Carlos Javier Rojas Álvarez

GEOMETRÍA
PARA DISEÑO GRÁFICO

Universidad del Norte
Editorial

Geometría para diseño gráfico

Geometría para diseño gráfico

Carlos Javier Rojas Álvarez

Área metropolitana
de Barranquilla (Colombia), 2017

UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Rojas Álvarez, Carlos Javier.

Geometría para diseño gráfico/ Carlos Javier Rojas Álvarez.
– Barranquilla, Colombia : Editorial Universidad del Norte, 2017.

v, 133 p. : ilustraciones ; 24 cm.
Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-741-858-3 (impreso)
ISBN 978-958-741-859-0 (PDF)

1. Geometría

(516 R741 ed. 23) (CO-BrUNB)

Vigilada Mineducación
www.uninorte.edu.co
Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569
Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

Coordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Diseño y diagramación
Munir Kharfan de los Reyes

Diseño de portada
Joaquín Camargo

Corrección de textos
Hernando Sierra

Impreso y hecho en Colombia
La Imprenta Editores (Bogotá)

Printed and made in Colombia

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1

CONCEPTOS PRELIMINARES 3

1. Términos primitivos 5
2. Posición relativa de puntos 7
3. Segmento 10
4. Rayos y ángulos 12
5. Polígonos 20
6. La circunferencia 34
7. Sólidos 40

Referencias 58

Unidad 1
PROYECCIONES 59

1.1. Conceptos básicos 61
1.2. Proyección de vista múltiple 66
1.3. Proyección isométrica 84

Referencias 98

Unidad 2
PROPORCIONES 99

2.1. Proporción 101
2.2. La proporción áurea 112

Referencias 127

ANEXOS 129

Introducción

El propósito de este libro es aplicar la geometría al diseño gráfico. Si bien se escribió, principalmente, para un curso universitario de diseño gráfico, puede también ser útil en otros programas relacionados con el diseño, las artes o la arquitectura. Por tal razón, no se encuentran en él demostraciones (lo que no implica que se pierda la rigurosidad en las definiciones y propiedades).

La metodología es la exposición de la teoría, seguida de las aplicaciones, en su mayoría con relación al diseño gráfico. Al final de cada unidad se encuentra la bibliografía consultada. La Unidad "Conceptos preliminares", al principio, permite abordar situaciones con sólidos geométricos desde la Unidad 1: "Proyecciones".

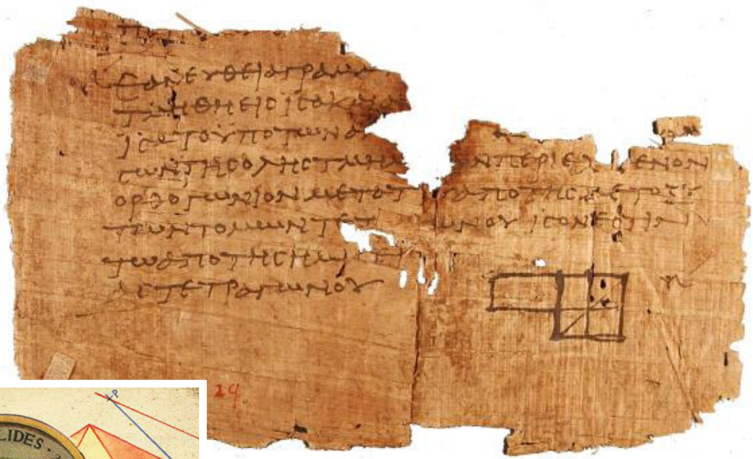
Las aplicaciones, al final de cada unidad, exigen el uso de instrumentos, tales como regla, transportador y compás, especialmente las de la Unidad 2: "Proporciones", en la cual se promueve un aprendizaje por medio de la acción, un modelo basado en la articulación de los sistemas de representación de Bruner (enactivo, icónico y simbólico).

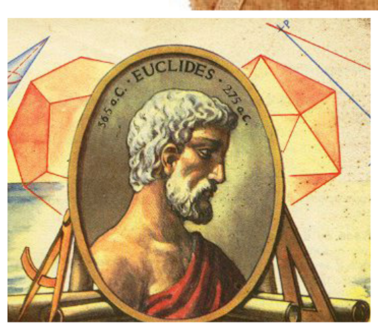
El libro se divide en cuatro partes: en primer lugar, se encuentran los "Conceptos preliminares"; esta abarca desde los conceptos primitivos de la geometría, hasta las definiciones de segmentos, rayos, ángulos, polígonos y de circunferencia de sólidos. En segundo lugar, se encuentran "Proyecciones"; en esta parte se estudia la proyección de vistas múltiples y la proyección isométrica, ambas restringidas a sólidos multicubos. Luego, las "Proporciones", para desarrollar conocimientos acerca de la proporción y la proporción áurea. Por último, se encuentra el "Anexo A" en el que se disponen algunos diseños circulares para construir con regla y compás.

Conceptos preliminares

1.1. Términos primitivos 5
1.2. Posición relativa de puntos 7
1.3. Segmento 10
1.4. Rayos y Ángulos 12
1.5. Polígonos 20
1.6. La circunferencia 34
1.7. Sólidos 40
Referencias 58

Reseña histórica





Euclides (325-275 a. C.). Primero en la Edad de Oro de la geometría griega. Fundó en Alejandría su escuela. Fue el primero en sistematizar los conocimientos de la geometría, por medio de lo que hoy se conoce como el método axiomático, en el libro *Los elementos*, por lo que a la geometría se le conoce también como "geometría elemental".

1. TÉRMINOS PRIMITIVOS

El término **geometría** proviene de vocablos griegos que significan "tierra" y "medir", es decir, "medida de la tierra". Asimismo, del latín *geometrein*, en el que "gaia" o "ge" significan "tierra", y *metrein* "medir".

El método axiomático parte de conceptos que no se definen denominados **términos primitivos**. En función de ellos se formulan las **definiciones**. La combinación de los términos primitivos y las definiciones permite establecer los **postulados**, los cuales son proposiciones que se admiten como verdaderas. Por último, se encuentran los **teoremas**, proposiciones que deben ser demostradas a partir de las definiciones, los postulados y los teoremas (previamente demostrados). Este método se repite cada vez que se estudia una nueva unidad (con excepción de los conceptos primitivos, los cuales se establecen solo en la primera parte de la "geometría elemental".

La figura 1 ilustra el método axiomático:

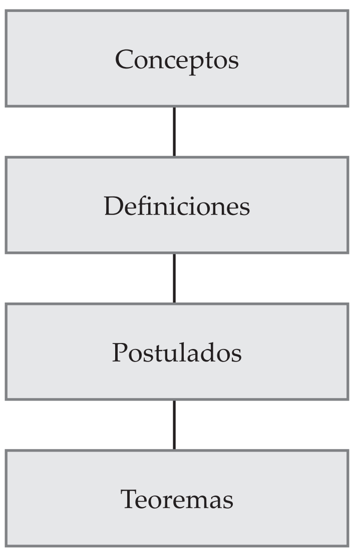


Figura 1. Método axiomático

En este texto no diferenciaremos entre postulados y teoremas, a ambos los denominamos **propiedades**. Los términos primitivos en geometría elemental son el punto, la recta y el plano.

TÉRMINO PRIMITIVO 1.1

El **punto** solo tiene posición, no tiene medida. Se simboliza con letras mayúsculas.

Figura 2. El punto A: A.

TÉRMINO PRIMITIVO 1.2

La **recta** es delgada, no tiene longitud finita. Se simboliza con letras minúsculas cursivas como l, m, n, etc.; o con dos letras mayúsculas, que corresponden a dos puntos de ella, con un símbolo de flecha doble sobre dichas letras.

Figura 3. l o $\overleftrightarrow{AB}$.

TÉRMINO PRIMITIVO 1.3

El **plano** es delgado y se extiende indefinidamente en todas las direcciones. Se simboliza con letras mayúsculas.

Figura 4. El plano P.

□

2. POSICIÓN RELATIVA DE PUNTOS

Definición 2.1

El conjunto de todos los puntos se denomina **espacio**.

Definición 2.2

Los puntos de un conjunto son **colineales** o están **alineados** si y solo si hay una recta que los contiene a todos.

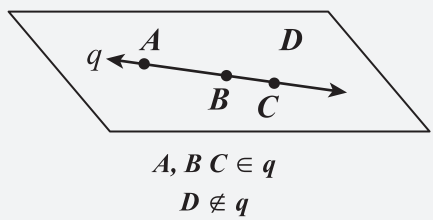


Figura 5. Los puntos *A*, *B* y *C* son colineales porque están en la recta *q*; mientras que los puntos *A*, *B*, *C* y *D* no son colineales porque no pertenecen a la recta *q*.

Definición 2.3

Dada una recta *l* y un plano *P* que la contiene, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos denominados *semiplanos*. A la recta *l* se le denomina *la arista* o *el borde* de cada uno de los semiplanos.

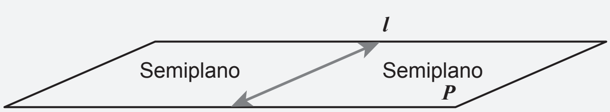


Figura 6.

Definición 2.4

Los puntos de un conjunto son **coplanares** si y solo si hay un plano que los contiene a todos.

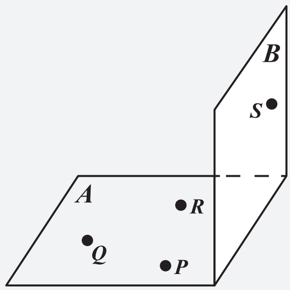


Figura 7. Los puntos Q, P y R son coplanares porque están en el plano A; mientras que los puntos Q, P, R y S no son coplanares porque no están, todos, en el plano A.

Definición 2.5

Dos rectas son **paralelas** si y solo si: 1. Están en un mismo plano; y 2. No se intersecan.

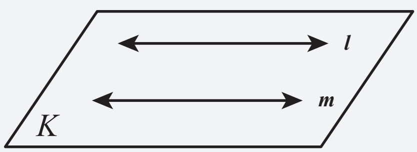


Figura 8. Las rectas l y m son paralelas porque están en el mismo plano K y no se intersecan. Se escribe: $l \parallel m$.

Definición 2.6

Dos rectas que no están en un mismo plano se denominan rectas **alabeadas**.

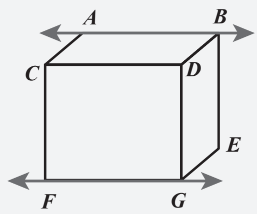


Figura 9. En la figura las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ son alabeadas.

□

3. SEGMENTO

DEFINICIÓN 3.1

El **segmento** es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre ellos. A y B se denominan los **extremos** de $\overline{AB}$.

Figura 10. La **distancia** AB es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Figura 11. D está entre A y B, cuando estos tres puntos son colineales y $AD + DB = AB$. Se denota por A-D-B.

DEFINICIÓN 3.2

Segmentos congruentes son segmentos que tienen la misma longitud.

