluyendo el ejercicio, resultando $\frac{y}{x^2}$=2 o $y=2x^2$

<u>Solución: 4b:</u> $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$, y(2)=1. Operando la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$, nos resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x}$ haciendo el cambio y=xz $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=z + x$\frac{dz}{dx}$, sustituyendo en en la ecuación diferencial e integrando nos resulta: $\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ Lnz=2Lnx + C, volviendo el cambio y aplicando las propiedades de los logaritmos nos resulta: $\frac{y}{x^3}=C$, ahora sustituyendo el punto (2,1) en esta ecuación hallamos el valor de C, que en este caso es $\frac{1}{8}$, con lo que la solución será: $\frac{y}{x^3}=8$

5. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

   a. $\frac{dy}{dx}$ - $7x=5e^{7x}$

   b. $\frac{dy}{dx}$ - $\frac{2y}{x+1}$=$(x + 1)^3$, en el punto (0,1)

Para la resolución de estos ejercicios utilizaremos los pasos a seguir descritos en la definición 11.

<u>Solución: 5a:</u> $\frac{dy}{dx}$ - $7x=5e^{7x}$ (1)

i. Se resuelve la ecuación homogénea para hallar el valor de la variable y.

$$\frac{dy}{dx} - 7x=0$$

ii. Separamos variables e integramos.

$$\int dy = 7\int x dx \Rightarrow y=\frac{7}{2}x^2 + C(x) \ (2)$$

iii. Derivamos la ecuación (2) con respecto a x para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} =7x + \frac{dC(x)}{dx}$$

iv. Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ en (1) para hallar $\frac{dC(x)}{dx}$

$$7x + \frac{dC(x)}{dx} - 7x=5e^{7x} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}=5$$

v. Se separa variable y se integra para hallar el valor de C(x)

$$\int dC(x) = 5\int e^{7x} dx \Rightarrow C(x)=\frac{7}{2}e^{7x} + C$$

vi. Se sustituye el valor de C(x) en la ecuación (2) y obtenemos la solución buscada

$$y=\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}e^{7x} + C$$

<u>Solución: 5b:</u> $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} =(x + 1)^3$ (1)

1. Se resuelve la ecuación homogénea para hallar el valor de la variable y.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$$

2. Separamos variables e integramos.

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \text{Lny=Ln}(x + 1)^2C(X) \Rightarrow y=(x + 1)^2C(x) \quad (2)$$

3. Derivamos la ecuación (2) con respecto a x para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x + 1)C(x) + (x + 1)^2\frac{dC(x)}{dx}$$

4. Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ en (1) para hallar $\frac{dC(x)}{dx}$

$$2(x + 1)C(x) + (x + 1)^2\frac{dC(x)}{dx} - 2(x + 1)C(x) = (x + 1)^3 \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = x + 1$$

5. Se separa variable y se integra para hallar el valor de C(x)

$$\int dC(x) = \int (x+1)dx \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + C \Rightarrow C(x) = \frac{(x+1)^2 + C}{2}$$

6. Se sustituye el valor de C(x) en la ecuación (2)

$$y = \frac{(x+1)^2 + C}{2}(x + 1)^2 \Rightarrow 2y = (x + 1)^2((x + 1)^2 + C) \ (3)$$

7. Sustituyendo el punto (0,1) en la ecuación (3) se halla el valor de C, que en este caso es igual a 1, por lo tanto, la solución es:

$$2y = (x + 1)^2(x^2\ 2x + 2)$$

6. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas, en caso de no ser exacta encontrar un factor integrante y luego resolver la ecuación.

a. $\frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \frac{2y}{x^3}dy = 0$

b. $e^{xy}(xy + 1)dx + (x^2e^{xy} + 2y)dy=0$

c. $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

d. $(y + xy^2)dx – xdy=0$

Para estos ejercicios aplicaremos los pasos descritos en la definición 12

<u>Solución: 6a:</u> $\frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \frac{2y}{x^3}dy = 0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir:

$p(x,y)=\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = -\frac{6y}{x^4}$ y $q(x,y)=\frac{2y}{x^3} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} = -\frac{6y}{x^4}$, luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y)=\int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=-\frac{2}{x^3} + 3\frac{y^2}{x^5} + \psi(y)$$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = \frac{6y}{x^5} + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$\frac{6y}{x^5}+\frac{\delta\psi}{\delta y}=\frac{2y}{x^3} \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y}=\frac{2y}{x^3}-\frac{6y}{x^5}$$

v. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y)=2\int\left(\frac{y}{x^3}-\frac{3y}{x^5}\right)dx \Rightarrow \psi(y)=\frac{y^2}{x^3}-3\frac{y^2}{x^5}+C$$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y)=-\frac{2}{x^3}+3\frac{y^2}{x^5}+\frac{y^2}{x^3}-3\frac{y^2}{x^5}+C \Rightarrow \psi(y)=\frac{y^2-2}{x^3}+C$$

<u>Solución: 6b:</u> $e^{xy}(xy+1)dx+(x^2e^{xy}+2y)dy=0$

Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir:

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$$p(x,y)=e^{xy}(xy+1) \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=xe^{xy}(xy+2) \text{ y } q(x,y)=(x^2e^{xy}+2y) \Rightarrow$$

$\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=xe^{xy}(xy+2)$, luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$u(x,y)=\int e^{xy}(xy+1)dx+\psi(y) \Rightarrow u(x,y)=y\int xe^{xy}dx+\int e^{xy}dx+\psi(y)$, integrando la primera integral por parte nos resulta: $u(x,y)=xe^{xy}+\psi(y)$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = x^2e^{xy} + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$x^2e^{xy} + \frac{\delta \psi}{\delta y} = x^2e^{xy} + 2y \Rightarrow \frac{\delta \psi}{\delta y} = 2y$$

v. Se integra $\frac{\delta \psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y) = 2\int y dx \Rightarrow \psi(y) = y^2 + C$$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y) = xe^{xy} + y^2 + C$$

<u>Solución 6d:</u> $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$$p(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad q(x,y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y) = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y) = tg^{-1}\frac{y}{x} + \psi(y)$$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{\delta \psi}{\delta y} \Rightarrow \frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$-\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\delta \psi}{\delta y} = -\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\delta \psi}{\delta y} = 0$$

v. Se integra $\frac{\delta \psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y)=\int 0dx \Rightarrow \psi(y)=C$$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y)=tg^{-1}\frac{y}{x} + C$$

<u>Solución: 6e:</u> $(y + xy^2)dx - xdy=0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y)=y + xy^2 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1 + 2xy$, $q(x,y)=-x \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=-1$, luego no se cumple la condición de Euler ya que $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$

ii. Buscamos el factor integrante, ver definiciones 13 y 14

$$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} \Rightarrow \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{-2(1+2y)}{y(1+2xy)} \Rightarrow$$

$\dfrac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\dfrac{-2}{y^2}$, donde el factor integrante será: $\mu(y)=e^{\int\frac{-2}{y}dy} \Rightarrow$

$$\mu(y)=\frac{1}{y^2}$$

iii. Multiplicamos la ecuación (1) por el factor $\frac{1}{y^2}$ y probamos si se cumple la condición de Euler, es decir:

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy=0 \text{ (2)}$$

iv. Comprobemos ahora que se cumple la condición de Euler.

$p(x,y)=\frac{1}{y} + x \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=-\frac{1}{y^2}$ y $q(x,y)=-\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=-\frac{1}{y^2}$, luego se cumple la condición de Euler y en consecuencia (2) es una diferencial exacta.

v. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y)= \int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \psi(y)$$

vi. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=-\frac{x}{y^2} + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

vii. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y} = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y} = 0$$

viii. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y)=\int 0dx \Rightarrow \psi(y)=C$$

ix. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y)=\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C \text{ o } u(x,y)=x\left(\frac{1}{y}+\frac{x}{2}\right) + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En cada uno de los siguientes ejercicios indique si la ecuación es ordinaria o parcial, lineal o no lineal, e indique su orden.

a. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x=0$, b. $\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$, c. $(x^2 + y^2) + 2xydy=0$, d. $\frac{dy}{dx} + p(x)y=q(x)$

e. $\frac{d^3x}{dx^3} - \frac{dy}{dx}$ 2y=0 f. $y\frac{d^2y}{dx^2} =x$, g. $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0$, h. $\frac{d^4y}{dx^4} =w(x)$

i. $x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} =C$, j. $\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dw}{dx}\right)^4 + yw=0$