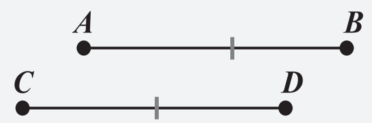


Figura 12. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. Se simboliza por $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $AB = CD$. El símbolo $\cong$ se lee “es congruente con”.

Definición 3.3

El **punto medio** de un segmento es el punto que está entre los extremos de un segmento y que lo divide en dos segmentos congruentes.

Figura 13. M es el punto medio de $\overline{AB}$.

□

4. RAYOS Y ÁNGULOS

DEFINICIÓN 4.1

El **rayo** $\overrightarrow{AB}$ es un subconjunto de una recta formado por la unión del segmento $\overline{AB}$. y el conjunto de todos los puntos que están del mismo lado de A, como B. El punto A se llama el extremo de $\overrightarrow{AB}$.

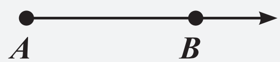


Figura 14.

DEFINICIÓN 4.2

Los **Rayos opuestos** son rayos que tienen el mismo extremo, pero que van en direcciones opuestas.

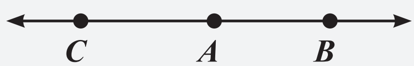


Figura 15. Los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos

DEFINICIÓN 4.3

Un **ángulo** es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo, denominado el **vértice.**

Los ángulos se denotan por el vértice: $\angle A$, o con tres letras, siendo la del medio la correspondiente al vértice: $\angle BAC$.

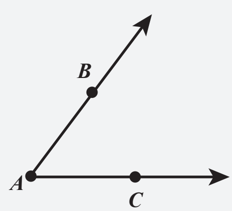


Figura 16. Ángulo: $\angle BAC$.

Si se presenta ambigüedad al escribir y no se quiere usar las tres letras, se puede denotar un ángulo específico con números. En la figura 18 $\angle 1$ es el $\angle BAC$, y el $\angle 2$ es el $\angle CBD$.

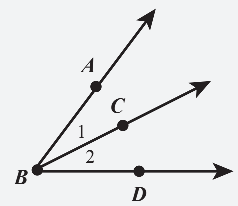


Figura 17.

Definición 4.4

Sea un ángulo en el plano K, un punto P está en el **interior** del $\angle BAC$, si: 1. P y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$, y 2. P y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

El **exterior** del $\angle BAC$ es el conjunto de todos los puntos de K que no están en el ángulo, y que tampoco están en su interior.

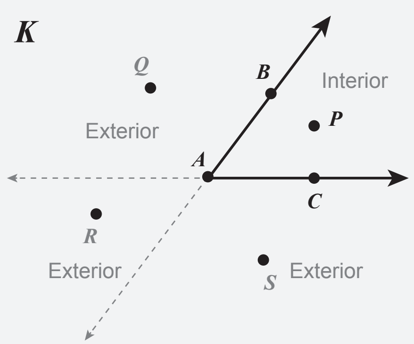


Figura 18. Los puntos Q, R y S no están en el interior del $\angle BAC$, ni sobre él. Por lo tanto, están en el exterior del $\angle BAC$. El punto P está en el interior del $\angle BAC$.

DEFINICIÓN 4.5

Una unidad de medida de ángulos es el **grado;** se simboliza con el símbolo de grado °.

PROPIEDAD 4.1

A cada $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.

DEFINICIÓN 4.6

El número dado en la propiedad 1 se denomina la **medida** del $\angle BAC$, y se escribe $m\angle BAC$.

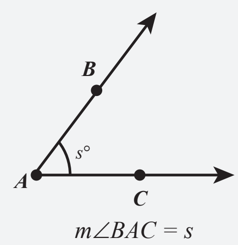


Figura 19.

Por lo general, el ángulo se mide partiendo de un rayo horizontal con dirección de izquierda a derecha (tal como se expone en la figura 19), pero también se puede medir desde un rayo horizontal con dirección de derecha a izquierda. Asimismo, a partir de un rayo vertical u oblicuo. Es decir, en geometría elemental no se miden los ángulos como en trigonometría, en la que se utilizan ángulos orientados y se permiten los ángulos de 0° y de 180°, los cuales no se permiten en la geometría elemental.

Definición 4.7

Los **Ángulos congruentes** son ángulos que tienen la misma medida.

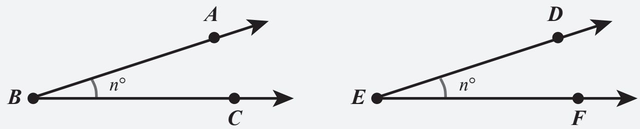


Figura 20. Los ángulos $\angle B$ y $\angle E$ son congruentes porque tienen la misma medida, y se denota por $\angle B \cong \angle E$ o $m\angle B = \angle E$.

Definición 4.8

Sea D un punto en el interior del $\angle BAC$, de tal forma que $\angle BAD \cong \angle DAC$. $\overrightarrow{AD}$ se denomina la **bisectriz** del $\angle BAC$ porque lo biseca.

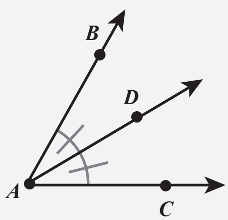


Figura 21.

Definición 4.9

Los **Ángulos opuestos por el vértice,** son ángulos cuyos lados los forman dos pares de rayos opuestos.

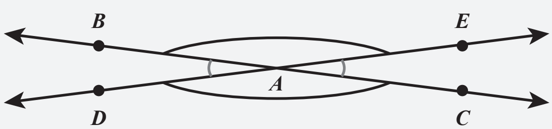


Figura 22. Los ángulos $\angle BAD$ y $\angle EAC$ son opuestos por el vértice. Similarmente, $\angle BAE$ y $\angle DAC$ también lo son.

Propiedad 4.2

Los **ángulos opuestos por el vértice** son ángulos congruentes.

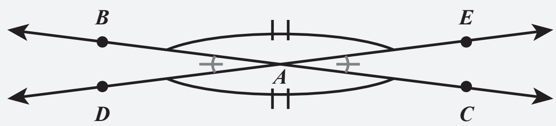


Figura 23. **Figura 23.** $\angle BAD$ y $\angle EAC$ son opuestos por el vértice; entonces, por este teorema: $\angle BAD \cong \angle EAC$. De manera similar, $\angle DAC \cong \angle BAE$.

Definición 4.10

Un **par lineal de ángulos** es un par de ángulos con un lado común, y los otros dos lados los forman rayos opuestos.

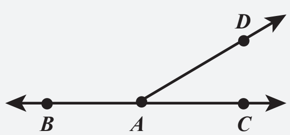


Figura 24. Los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal.

Definición 4.11

Un par de **ángulos suplementarios** son ángulos en los que la suma de sus medidas es 180. Cada ángulo es el **suplemento** del otro.

Propiedad 4.3

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Definición 4.11

Un **ángulo recto** es un ángulo cuya medida es 90°.

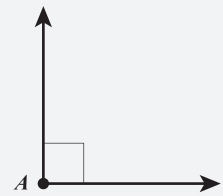


Figura 25. El $\angle A$ es recto porque $m\angle A = 90$.

Definición 4.12

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son **perpendiculares** si y solo si forman un ángulo recto. Se simboliza $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Se utiliza el mismo término y la misma notación para rectas y segmentos, de tal forma que si el $\angle CAB$ es un ángulo recto, se escribe: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, y así sucesivamente para cualquier combinación de segmentos, rayos o rectas.

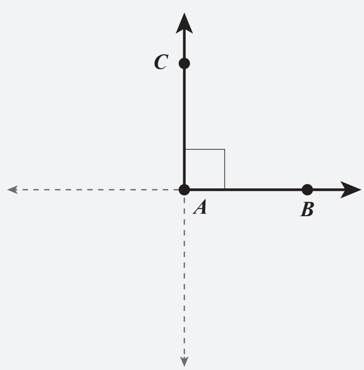


Figura 26.

Definición 4.13

Un par de **ángulos complementarios** son ángulos, cuya suma de sus medidas es 90. Cada ángulo es el **complemento** del otro.

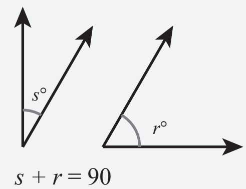


Figura 27.

Definición 4.14

En un plano dado, la **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

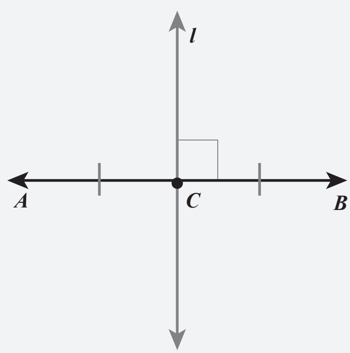


Figura 28. La recta l es la mediatriz del $\overline{AB}$ porque $l \perp \overline{AB}$ en el punto medio C.

Propiedad 4.4

La mediatriz de un segmento, en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

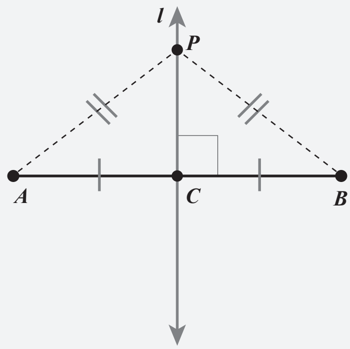


Figura 29.

□

5. POLÍGONOS

DEFINICIÓN 5.1

Sean A, B y C tres puntos no colineales. La reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denomina un **triángulo**, y se simboliza con ΔABC. Los puntos A, B y C son los **vértices**, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los **lados**. Todo triángulo ΔABC determina tres ángulos: $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Estos se denominan los **ángulos** del ΔABC.

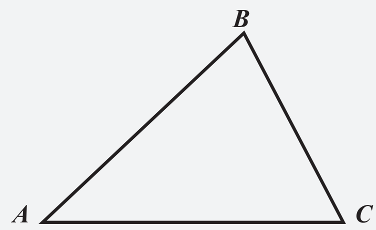


Figura 30.

DEFINICIÓN 5.2

Un punto está en el **interior** de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el exterior de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior.

DEFINICIÓN 5.3

Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados congruentes; el otro lado es la base. Los dos ángulos asociados con la base se denominan **ángulos en la base**. El ángulo opuesto a la base se denomina **ángulo en el vértice**. En el ΔABC, el $\angle A$ es el ángulo en el vértice; $\overline{BC}$ es la base; $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, así como el $\angle B$ y el $\angle C$ son los ángulos en la base.

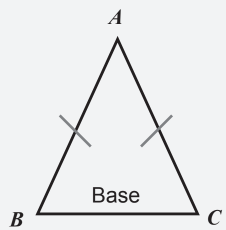


Figura 31. Triángulo isósceles

Definición 5.4

Un **triángulo equilátero** es un triángulo con sus tres lados congruentes.