2. En cada una de las igualdades que se indican a continuación, eliminar las constantes arbitrarias.

a. $y= C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ b. $xy^2 - 1=cy$ c. $y= C_1x^2 + C_2e^{2x}$ d. $y=cx + c^2 + 1$

e. $y = mx + \frac{2}{m}$ f. $y^2=4ax$ g. $y=C_1 + C_2e^{3x}$ h. $y=x + C_1e^{x} + C_2e^{-x}$

i. $y=x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

3. Averiguar, si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican.

a. $x\frac{dy}{dx} =2x$, $y=5x^2$, b. $\frac{d^2y}{dx^2} =x^2 + y^2$, $y=\frac{1}{x}$, c. $(x + y)dx + xdy=0$, $y=\frac{C^2 - x^2}{2x}$

d. $\frac{dy}{dx} + 2xy + 1=0$, $y= e^{-x^2}\int e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$ e. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y=0$, $y=\sqrt{x}$

f. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $2\frac{dy}{dx}$ + y=0, y=xe^x, g. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $2\frac{dy}{dx}$ + y=0, y=x^2e^x,

h. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $(h_1 – h_2)$ $\frac{dy}{dx}$ - $h_1h_2y=0$, $y=C_1e^{h_1x}+C_2e^{h_2x}$,

i. $(x – y + 1)\frac{dy}{dx}$=1, y=x + Ce^y, j. $(x – 2y)\frac{dy}{dx}$=2x – y, $x^2 – xy + y^2=C^2$,

k. $\frac{d^2y}{dx^2}$ + $2\frac{dy}{dx}$=0, y= $C_1 + \frac{C_2}{x}$

4. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{y}}$ b. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ c. $3x^3ydx + (x^4 + y^4)dy=0$

d. $x\sqrt{1-y^2}dx = dy$ e. $\frac{dy}{dx}$=1 + $e^{y – x + 5}$ f. $(1 – x)\frac{dy}{dx}=y^2$, g. $\frac{dy}{dx}=xy^2$

h. $x\frac{dy}{dx}=y + xe^{\frac{y}{x}}$ i. mydx=nxdy, j. ylnxlnydx + dy=0,

k. $a^2dx=x\sqrt{x^2-a^2}\,dy$ l. $(2\sqrt{xy}-y)dx - xdy = 0$

m. (1 + lnx)dx + (1 + lny)dy=0 n. $(2x^2 + y^2)dx + (2xy + 3y^2)dy=0$

o. $y\frac{dy}{dx}$ - $y=y^3$ p. $xy\frac{dy}{dx}=1 – x^2$ q. $y - x\frac{dy}{dx}=a(1 + x^2\frac{dy}{dx})$

r. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 – xy)dy=0$ s. $\frac{dy}{dx}$tgx=y t. $\frac{dy}{dx}$=(x +y)2

u. $\frac{dy}{dx}$=(8x + 2y + 1)2 v. (2x + 3y -1)dx + (2x + 6y -5)dy=0

w. (2x – y)dx + (4x – 2y +3)dy=0 x. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ - 1, y. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}$

z. $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}$, aa. (2x – y + 4)dy + (x – 2y + 5)dx=0 ab. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+3y}{2x+y}$

ac. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

5. Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. $(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x$, y(0)=1 b. xdy – ydx=$\sqrt{x^2+y^2}$dx x=$\frac{1}{2}$, y=0,

c. $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}$ u(0)=1,d, $2xy\frac{dy}{dx}=1+y^2$, y(3)=2, e. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-4}{x-3}$, y(1)=2,

f. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}$, y(2)=2, g. $\frac{dy}{dx}=y^2-1$, y(0)=2, h. $\frac{dy}{dx}+2y=1$, y(0)=$\frac{2}{5}$,

i. $xy^2\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$, y(1)=2, j., y(0)=2,

k. $(x+\sqrt{xy})\frac{dy}{dx}+x-y=\sqrt{\frac{y^3}{x}}$, y(1)=1, l. ydx + x(lnx – lny – 1)dy=0, y(e)=1,

m. , n. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-3}{x+y-1}$, y(0)=1, o. $(2a^2-r^2)dr=r^3\operatorname{sen}\theta d\theta$, $\theta=0$, r=a,

p. $xy^2dx+e^xdy=0$, $x\to\infty$, $y\to\frac{1}{2}$, q. $(x+y^2)dy=ydx$, x=2, y=1,

r. $(y - \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy=0$, $y(\sqrt{3})=1$, s.

t. $y(9x - 2y)dx - x(6x - y)dy=0$, $y(1)=1$, u. $y(3x + 2y)dx - x^2dy=0$, $y(1)=2$,

v. $(3x^2 - 2y^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy$, $y(0)=-1$, w. $\sqrt{1-4x^2}dy+2\sqrt{1-y^2}dx=0$, $y(1)=2$,

x. y. $(x + \sqrt{xy})\dfrac{dy}{dx} + x - y=\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}$, $y(1)=1$,

z. $ydx + x(\ln x - \ln y -1)dy=0$, $y(1)=e$, aa.

ab. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy==$, $y(2)=1$, ac. $(x + y)\dfrac{dy}{dx}=xtg^{-1}\dfrac{y}{x}$, $y(1)=1$,

ad. $x\ln\dfrac{y}{x}dy - ydx=0$, $y(e)=3$ ae. $xy^2\dfrac{dy}{dx}=y^3 - x^3$, $y(1)=2$

ae.

6. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy=6x$, b. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy=\operatorname{sen}x$, c. $\dfrac{dy}{dx} + 2y=3e^{2x}$,

d. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x}=y^2$ e. $x\dfrac{dy}{dx} + 5y=7x^2$ f. $3\dfrac{dy}{dx} - 5x=9e^{3x}$ g. $3x\dfrac{dy}{dx} + y=12x$,

h. $x\dfrac{dy}{dx} + y=x$, i. $(3xy + 3y - 4)dx + (x + 1)^2dy=0$ j. $\dfrac{dy}{dx}=1 + 3ytgx$

k. $ydx + (x - \dfrac{1}{2}x^3y)dy=0$ l. $\dfrac{dy}{dx}= 2xy + 3x^2e^{x^2}$, m. $\dfrac{dy}{dx} + y=e^x$, m. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x}=x^3$,

n. $x\dfrac{dy}{dx} + y - e^x=0$ o. p. $y^2dx - (2xy + 3)dy=0$, q. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x}=-xy^2$,

r. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, s. $(x^4 + 2y)dx - xdy = 0$, x. $dy = (x - 3y)dx$

t. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$,

7. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas, en caso de no ser exacta encontrar un factor integrante y luego resolver la ecuación.

a. $(3x + 2y - 1)dx + (2x + 3y + 7)dy = 0$, b. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$,

c. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$, d. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$,

e. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, f. $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$, g. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$,

h. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$, i. $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$, j. $(5y + 2x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$,

k. l. $(2x + 4)dx + (3y - 1)dy = 0$, m. $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$

o. $(x^2 - y^2)dx + x(x - 2y)dy = 0$, p. $(1 + \ln y + y)dx = (1 - \ln x)dy$,

q. $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$, r. $(y\ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x\ln y)dy = 0$,

s. $(\text{sen}2x - xy^2)dx + y(1 + y^2 - x^2)dy = 0$, t. $(x^{n+1}y^n + bx)dy = 0$

u. $(x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$ v. $y(2xy + 1)dx - xdy = 0$, w. $(1 + y^2)dx + (x^2y + y)dy = 0$,

x. $y(x^4 - y^2)dx + x(x^4 + y^2)dy=0$, y . $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy=0$,

z. $y(x^3e^{xy} - y)dx + x(y + x^3e^{xy})dy=0$, aa. $(1 - xy)dx + [y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}]dy=0$,

ab. $y(2x + y^2)dx + x(y^2 - x)dy=0$, ac. $(xy^2 + x - 2y)dx + x^2ydy=2(x + y)dy$,

ad. $(x^ny^{n+1} + ay)dx + (x^{n+1}y^n + bx)dy=0$, ae. $\left(\frac{y^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x - y)^2}\right)dy$

BIBLIOGRAFIA

ANGEL Oneto (2001). Números, Anillos y Cuerpos. D.R © Editorial de la Universidad del Zulia (EDILUZ) Maracaibo Estado Zulia.

BALDOR (1987). Algebra Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Aritmética. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

B. DEMIDOVICH (1993). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Undécima Edición Editorial Paraninfo España.

CARDENAS, Humberto, RAGGI Francisco & LLuis Emilio. (1974). Algebra Superior. Editorial Trillas. México D.F.

CESAR R. Gallo P. (2005). Matemáticas para Estudiantes de Administración y Economía. Segunda Reimpresión Universidad Central de Venezuela Caracas.

ERNEST F. Haessler & Jr/Richard S. Paul (1992). Matemáticas para Administración y Economía. Segunda Edición Editorial Iberoamericana Puebla, México

FRALEIGH, John B. (1980) Calculo con Geometría Analítica. Versión en Español de Gonzalo Prada. Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México. Fondo Interamericano.

FRAN Ayres, Jr & ELLIOTT Mendelson (2001). Calculo. Cuarta Edición. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

FUENMAYOR Euro (1978). Matemáticas 1111 Universidad del Zulia Facultad Experimental de Ciencias Estudio Universitario Supervisados EUS. L.U.Z Maracaibo Estado Zulia.