Definición 5.5

Un **triángulo equiángulo** es un triángulo con sus tres ángulos congruentes.

Definición 5.6

Un **triángulo escaleno** es un triángulo que no tiene lados congruentes.

Propiedad 5.1 (teorema del triángulo isósceles)

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

En símbolos: Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle B \cong \angle C$.

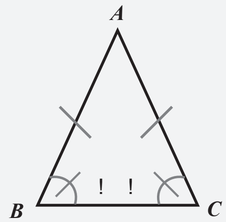


Figura 32.

PROPIEDAD 5.2

Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.

PROPIEDAD 5.3

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

En símbolos: Si $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

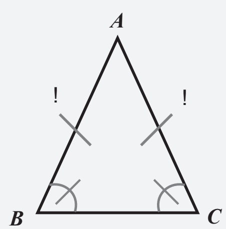


Figura 33.

PROPIEDAD 5.4

Si un triángulo es equiángulo, entonces es equilátero.

Definición 5.7

Una **altura** de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto.

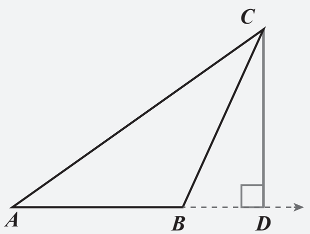


Figura 34. $\overline{CD}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$.

Definición 5.8

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto. El lado opuesto al lado recto se denomina **hipotenusa**, y los otros dos lados son los **catetos**.

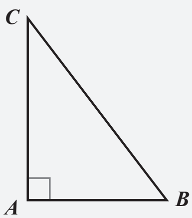


Figura 35. En el ΔABC el $\angle A$ es el ángulo recto; $\overline{BC}$ es la hipotenusa, y $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los catetos.

Propiedad 5.5 (teorema de pitágoras)

Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En símbolos: Si en el ΔABC, el $\angle C$ es un ángulo recto, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

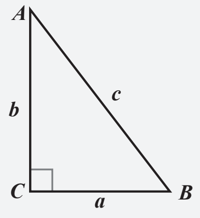


Figura 36.

DEFINICIÓN 5.9

Un **triángulo acutángulo** es un triángulo que tiene los tres ángulos agudos. hipotenusa, y los otros dos lados son los catetos.

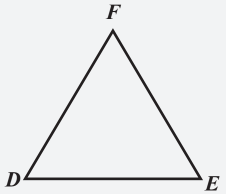


Figura 37. En el ΔDEF el $\angle D$, $\angle E$ y $\angle F$ son agudos.

DEFINICIÓN 5.10

Un **triángulo obtusángulo** es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

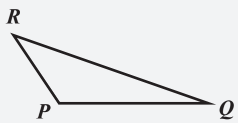


Figura 38. En el ΔPQR el $\angle P$ es el ángulo obtuso.

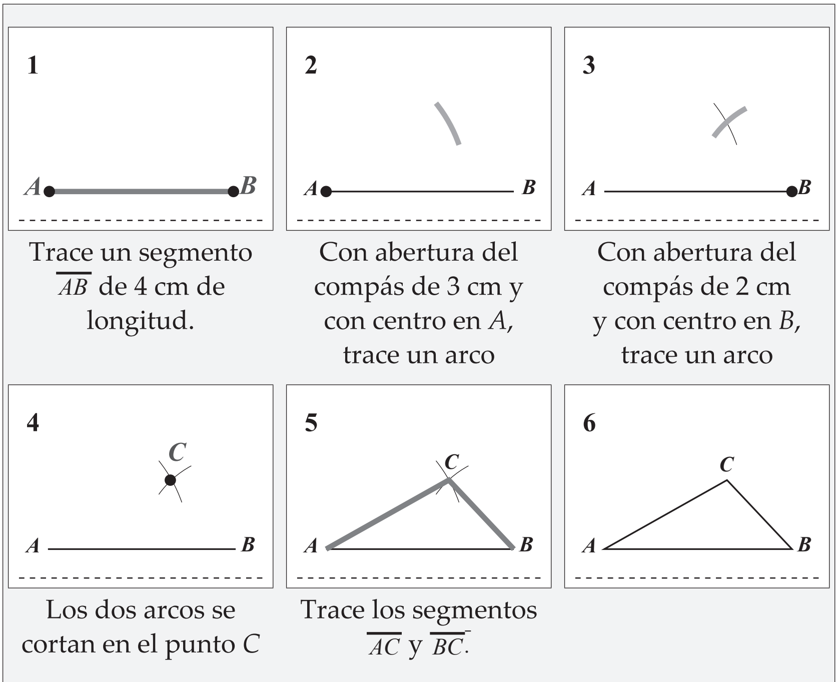


Figura 39. Procedimiento para construir el triángulo escaleno con un compás, conociendo las medidas de sus tres lados $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm y $BC = 2$ cm.

Definición 5.11

Sean A, B, C y D cuatro puntos coplanarios, tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, y que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se intersecan solo en sus extremos, la reunión de los cuatro segmentos se denomina **cuadrilátero**. Los cuatro segmentos se denominan **lados**, y los puntos A, B, C y D, se denominan **vértices**. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ se denominan **ángulos del cuadrilátero**. El cuadrilátero ABCD se denota $\square ABCD$.

Definición 5.12

Dos **lados opuestos** de un cuadrilátero son dos lados que no se intersecan. Dos **ángulos opuestos** son dos ángulos que no tienen común un lado del cuadrilátero. Dos **lados consecutivos** son dos lados que tienen un extremo común. Dos **ángulos consecutivos** son dos ángulos que tienen en común un lado del cuadrilátero. Una **diagonal** de un cuadrilátero es un segmento que tiene por extremos dos vértices no consecutivos.

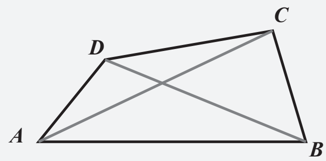


Figura 40. En el cuadrilátero $\square ABCD$, $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ son lados opuestos; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son lados adyacentes; $\angle CDA$ y $\angle DAC$ son ángulos consecutivos; $\angle CDA$ y $\angle ABC$ son ángulos opuestos; y $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales.

Definición 5.13

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.

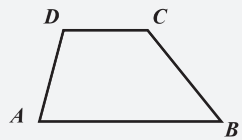


Figura 41.

Definición 5.14

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos.

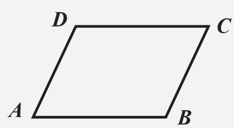


Figura 42.

Definición 5.15

Un **rombo** es un paralelogramo que tiene todos sus lados congruentes entre sí.

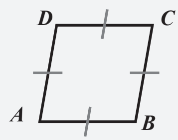


Figura 43.

Definición 5.16

Un **rectángulo** es un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos.

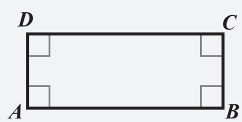


Figura 44.

Definición 5.17

Un **cuadrado** es un rectángulo que tiene todos sus lados congruentes entre sí.

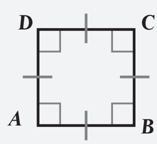


Figura 45.

Definición 5.18

Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan solo en sus extremos, de tal manera que: 1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto; y 2) cada segmento toca exactamente a otros dos.

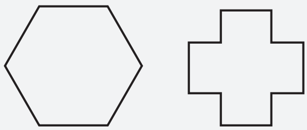


Figura 46. Ejemplos de polígonos.

Un polígono también se puede definir tal como se encuentra en la definición 5.19.

Definición 5.19

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ una sucesión de n puntos distintos de un plano con n ≥ 3 de tal forma que los n segmentos $\overline{P_1 P_2}$, $\overline{P_3 P_4}$, ... , $\overline{P_{n-1} P_n}$, $\overline{P_n P_1}$ tienen las siguientes propiedades: 1) ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus puntos extremos; 2) ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

A la reunión de los n segmentos se le denomina **polígono**. Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los **vértices** del polígono. Los segmentos $\overline{P_1 P_2}$, $\overline{P_3 P_4}$, ... , $\overline{P_{n-1} P_n}$, $\overline{P_n P_1}$ son los **lados** del polígono.

Los ángulos del polígono son el $\angle P_n P_1 P_2$, el $\angle P_1 P_2 P_3$, y así sucesivamente. Para abreviar, generalmente se denotan los ángulos por $\angle P_1$, $\angle P_2$, etc.

Los polígonos se nombran de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 1.

Nombre del polígono	Número de lados	Nombre del polígono	Número de lados
Triángulo	3	Nonágono	9
Cuadrilátero	4	Decágono	10
Pentágono	5	Undecágono	11
Hexágono	6	Dodecágono	12
Heptágono	7	Icoságono	20
Octágono	8	*n*-gono	*n*

Definición 5.20

Una **diagonal** de un polígono es un segmento que tiene por extremos dos vértices no consecutivos del polígono.

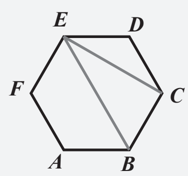


Figura 47. En este polígono, $\overline{EC}$ y $\overline{BC}$ son diagonales.

Definición 5.21

Un punto está en el **interior** de un polígono, si está en el interior de cada uno de los ángulos del polígono. Un punto está en el **exterior** de un polígono, si está en el plano del polígono, pero no está en el polígono o en su interior.

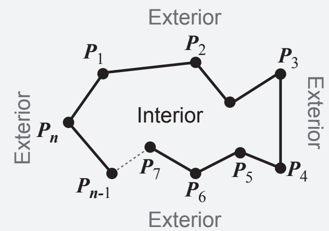


Figura 48.

DEFINICIÓN 5.22

Un **polígono convexo** es un polígono en el que todas sus diagonales están en su interior. Al polígono en que por lo menos una diagonal no está en su interior, se le llama **polígono cóncavo**.

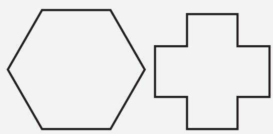


Figura 49. El hexágono es un polígono convexo; mientras que la cruz, que está al lado del hexágono, es un polígono cóncavo.

DEFINICIÓN 5.23

Un **polígono regular** es un polígono convexo que tiene todos sus lados congruentes (equilátero) y todos sus ángulos congruentes (equiángulo).

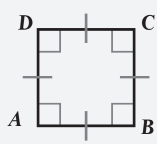


Figura 50. El cuadrado □*ABCD* es un polígono regular.

Propiedad 5.6 (teorema de la mínima distancia)

El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.

En símbolos: Sea una recta l y un punto P fuera de ella. Si $\overline{PQ} \perp l$ en Q, y R es otro punto cualquiera de l, entonces $PQ < PR$.

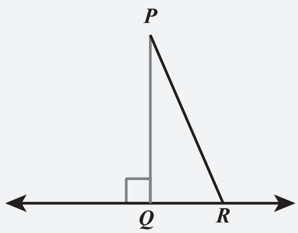


Figura 51.

Definición 5.24

La **distancia** entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma se define como cero.

Definición 5.25

El **centro** de un polígono regular es la intersección de las mediatrices de sus lados.

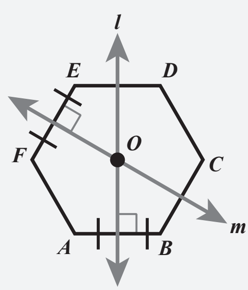


Figura 52. En el hexágono regular, O es el centro.

Definición 5.26

La **apotema** de un polígono regular es la distancia desde el centro a cada uno de sus lados.

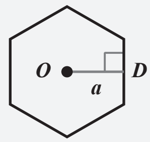


Figura 53. En el hexágono regular, a es la apotema.

Definición 5.27

El **radio** de un polígono regular es la distancia del centro a cada uno de sus vértices.

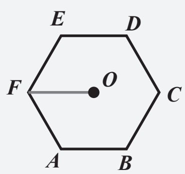


Figura 54. En el hexágono regular, $\overline{OF}$ es el radio.

Propiedad 5.7

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $180\,(n-2)$.

Propiedad 5.8

La medida de un ángulo interno de un polígono regular de n lados es $180\,(n-2)\,/\,n$

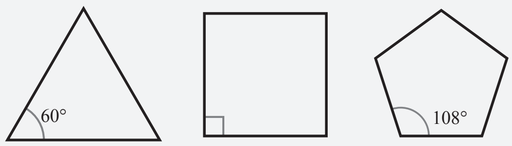


Figura 55.

6. LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN 6.1

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija se le llama **radio** y se simboliza por *r*.

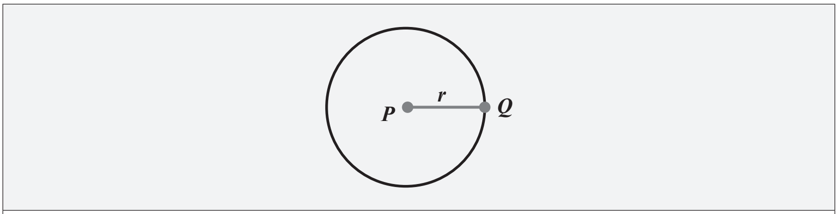


Figura 56.

DEFINICIÓN 6.2

El **interior** de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas distancias del centro son menores que el radio. El **exterior** de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas distancias del centro son mayores que el radio.

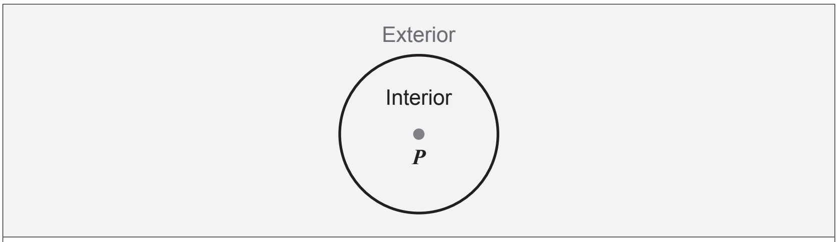


Figura 57.

Definición 6.3

Una **cuerda** de una circunferencia es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

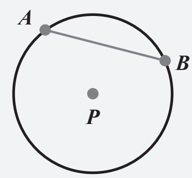


Figura 58. En la imagen, $\overline{AB}$ es una cuerda.

Definición 6.4

Un **diámetro** de una circunferencia es una cuerda que contiene al centro.

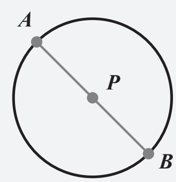


Figura 59. En la figura, $\overline{AB}$ es un diámetro.

Definición 6.5

Un **ángulo central** de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

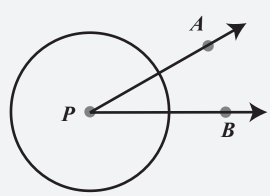


Figura 60. En la imagen, el $\angle APB$ es un ángulo central.

Definición 6.6

Sea una circunferencia con centro P, y sean A y B dos puntos de la circunferencia, pero que no son los extremos de un diámetro. El **arco menor** $\overset{\frown}{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que *están* en el interior del $\angle APB$. El **arco mayor** $\overset{\frown}{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia $\overset{\frown}{AB}$ que están en el exterior del $\angle APB$. En cada caso, A y B son los **extremos** del arco $\overset{\frown}{AB}$.

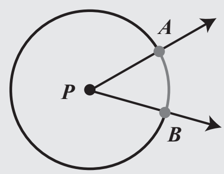


Figura 61.

Definición 6.7

Sea una circunferencia y sean A y B los extremos de un diámetro. Una **semicircunferencia** $\overset{\frown}{AB}$ es la reunión de A, B y los puntos de la circunferencia que están en el semiplano dado de arista $\overleftrightarrow{AB}$. Los puntos A y B son los **puntos extremos** de la semicircunferencia.

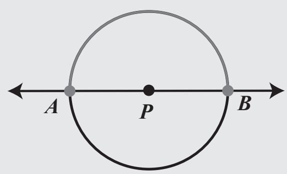


Figura 62.

Definición 6.8

Un ángulo **intercepta** un arco si y solo si: 1) los puntos extremos del arco están en el ángulo; 2) todos los otros puntos del arco están en el interior del ángulo, y 3) cada lado del ángulo contiene un extremo del arco.

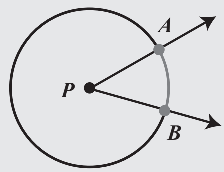


Figura 63. El $\angle APB$ intercepta el arco menor $\widehat{AB}$.

Definición 6.9

Un **polígono inscrito** en una circunferencia es un polígono que tiene todos sus vértices en la circunferencia. También se dice que la circunferencia está **circunscrita** al polígono.

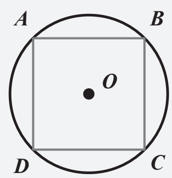


Figura 64. El cuadrado $\square ABCD$ está inscrito en la circunferencia de centro O, o la circunferencia está circunscrita al cuadrado $\square ABCD$.

Definición 6.10

Un **polígono circunscrito** a una circunferencia es un polígono en el que cada lado es tangente a la circunferencia. También se dice que la circunferencia está **inscrita** en el polígono.

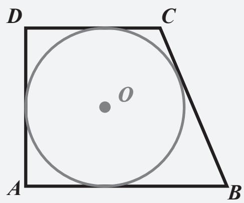


Figura 65. El cuadrado □*ABCD* está circunscrito a la circunferencia de centro *O*, o la circunferencia está inscrita en el □*ABCD*.

Definición 6.11

Un **círculo** es la reunión de la circunferencia y su interior.

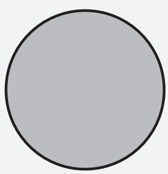


Figura 66.

Definición 6.12

Un **sector circular** es una región del círculo limitada por un ángulo central y su arco interceptado.

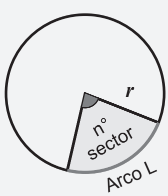


Figura 67.

Definición 6.13

Un **segmento circular** es una región determinada por un arco de una circunferencia y la correspondiente cuerda.

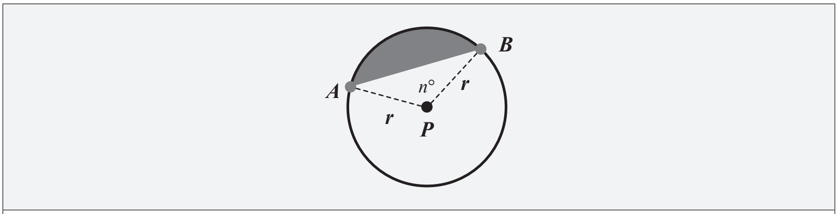


Figura 68.

Definición 6.14

Una **corona circular** es una región del plano limitada por dos circunferencias concéntricas (circunferencias con el mismo centro).

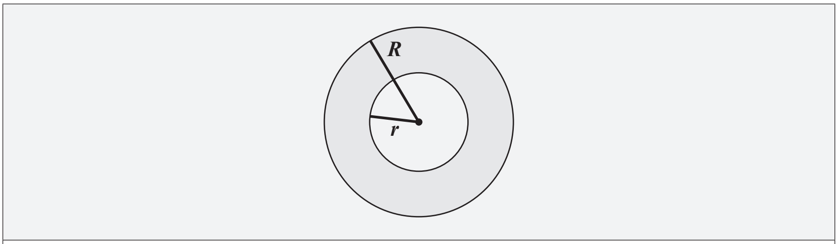


Figura 69.

Definición 6.15

Un **trapecio circular** es una región de la corona circular delimitada por dos radios.

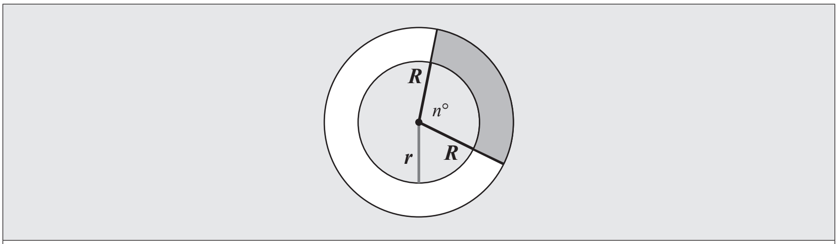


Figura 70.

7. SÓLIDOS

Definición 7.1

El conjunto de todos los puntos se denomina **espacio**.

Definición 7.2

Dada una recta l y un plano P que la contiene, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos denominados **semiplanos**. A la recta l se le llama la **arista** o el **borde** de cada uno de los semiplanos.

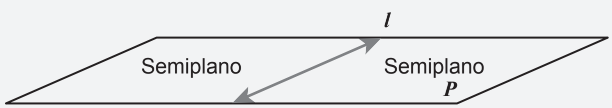


Figura 71.

Consideremos dos planos, que no estén alineados, en el espacio y se intersecan en una recta, tal como se muestra en la figura 73:

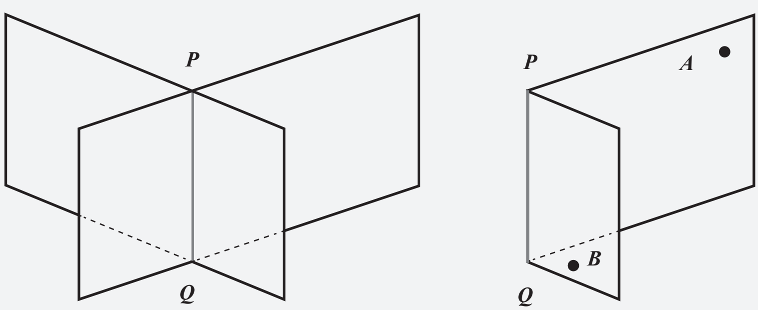


Figura 72.

Los planos y la recta forman cuatro figuras, cada una de las cuales se representa en la imagen de la derecha de la figura 73. Una figura como esa se denomina un **ángulo diedro**, y la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ se denomina **arista**.