GRANVILLE (1995) Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa, S.A de C.U Mexico D.F.

IGNACIO Bello (1998). Algebra Elemental. Editores Thomson Internacional (Universidad Abierta)

JEAN E. Weber (1982). Matemáticas para Administración y Economía. Cuarta Edición Editorial Harla de Venezuela C.A

LARSON, Roland & HOSTETLER Robert. (1989). Calculo y Geometría Analítica. Tercera Edición. Editorial McGraw-Hill.

LEITHOLD, Louis. (1992). El Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición. Editorial Harla. México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Harla México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Matemáticas Previas al Cálculo. Editorial Harla. México.

LIPSCHUTZ, Seymour, P.hd. (1991). Algebra Lineal. Editorial McGraw-Hill.

MAX PETTERS, Wuilliam S. (1979). Algebra y Trigonometría. Primera Edición. Editorial Reverté S.A. México. D.F.

MUNEN M.A. & YIZZE J.P. Precálculus Introducción Funcional. Segunda Edición. Editorial Reverté S.A. México D.F.

NAYIT, E. Lopéz V. (1991). Fundamentos de Geometría Plana. D.R Editorial de la Universidad del Zulia Maracaibo Estado Zulia.

PALOMA Sanz, FRANCISCO José Vázquez & Pedro Ortega (1998). Problemas de Algebra Lineal Cuestiones, Ejercicios y Tratamientos en Derive. Editorial PRENTICE HALL España Madrid.

PISKUNOV, N.(1995). Calculo Diferencial e Integral. 6ta edición Tomo I. Editorial LIMUSA. S.A de C.V México D.F.

PURCELL, Edwin J. (1991). Calculo con Geometría Analítica. Sexta Edición Traducción M. en Ciencias Elena de Ortega. Facultad de Ciencias. UNAM. Editorial Hispanoamericana, S.A. México.

ROBERT C. Drede & Murria Spieel. (2004). Calculo Avavzado. Editorial Mc. Graw-Hill/Interamericana de España S.A.U.

ROBERT T. Smith & RONAND B. Minton (2000). Calculo Tomo I. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

TAYLOR, H. Wade Thomas (1.976). Matemática Básica con Vectores. Primera Edición. Editorial Limusa, México D.F.

APÉNDICES

.LISTA DE SIMBOLOS

$\in$	**Pertenece**
$\notin$	**No pertenece**
$\{\}$	**Conjunto**
$\subset$	**Es un sub-conjunto de, esta incluido en**
$\subseteq$	**Es un sub-conjunto propio de**
$\cup$	**Unión de conjunto**
$\cap$	**Intersección de conjunto**
-	**Diferencia de conjunto**
‘	**Complemento de un conjunto**
Z^-	**Números enteros negativos**
$\{0\}$	**Número cero**
Z^+	**Números enteros positivos**
Z	**Números enteros**
N	**Números naturales**
Q^-	**Números Racionales o fraccionarios negativos**
Q^+	**Números Racionales o fraccionarios positivos**
Q	**Números Racionales o fraccionarios**
$\Re^-$	**Números reales negativos**
$\Re^+$	**Números reales positivos**
$\Re$	**Números reales**
$\Rightarrow$	**Implica, entonces, condición de suficiencia**
$\Leftarrow$	**Condición de necesaria**
$\Leftrightarrow$	**Si y sólo si, condición de necesario y suficiente**
sii	**Si y sólo si, condición de necesario y suficiente**
!	**Factorial de un número**
$\forall$	**Para todo**
#	**Número**
$\exists$	**Existe**

%	**Porcentaje**
*	**Producto o multiplicación**
+	**Suma o adición**
−	**Resta o sustracción**
/	**División o cociente, tal que**
≠	**Diferente a**
:	**Tal que**
<	**Menor que**
=	**igual que**
≤	**Menor o igual que**
>	**Mayor que**
≥	**Mayor o igual que**
≡	**Relación de equivalencia**
≈	**Equivalente**
Δ	**Triangulo**
□	**Cuadrado**
±	**Más o menos**
±∞	**Más o menos infinito**
Π	**Producto**
Σ	**Sumatoria**
∴	**Por lo tanto**
e.i	**es decir**
⊥	**Perpendicularidad de rectas**
//	**Paralelismo de rectas**
→	**Implica**
∧	**Disyunción (o)**
∨	**Conjunción (y)**
ϕ	**Conjunto vacio**