Definición 7.3

Sean dos semiplanos que tienen la misma arista, pero que no están en el mismo plano. La reunión de los dos semiplanos y su arista común se denomina un **ángulo diedro**. La recta, que es la arista común de los dos semiplanos, se denomina la **arista del ángulo diedro**. La reunión de la arista y cualquiera de los dos semiplanos se denomina una **cara del ángulo diedro**.

Podemos mencionar el **interior** y el **exterior** de un ángulo diedro, así como de **ángulos diedros opuestos por el vértice**, cuyas definiciones son muy parecidas a las respectivas para los ángulos en un plano, por lo que no los definiremos aquí. La ilustración de estos conceptos se presenta en las figuras 74 y 75, respectivamente.

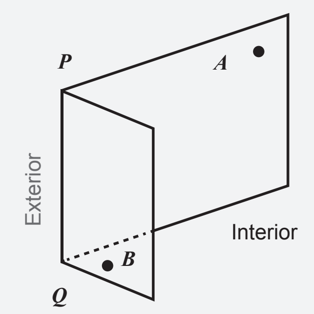


Figura 73.

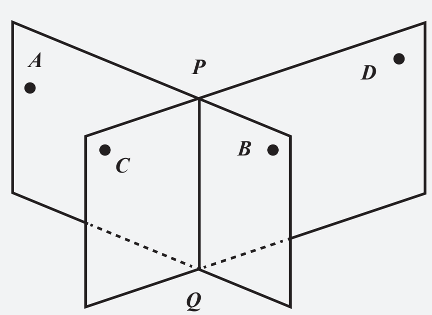


Figura 74.

La esquina de una habitación, donde se intersecan dos paredes y el piso, es un **ángulo triedro**, porque tiene tres caras. Si un ángulo tiene cuatro caras, se denomina **ángulo tetraedro**, y así sucesivamente. El ángulo poliedro se trata en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 7.4

Sean n planos que se intersecan en un punto, pero que no están en un mismo plano. La reunión de los n planos y su vértice común se denomina un **ángulo poliedro**.

Los ángulos poliedros se nombran de acuerdo con el número de caras: ángulo triedro (tres caras), ángulo tetraedro (cuatro caras), ángulo pentaedro (cinco caras), y así sucesivamente.

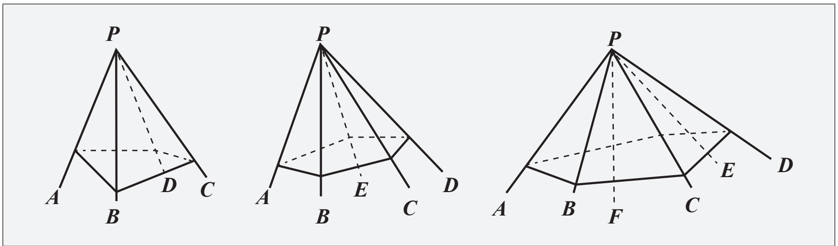


Figura 75. De izquierda a derecha, un ángulo tetraedro, un ángulo pentaedro y un ángulo hexaedro.

Los ángulos poliedros se denotan indicando el vértice y un punto de cada arista. En la figura 75, los ángulos son $\angle P - ABCD$, $\angle P - ABCDE$ y $\angle P - ABCDEF$, respectivamente.

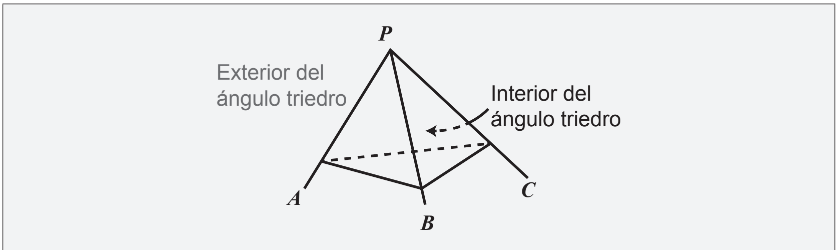


Figura 76. Interior y el exterior del ángulo triedro.

Los sólidos geométricos se clasifican en poliedros y cuerpos redondos.

Definición 7.5

Un poliedro es un sólido que está formado por un número finito de regiones poligonales denominadas **caras**. Los lados y vértices de las caras se denominan, respectivamente, **aristas** y **vértices**. Cada arista de una cara es la arista de exactamente otra cara. Si dos caras se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice.

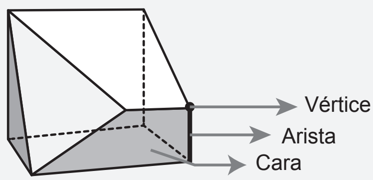
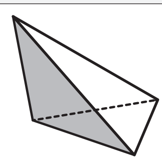
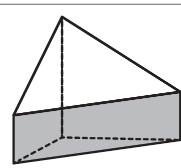
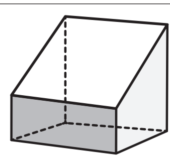


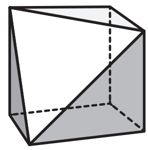
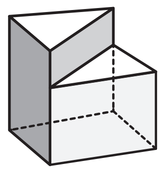
Figura 77.

Los poliedros se nombran de acuerdo con el número de caras que presenten, tal como se expone en la tabla 2.

Tabla 2.

Número de caras	Nombre	Dibujo
4	Tetraedro	
5	Pentaedro	
6	Hexaedro	

Continúa…

Número de caras	Nombre	Dibujo
7	Heptaedro	
8	Octaedro	

Los poliedros se clasifican según dos criterios: 1) si son poliedros convexos o cóncavos; y 2) según su regularidad (regulares, semirregulares e irregulares). A su vez, los poliedros regulares pueden ser convexos o estrellados.

Definición 7.6

Un **poliedro convexo** es un poliedro en el que todo segmento, que tiene por extremos dos puntos del poliedro, se encuentra totalmente en el poliedro o en su interior. El tetraedro de la figura 78 es convexo, ya que para cualquier par de puntos en él, el segmento que los une está totalmente en el poliedro o en su interior. El segmento $\overline{AC}$, que tiene por extremos los vértices A y C, está contenido totalmente en la cara $ABCD$ del poliedro.

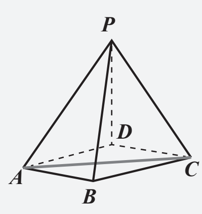


Figura 78.

Definición 7.7

Un **poliedro cóncavo** es un poliedro en el que todo segmento, que tiene por extremos dos puntos del poliedro, no se encuentra totalmente en el poliedro o en su interior. En el poliedro de la figura 79, los puntos A y C están en el poliedro porque son los vértices; pero el segmento $\overline{AC}$ no está contenido en el poliedro ni en su interior.

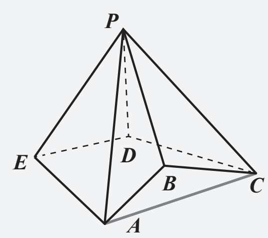


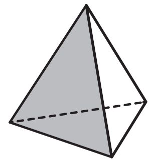
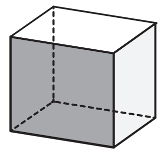
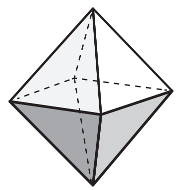
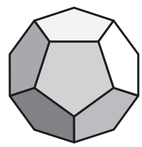
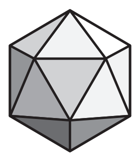
Figura 79.

Definición 7.8

Un **poliedro regular** es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y todos los vértices están rodeados por el mismo número de caras.

Solo existen cinco **poliedros regulares convexos** o **sólidos platónicos**. El prefijo que se emplea en el nombre indica el número de caras que tiene. En la tabla 3 se muestran sus características.

Tabla 3.

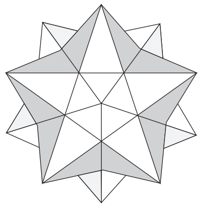
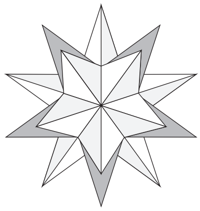
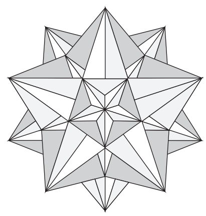
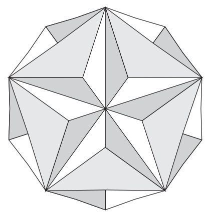
Nombre	Número de caras en un vértice	Forma de las caras	Figura 3D
Tetraedro regular	3	Triángulo equilátero	
Cubo (hexaedro regular)	3	Cuadrado	
Octaedro regular	4	Triángulo equilátero	
Dodecaedro regular	3	Pentágono regular	
Icosaedro regular	5	Triángulo equilátero	

Definición 7.9

Los **poliedros regulares estrellados** son poliedros cóncavos obtenidos a partir del pentagrama de los pitagóricos.

Existen cuatro poliedros regulares estrellados. La tabla 4 muestra algunas de sus características.

Tabla 4.

Nombre	Características	Figura 3D
Pequeño dodecaedro estrellado	12 caras que son pentagramas 30 aristas 12 vértices	
Gran dodecaedro estrellado	12 caras que son pentagramas 30 aristas 20 vértices	
Gran icosaedro	20 caras que son triángulos equiláteros 30 aristas 12 vértices	
Gran dodecaedro	12 caras que son pentágonos regulares 30 aristas 12 vértices	

Estos poliedros se conocen también con el nombre de **sólidos de Kepler-Poinsot**, ya que Johann Kepler fue quien afirmó que los dos dodecaedros estrellados cumplen con la definición de sólidos regulares, aunque no fueran convexos como los sólidos platónicos. Por su parte, el gran icosaedro y el gran dodecaedro fueron descritos por Louis Poinsot.

Los poliedros semiregulares se clasifican en: 1. Sólidos de Arquímedes o poliedros arquimedianos (son trece); y 2. Sólidos de Catalan o poliedros de Catalan (son trece). Los poliedros irregulares se clasifican en: 1) Prismas; y 2) Pirámides.

Existen otros tipos de poliedros, como, por ejemplo, los deltaedros (todas sus caras son triángulos equiláteros). De los ocho **deltaedros convexos**, tres (tetraedro, octaedro e icosaedro) son poliedros regulares convexos; los otros cinco son poliedros irregulares que se ubican en la familia de los **sólidos de Jonhson**, otra clasificación de sólidos. Un **deltaedro cóncavo** (el gran icosaedro) es un sólido de Kepler-Poinsot.

La anterior clasificación de los poliedros se resume en el diagrama de la figura 80.