■	**Fin de la demostración**
P(..)	**Potencia de un conjunto**
n(..)	**Cardinal de un conjunto**

ALFABETO GRIEGO

α	Α	a	A	Alfa
β	Β	b	B	Beta
χ	Χ	c	C	Ji
δ	Δ	d	D	Delta
ε	Ε	e	E	Epsilón
ϕ	Φ	f	F	Phi
γ	Γ	g	G	Gamma
η	Η	h	H	Eta
ι	Ι	i	I	Iota
φ	ϑ	j	J	Si
κ	Κ	k	K	Kapa
λ	Λ	l	L	Landa
μ	Μ	m	M	Mu
ν	Ν	n	N	Un
ο	Ο	o	O	Omicrón
π	Π	p	P	Pi
θ	Θ	q	Q	Teta
ρ	Ρ	r	R	Rho
σ	Σ	s	S	Sigma
τ	Τ	t	T	Tau
υ	Υ	u	U	Viu
ξ	Ξ	x	x	Omega
ψ	Ψ	y	Y	Fhi
ζ	Ζ	z	Z	Zeta

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

1. ***Asociativa***: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene,$(a + b) + c=a + (b + c)$
2. ***Conmutativa***: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a + b=b + a$
3. ***Elemento neutro o neutro aditivo***: $\forall a \in \Re, \exists e \in \Re / a + e=e + a=a$
4. ***Elemento simétrico o inverso aditivo***: $\forall a \in \Re,\ \exists\ a^{-1} \in \Re / a + a^{-1}=a^{-1} + a=e=0,\ \Rightarrow a^{-1} + a=0 \Rightarrow a^{-1}=-a$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

5. ***Asociativa***: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene, $(a_x b)c=a(b_x c)$
6. ***Conmutativa***: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a_x b=b_x a$
7. ***Elemento neutro o neutro multiplicativo***: $\forall a \in \Re, \exists e \in \Re / a_x e=e_x a=a \Rightarrow e=1$
8. ***Elemento simétrico o Elemento inverso multiplicativo***: $\forall a \in \Re$, $\exists a^{-1} \in \Re / a.a^{-1}=a^{-1}{}_x a=e=1 \Rightarrow a^{-1}{}_x a=1 \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$
9. ***Distributiva:*** $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene: $a(b + c)=a_x b + a_x c=b_x a + c_x a=(b + c)a$
10. ***Elemento absorbente:*** $\forall a \in \Re, \exists 0 \in \Re / 0a=a0=0$
11. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re /$ si $a<b \Rightarrow a + c<b + c$
12. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re^+ /$ si $a<b \Rightarrow a_x c<b_x c$
13. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re^- /$ si $a<b \Rightarrow a_x c>b.c$
14. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re /$, si $a<b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
15. $\forall a \in \Re$ se tiene que $a^2>0$ Si $a=0 \Rightarrow a^2=0$
16. $\forall a, b \in \Re$, se tiene que $(a + b)^2 >a^2 + b^2$

17. $\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$ se tiene que si $a_x b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$

18. $\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$ se tiene que si $a_x b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$

19. $\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$ se tiene que si $a_x b<0 \Rightarrow (a<0 \wedge b>0)$ o $(a>0 \wedge b<0)$

20. $\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists n\in\Re/(a_x b)^n = a^n{}_x b^n$ y $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

21. $\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists$n, m$\in\mathscr{R}/a^n{}_x a^m = a^{n+m}$ y $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$

22. a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists$n$\in\mathscr{R}/(a^n)^m = a^{n_x m}$

23. $y=a^x \Rightarrow x=lg_a x$

24. $lg_a 1=0$

25. $lg_a a=1$

26. $lg_a xy=lg_a x + lg_a y$

27. $lg_a \frac{x}{y} = lg_a x - lg_a y$

28. $lg_a x^y = ylg_a x$

29. Nota: Cuando la base es el número neperiano e, se escribe $lg_e x=lnx$

PROPIEDADES DE LA DISTACIA ENTRE DOS PUNTOS

6. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0, \Leftrightarrow x = 0$

7. $|ay| = a|x|$

8. $|xy| = |x|\,|y|$

9. $|x/y| = |x|/|y|$

10. $|x| = a \Leftrightarrow -a = x = a \Rightarrow x = -a$ ó $x = a$

11. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ y $x \leq a, \Rightarrow x \in [-a, a]$

12. $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x \geq a \Rightarrow x \leq -a$ y $x \geq a, \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

11. $|x + y| \leq |x| + |y|$

12. $|x - y| \geq |x| - |y|$

13. $|x - y| \geq ||x| - |y||$

FACTORIZACION DE POLINOMIOS Y RADICALES

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $(x \pm y)^n$

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$

$(x \pm y)^n = \binom{n}{0} x^n \pm \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{1} x^{n-2}y^2 \pm \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots \pm \binom{n}{n} y^n$, donde

$\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n(m-n)!}$, número combinatorio, los cuales se pueden calcular con la ayuda del triangulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{n}{0} & & & & \\
 & & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{0} & & & \\
 & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{0} & & \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{0} & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{6} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{0}
\end{array}
$$

Este triangulo también toma la forma:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $X^n - Y^n$

$x^2 - y^2=(x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3=(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^4 - y^4=(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

: :

$x^n - y^n=(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $x^n + y^n$

$x^2 + y^2=(x - \sqrt{2xy} + y)(x + \sqrt{2xy} + y)$

$x^3 + y^3=(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + y^4=(x^2 - \sqrt{2}\, xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}\, xy + y^2)$

: :

$$x^n + y^n=\begin{cases}(x^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}})(x^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}}) & \text{si n es par}\\[2ex] (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ..... + y^{n-1}) & \text{si n es impar}\end{cases}$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

$$x - y=(x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}-\sqrt[4]{y^3}}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}-\ldots\ldots\ldots-\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean $L_1=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $L_2=\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ **y** $K\in\Re$, **se tiene que:**

11) $\lim\limits_{x \to x_0} K = K$

12) $\lim\limits_{x \to x_0} Kf(x) = K\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = KL_1$

13) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

14) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$

15) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)\right)^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)\right)\right]^n = (L_1)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)\right)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \left(L_1\right)^{L_2}$

LIMITES ESPECIALES

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$

TABLA DE DERIVACIÓN

1. $\frac{dku}{dx} = k\frac{du}{dx}$

2. $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ donde v es también una función compuesta.

3. $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2}$

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2}$

6. $(u^n)' = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

7. $\frac{dsen(\alpha u)}{dx} = \alpha cos(\alpha u)\frac{du}{dx}$

8. $\frac{dcos(\ \alpha u)}{dx} = -\alpha sen(\alpha u)\frac{du}{dx}$

9. $\frac{dtg(\ \alpha u)}{dx} = \alpha sec^2 u\frac{du}{dx}$

10. $\frac{dcsc(c\ \ \alpha u)}{dx} = -\alpha csc(\alpha u)ctg(\alpha u)\frac{du}{dx}$

11. $\frac{dsec(\ \alpha u)}{dx} = \alpha secx(\alpha u)tg(\alpha u)\ \frac{du}{dx}$

12. $\frac{dctg(\ \alpha u)}{dx} = \alpha csc^2(\alpha u)\frac{du}{dx}$

13. $\dfrac{da^{\alpha u}}{dx} = \alpha \ln a \dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{de^{\alpha u}}{dx} = \alpha e^{\alpha u} \dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d(\lg_a(\alpha u))}{dx} = \dfrac{\alpha}{u\lg_a e} \dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d(\ln_a(\alpha u))}{dx} = \dfrac{\alpha}{u} \dfrac{du}{dx}$

TABLA DE INTEGRACIÓN

1. $I = \int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \dfrac{dx}{x} \end{cases}$

2. $I = \int (ax+b)^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a} Ln(ax+b) \end{cases}$

3. $I = \int a^x dx \Rightarrow I = \dfrac{a^x}{Lna} + C$

4. $I = \int a^{bx+c} dx \Rightarrow I = \dfrac{a^{bx+c}}{bLna} + C$

5. $I = \int e^x dx \Rightarrow I = e^x + C$

6. I= $\int e^{ax+b} dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} e^{x} + C$

7. $I = \int lnx dx \Rightarrow I = x(lnx - 1) + C$

8. $I = \int ln(ax+b) dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}(ax+b)[ln(ax+b) - 1] + C$

9. I= $\int senx dx \Rightarrow I = -cosx + C$

10. I= $\int sen(ax+b) dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a} cosx + C$

11. I= $\int cosx dx \Rightarrow I = senx + C$

12. I= $\int cos(ax+b) dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} sen(ax+b) + C$

13. I= $\int tgx dx \Rightarrow I = -Ln(cosx) + C \Rightarrow I = Ln(secx)$

14. I= $\int tg(ax+b) dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a} Ln(cos(ax+b) + C \Rightarrow I = \frac{1}{a} Lnsec(ax+b)$