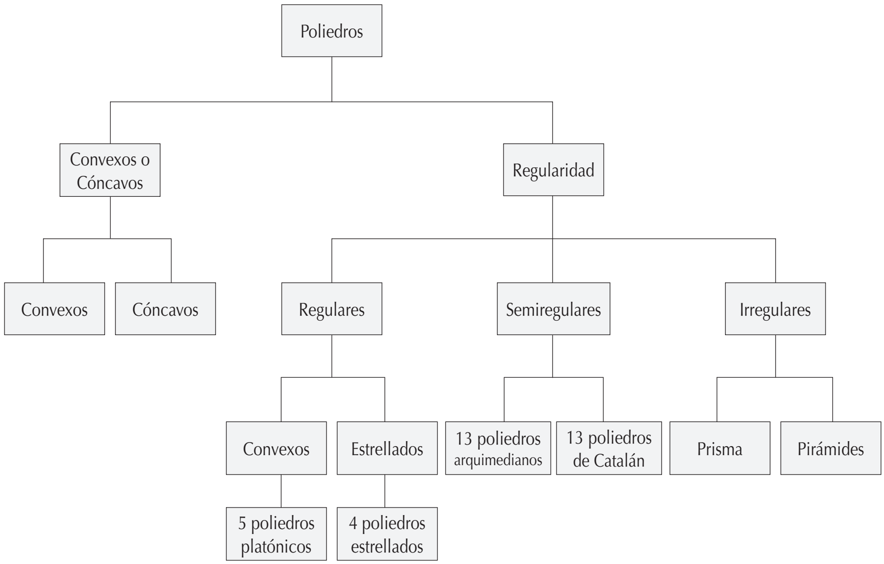


Figura 80.

En esta clasificación, los prismas y las pirámides que tienen sus caras regulares, no se tienen en cuenta porque se ubican en la categoría de los poliedros regulares. Esta no es la única forma de clasificar los poliedros. La clasificación de la figura 81 (tomada de Gómez et al., 2003) tiene en cuenta los deltaedros, pero deja por fuera los poliedros cóncavos y estrellados.

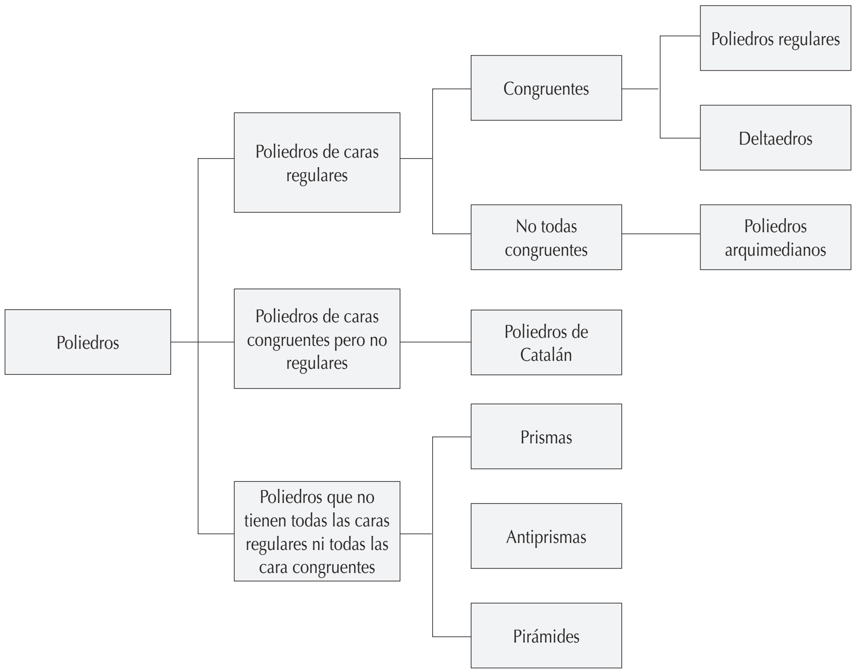


Figura 81. Elaborada a partir de Gómez et al. (2003).

Sin embargo, en el diagrama de la figura 81 es necesario hacer una excepción en las categorías de “Prismas”, “Antiprismas” y “Pirámides”: esto en los de caras regulares, porque son el cubo y el tetraedro, que son poliedros regulares.

Definición 7.10

Un **prisma** es un poliedro en el que: 1) se encuentran un par de caras congruentes sobre planos paralelos, denominadas **bases**; y 2) todas las demás caras son regiones paralelográmicas.

Las caras paralelográmicas se denominan **caras laterales**. Las caras laterales se intersecan unas con otras en segmentos paralelos denominados **aristas laterales**.

La **altura** del prisma es un segmento perpendicular a los planos de las bases.

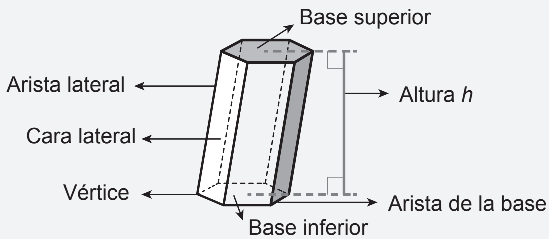


Figura 82.

Los prismas se nombran según las bases, tal como s e muestra en la tabla 5

Tabla 5.

Bases	**Nombre**
Triángulos	Prisma triangular
Rectángulos	Prisma rectangular
Cuadrados	Prisma cuadrangular
Pentágonos	Prisma pentagonal
Hexágonos	Prisma hexagonal

Los prismas se clasifican en rectos y oblicuos.

DEFINICIÓN 7.11

Un **prisma recto** es un prisma en el que las aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases.

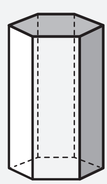


Figura 83. En este prisma, la arista lateral coincide con la altura del prisma.

Definición 7.12

Un **prisma oblicuo** es un prisma en el que las aristas laterales no son perpendiculares a los planos de las bases.

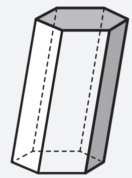


Figura 84.

Definición 7.13

Un **paralelepípedo** es un prisma cuya base es una región paralelográmica.

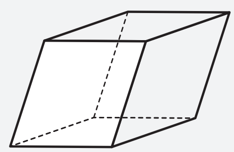


Figura 85.

Definición 7.14

Un **paralelepípedo rectangular** es un prisma rectangular recto.

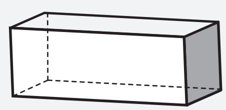


Figura 86.

Definición 7.15

Un **cubo** es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son todas congruentes.

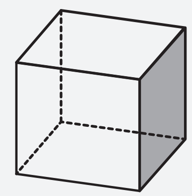


Figura 87.

A continuación, se definen las pirámides:

Definición 7.16

Una **pirámide** es un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. Ese vértice común es el **vértice** o **cúspide** de la pirámide. La cara que no contiene al vértice es la **base de la pirámide**.

Las caras triangulares que se unen en el vértice se denominan **caras laterales**. Las **aristas laterales** son los segmentos en que se intersecan las caras laterales. La **altura de la pirámide** es el segmento perpendicular que va del vértice al plano de la base.

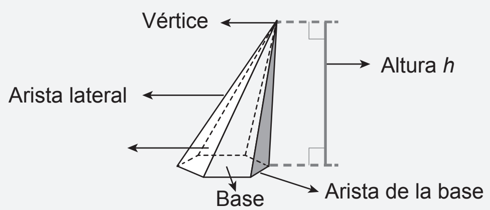


Figura 88.

Las pirámides se nombran de acuerdo al polígono de la base, tal como se muestra en la tabla 6.

Tabla 6.

Base	Nombre
Triángulo	Pirámide triangular
Rectángulo	Pirámide rectangular
Cuadrado	Pirámide cuadrangular
Pentágono	Pirámide pentagonal
Hexágono	Pirámide hexagonal

Las pirámides se clasifican en oblicuas y rectas, y en regulares y no regulares, no mutuamente excluyentes. Solo definiremos las regulares y no regulares:

Definición 7.17

Una **pirámide no regular** es una pirámide en la que las aristas laterales no son congruentes o la base no es un polígono regular.

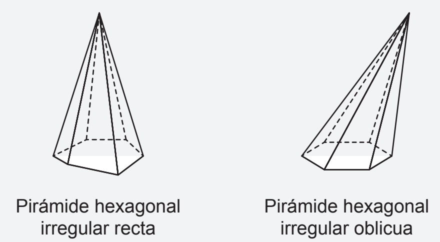


Figura 89. En la primera pirámide de abajo, la base no es un polígono regular; y en la segunda, las aristas laterales no son congruentes.

Definición 7.18

Una **pirámide regular** es una pirámide en la que la base es un polígono regular y las aristas laterales son congruentes. La **apotema de la pirámide** o **altura inclinada** es la altura de cualquiera de sus caras laterales.

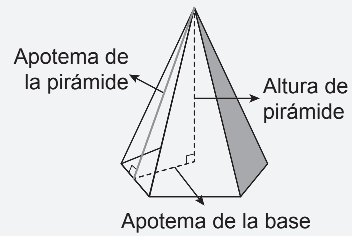


Figura 90.

Cuando una pirámide, regular o no regular, se corta totalmente con un plano horizontal, se obtiene un poliedro con dos bases. Consideramos el caso de una pirámide regular en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 7.19

Un **tronco de pirámide regular** es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano paralelo a ella que corte a todas las artistas laterales. La **altura del tronco** es un segmento perpendicular a los planos de las dos bases. El segmento resultante de apotema de la pirámide es la **apotema del tronco**.

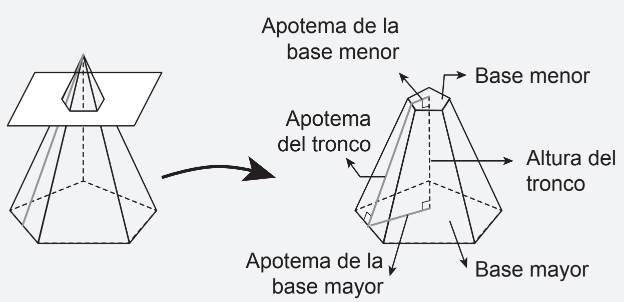


Figura 91.

A continuación, se definen los cuerpos redondos.

Definición 7.20

Un **cuerpo redondo** es un sólido en el que por lo menos una de sus caras es una superficie curva.

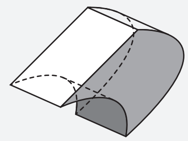


Figura 92.

En geometría elemental se consideran tres cuerpos redondos: el cilindro, el cono y la esfera. Se pueden definir como cuerpos redondos o como sólidos de revolución. En este texto definiremos solo los dos primeros, ambos como **sólidos de revolución**.

Definición 7.21

Un **cilindro circular recto** de revolución es un sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, denominado **eje de revolución** o **eje de giro**.

El lado opuesto al eje de giro es **la generatriz** del cilindro y genera la **superficie lateral**. Los lados del rectángulo adyacentes al eje describen dos círculos que son las **bases del cilindro**, y cada uno de ellos es el **radio de la base** o **radio del cilindro**.

La **altura del cilindro** es el segmento perpendicular a los planos de las bases, que en este caso coincide con la generatriz.

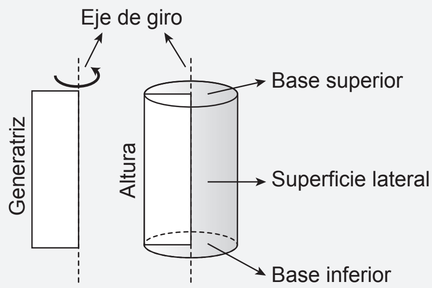


Figura 93.

DEFINICIÓN 7.22

Un **cono circular recto de revolución** es un sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, denominado **eje de revolución** o **eje de giro**. El otro cateto describe un círculo y es el **radio de la base** o **radio del cono**. La hipotenusa del triángulo rectángulo es la **generatriz del cono** y es la que engendra la **superficie lateral**. La **altura del cono** es el segmento perpendicular que va del vértice al plano de la base.

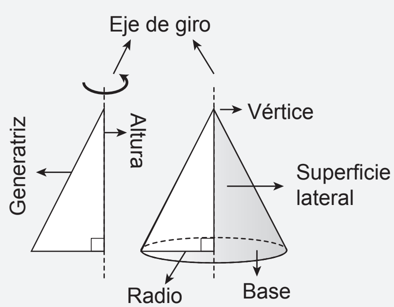


Figura 94.

Si bien las definiciones de cilindro y cono son más amplias en geometría elemental, ya que consideran los cilindros oblicuos y los conos oblicuos, para los propósitos de este libro las definiciones anteriores son suficientes.

Como en las pirámides, al cortar por toda la superficie lateral un cono circular con un plano horizontal, se obtiene un cuerpo redondo con dos bases.

Definición 7.23

Un **tronco de cono recto** es la porción de cono comprendida entre la base y un plano paralelo a ella que corte a toda la superficie lateral. La **altura del tronco** es un segmento perpendicular a los planos de las dos bases. El segmento resultante de generatriz del cono es la **generatriz del tronco**.

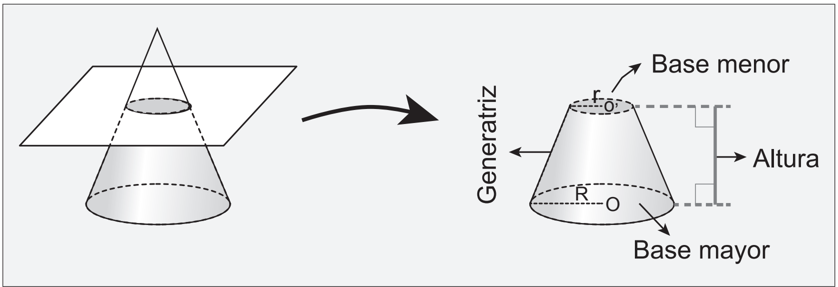


Figura 95.

□

REFERENCIAS

Baldor, A. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México: Cultural.

Clemens, S., et al. (1998). *Geometría*. México: Addison Wesley Longman.

Gómez, J., et al. (2003). *Matemáticas* (Vol. II). Sevilla: MAD.

Guevara, E. (2010). *Diseño Industrial. Conceptos para construcción de la forma*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Moise, E., y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna*. EE. UU.: Fondo Educativo Interamericano S. A.

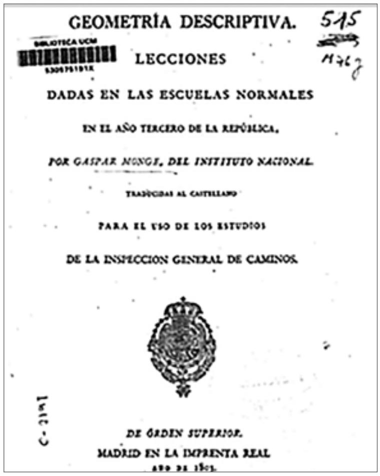
Swokowski, E., y Cole, J. (2006). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (11ª edición). México: Thomson.

Tsijli, T. (2006). *Geometría Euclídea II*. San José: Universidad Estatal a Distancia.

Unidad 1

Proyecciones

1.1. Conceptos básicos 61
1.2. Proyección de vista múltiple 66
1.3. Proyección isométrica 84
Referencias 98



GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

LECCIONES

DADAS EN LAS ESCUELAS NORMALES

EN EL AÑO TERCERO DE LA REPÚBLICA,

POR GASPAR MONGE, DEL INSTITUTO NACIONAL.

TRADUCIDAS AL CASTELLANO

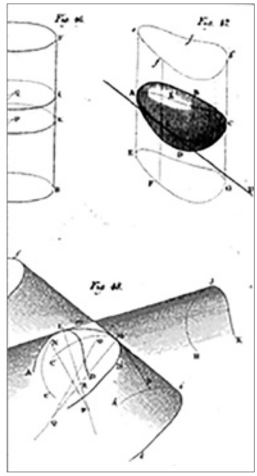
PARA EL USO DE LOS ESTUDIOS

DE LA INSPECCION GENERAL DE CAMINOS.

DE ÓRDEN SUPERIOR.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL

AÑO DE 1803.



Gaspar Monge (1746-1818). Matemático francés que se destacó por enlazar la ciencia teórica con diversas aplicaciones. Los métodos de la geometría descriptiva se basan en la comprensión del concepto de proyección ortogonal y del conocimiento de la relación entre las dos proyecciones ortogonales de la misma figura. Monge clarificó definitivamente los principios de conjunto que permiten construir la geometría descriptiva a partir de una técnica gráfica, así como desarrollar sus métodos y sugerir aplicaciones, razón por la que se le considera el creador de este tipo de geometría. Uno de sus libros, *Geometría descriptiva*, es la recopilación de las sesiones de las escuelas normales que realizó como profesor, y fue editado por primera vez en 1799, y por cuarta vez en 1820.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN 1.1.1

Una recta y un plano son **perpendiculares** si y solo si: 1) se intersecan; y 2) toda recta en el plano que pase por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada.

Cuando la recta l y el plano K son perpendiculares, lo denotamos por $l \perp K$ o $K \perp l$. Si P es el punto de intersección, entonces escribimos que $l \perp K$ en P.

DEFINICIÓN 1.1.2

La **distancia** a un plano desde un punto que no está situado en él, es la longitud del segmento perpendicular desde el punto al plano.

PROPIEDAD 1.1.1 (EL SEGUNDO TEOREMA DE LA MÍNIMA DISTANCIA)

El segmento más corto desde un punto a un plano que no lo contiene es el segmento perpendicular.

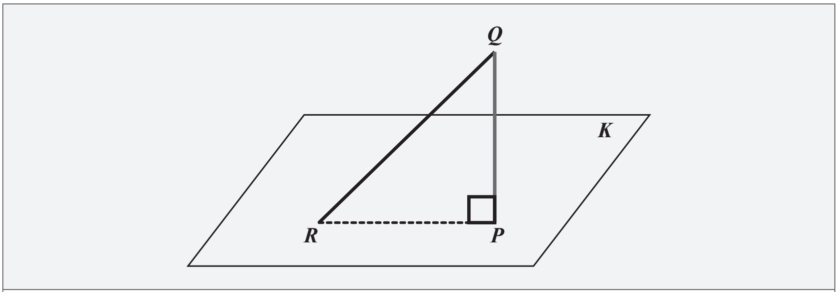


Figura 96. La distancia más corta del punto Q al plano K es la distancia PQ.

Definición 1.1.3

Dos planos, o un plano y una recta, son paralelos, si y solo si no se intersecan. Si los planos K y J son paralelos, escribimos $K \parallel J$. Si la recta l y el plano K son paralelos, escribimos $K \parallel J$ o $J \parallel K$.

El paralelismo en el espacio se comporta de manera parecida al paralelismo en el plano. Sin embargo, hay diferencias. Una de ellas es que no hay planos alabeados. Cada dos planos en el espacio o se intersecan, o son paralelos. Además, si dos rectas están en planos paralelos, no se puede deducir que las rectas sean paralelas, como lo muestra la representación de la izquierda de la figura 97. También, si dos rectas son paralelas, siempre podemos encontrar dos planos que las contienen y que no son paralelos, como lo muestra la representación de la derecha de la figura 97.

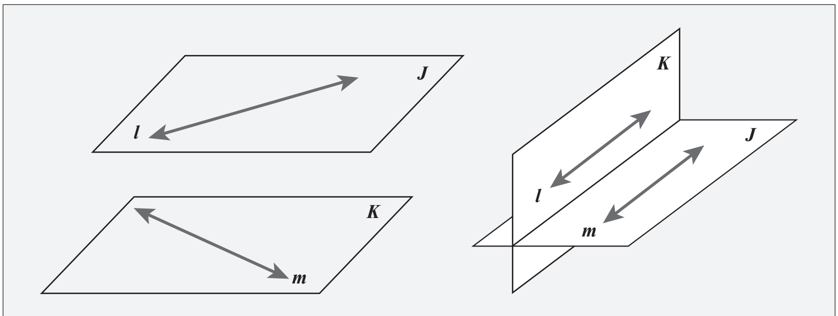


Figura 97.

Propiedad 1.1.2

Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas.

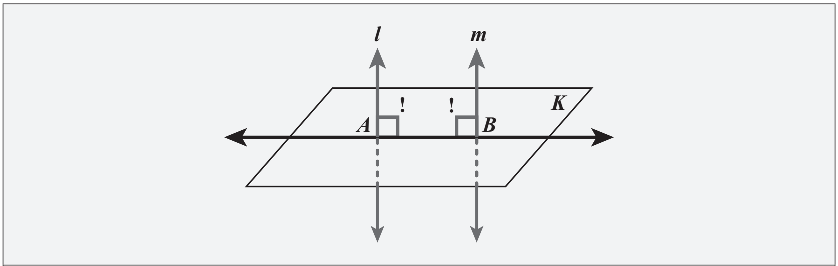


Figura 98. Si $l \perp K$ en A, y $m \perp K$ en B, entonces $l \parallel m$.

Propiedad 1.1.3

Dos planos paralelos equidistan en toda su extensión.

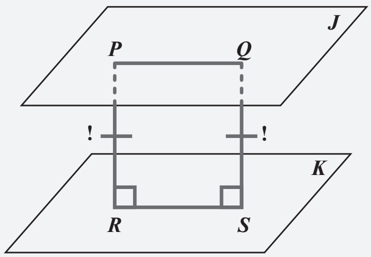


Figura 99. Si $J \parallel K$, entonces todos los puntos de J equidistan de K.

Definición 1.1.4

La **proyección** de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular que va del punto al plano.

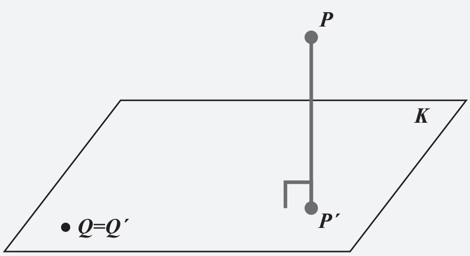


Figura 100. P' es la proyección del punto P sobre el plano K. Se admite la posibilidad de que el punto Q esté en K, en cuyo caso la proyección de Q es Q mismo.