15. I= $\int ctgx dx \Rightarrow I = Ln(senx) + C$

16. I= $\int ctg(ax+b) dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} Ln(senx) + C$

17. I= $\int secx dx \Rightarrow I = Ln[secx + tgx] + C$

18. I= $\int sec(ax+b) dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} Ln[sec(ax+b) + tg(ax+b)] + C$

19. I= $\int cscx dx \Rightarrow I = Ln[cscx - ctgx] + C$

20. I= $\int csc(ax+b) dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} Ln[csc(ax+b) - ctg(ax+b)] + C$

21. I= $\int \sec^2 x dx \Rightarrow I = tgx + C$

22. I= $\int \sec^2 (ax+b)x \Rightarrow I = \frac{1}{a} tg(ax+b) + C$

23. I= $\int \csc^2 x dx \Rightarrow I = -ctgx + C$

24. I= $\int \csc^2 (ax+b) dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a} ctg(ax+b) + C$

25. I= $\int secxtgxdx \Rightarrow I = secx + C$

26. I= $\int sec(ax+b)tg(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} sec(ax+b) + C$

27. I= $\int cscxctgxdx \Rightarrow I = -cscx + C$

28. I= $\int csc(ax+b)ctg(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a} csc(ax+b) + C$

29. I= $\int senhxdx \Rightarrow I = coshx + C$

30. I= $\int senh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} cosh(ax+b) + C$

31. I= $\int coshxdx \Rightarrow I = senhx + C$

32. I= $\int cosh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} senhx + C$

33. I= $\int tghxdx \Rightarrow I = Ln(coshx) + C$

34. I= $\int tgh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} Ln(cosh(ax+b)) + C$

35. I= $\int ctghxdx \Rightarrow I = Ln(senhx) + C$

36. $I=\int ctgh(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}Ln(senh(ax+b))+C$

37. $I=\int sechx dx \Rightarrow I=tg^{-1}(senhx)+C$

38. $I=\int sech(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}tg^{-1}(senh(ax+b))+C$

39. $I=\int cschx dx \Rightarrow I=Lntgh\frac{x}{2}+C$

40. $I=\int csch(ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}Lntgh\frac{ax+b}{2}+C$

41. $I=\int sech^2 x dx \Rightarrow I=tghx+C$

42. $I=\int sech^2 (ax+b)dx \Rightarrow I=\frac{1}{a}tgh(ax+b)+C$

43. $I=\int csc^2 hx dx \Rightarrow I=-ctghx+C$

44. $I=\int csc^2 h(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}ctgh(ax+b)+C$

45. $I=\int sechxtghx dx \Rightarrow I=-sechx+C$

46. $I=\int sech(ax+b)tgh(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}sech(ax+b)+C$

47. $I=\int cschxctghx dx \Rightarrow I=-cschx+C$

48. $I=\int csch(ax+b)ctgh(ax+b)dx \Rightarrow I=-\frac{1}{a}csch(ax+b)+C$

49. $I=\int \frac{dx}{a^2+x^2} \Rightarrow I=\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{x}{a}+C$

50. $I=\int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\left[\frac{a+x}{a - x}\right] + C$

51. $I=\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\left[\frac{x-a}{x+a}\right] + C$

52. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow I = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

53. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow I = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow I = sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

55. $I=\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + Ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

56. $I=\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \quad \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - Ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

57. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

Matemática para administradores

Los profesionales de la administración deben poseer sólidas bases matemáticas, puesto que sobre ellos suelen recaer enormes responsabilidades relacionadas con el manejo de aspectos siempre sensibles como el control de activos. En ese sentido, en la presente obra, el autor dedica el espacio necesario para explicar de manera detallada temas matemáticos, en principio de carácter general que luego son derivados hacia el cálculo diferencial y el cálculo integral, logrando conjugar en sus más de 500 páginas la teoría con la resolución de ejercicios aplicados a la administración. Todo ello apoyado en el conocimiento y la destreza adquirido por el autor tanto en su formación como docente del área matemática como en su labor en ese campo hasta alcanza la categoría de profesor titular, constituyen avales para sugerirle al lector que tiene a su disposición un producto que constituye un excelente auxiliar bien sea que se encuentre dispuesto a impartir como a recibir aprendizajes, relacionados con la matemática enfocada hacia la administración.

ISBN: 978-980-248-248-1