Definición 1.1.5

La proyección de una recta sobre un plano es el conjunto de todos los puntos del plano que son proyecciones de los puntos de la recta.

En la representación a) de la figura 101, *P′* es la proyección de *P*, *Q′* es la proyección de *Q*, *R′* es la proyección de *R*, y así sucesivamente. La proyección de una recta sobre un plano siempre es una recta, excepto en el caso en el que la recta y el plano son perpendiculares, como lo muestra la representación b) de la figura 95. En esta representación, *A* es la proyección de todo punto *P* de la recta y, por tanto, *A* es la proyección de toda la recta. La "Propiedad 1.1.4" que se describe a continuación elimina esta posibilidad.

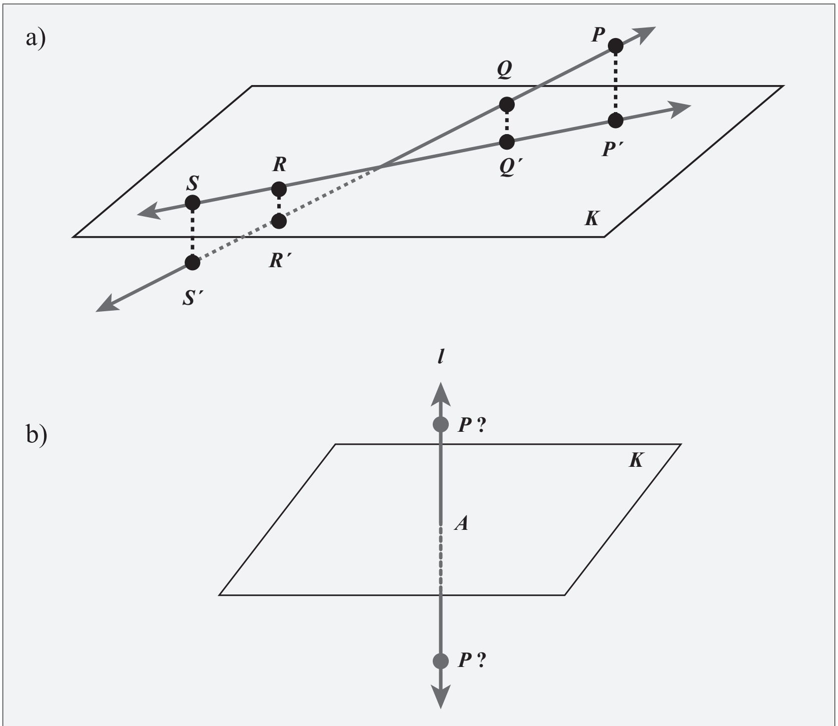


Figura 101.

Propiedad 1.1.4

> Si una recta y un plano no son perpendiculares, entonces la proyección de la recta sobre el plano es una recta.

La proyección se aplica en técnicas de dibujo con el fin de realizar las vistas de un objeto tridimensional. Usualmente, los bosquejos técnicos de sólidos se realizan en uno de los cuatro tipos de proyección:

- Proyección de vista múltiple.
- Proyección axonométrica (isométrica).
- Proyección oblicua.
- Bosquejos de perspectiva.

La proyección de vista múltiple la estudiamos en la próxima sección, y la proyección isométrica en la sección 1.3. La proyección oblicua y los bosquejos de perspectiva no son objeto de estudio en este texto.

□

1.2. PROYECCIÓN DE VISTA MÚLTIPLE

Para la descripción completa de la forma y el tamaño de un objeto en 3D, se utiliza cierta cantidad de vistas, y en 2D, ordenadas en forma sistemática. Este sistema de vistas es la proyección de vistas múltiples.

A continuación, se encuentran las definiciones que nos permitirán describir la proyección de vista múltiple.

DEFINICIÓN 1.2.1

El **plano de proyección** o **plano del cuadro** es el plano imaginario sobre el que se realizará el dibujo. Está localizado entre el ojo del observador y el objeto que se observa. La **línea de mirada** o **visual** es una línea perpendicular que va desde el ojo del observador hasta el plano de proyección. Estas líneas son paralelas. Los proyectores o rayos visuales son los rayos que se emiten desde el objeto y que son perpendiculares al plano de proyección, de manera que son paralelos hasta el infinito.

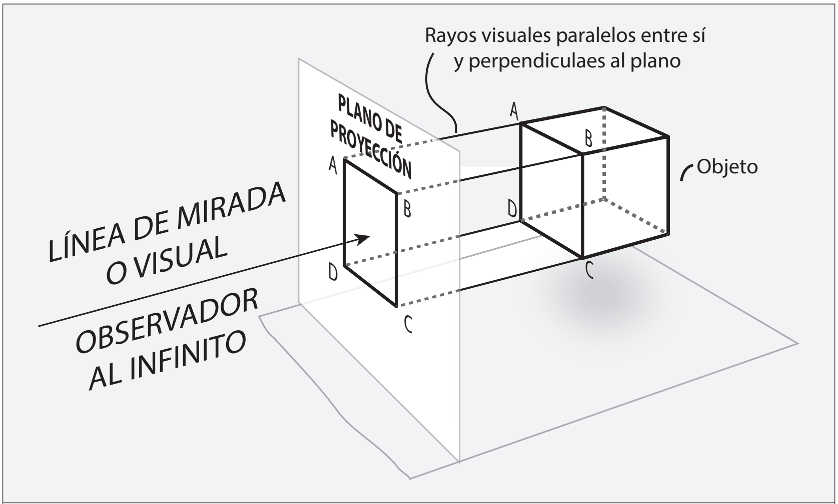


Figura 102. Tomado de Giesecke et al. (2006).

Para la aplicación de estas definiciones, se considera que el observador está situado a una distancia infinita del objeto (en teoría), de tal forma que los proyectores se vuelven paralelas y, por definición de proyección, son perpendiculares al plano de proyección. El conjunto de todas estas proyecciones, en el plano de proyección, es la imagen o el dibujo de las superficies proyectadas que se conoce como **vista ortográfica**, o simplemente **vista**. En la práctica, se usan dos o más vistas, en consecuencia, obtenemos la "Definición 1.2.2".

Definición 1.2.2

La **proyección ortográfica** u **ortogonal** es el método que representa la forma exacta de un objeto por medio de dos o más vistas sobre planos que forman ángulos rectos entre sí, obtenidas por la intersección de las perpendiculares trazadas desde el objeto sobre los planos.

Los planos que forman ángulos rectos, referidos en la definición anterior, son los siguientes distintos planos de proyección.

Definición 1.2.3

El **plano de proyección frontal** es el plano de proyección vertical que se sitúa de frente al objeto, y sobre el cual se obtiene la forma del objeto visto de frente

El **plano de proyección horizontal** es el plano de proyección situado horizontalmente sobre el objeto. Sobre este plano se obtiene la forma del objeto visto desde su parte superior (es perpendicular al plano de proyección frontal).

El **plano de proyección de perfil**, o **vertical segundo**, es el plano de proyección perpendicular a los dos primeros sobre el cual se obtiene la forma del objeto visto desde el costado derecho.

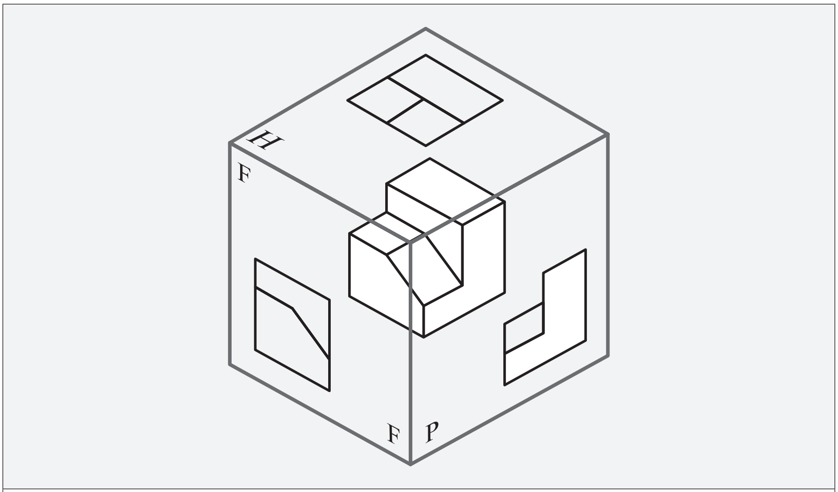


Figura 103. El plano de proyección frontal F, el plano de proyección horizontal H, y el plano de proyección de perfil P, son mutuamente perpendiculares. Esto es, $F \perp H \perp P$.

DEFINICIÓN 1.2.4

La **proyección de vistas múltiples** es un sistema de vistas en el cual cada vista proporciona una parte definida de toda la información. Está compuesto por las seis vistas estándar o principales:

- Vista frontal, elevación o alzado.
- Vista superior o planta.
- Vista izquierda o elevación izquierda.
- Vista derecha o elevación derecha.
- Vista inferior.
- Vista trasera, posterior o elevación trasera.

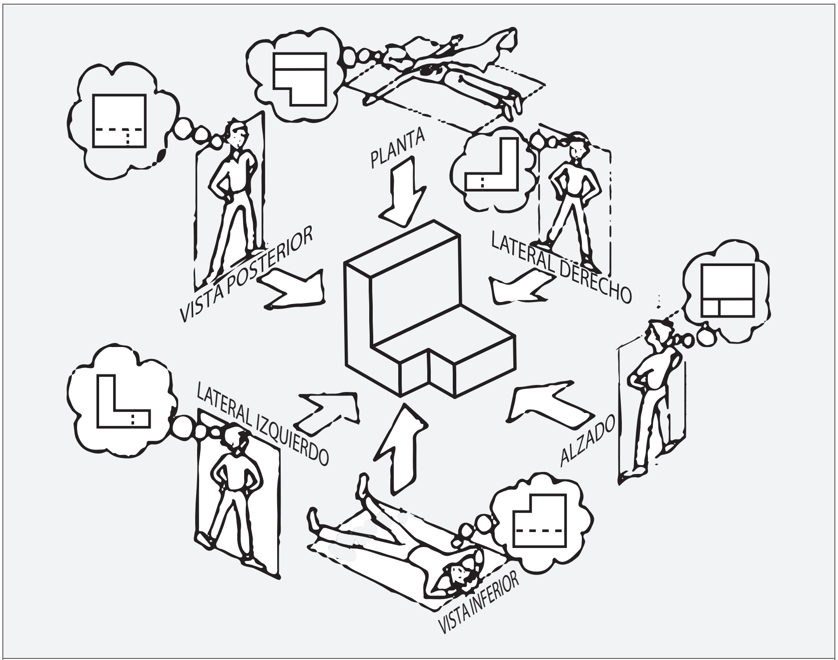


Figura 104. Las seis vistas de un objeto.

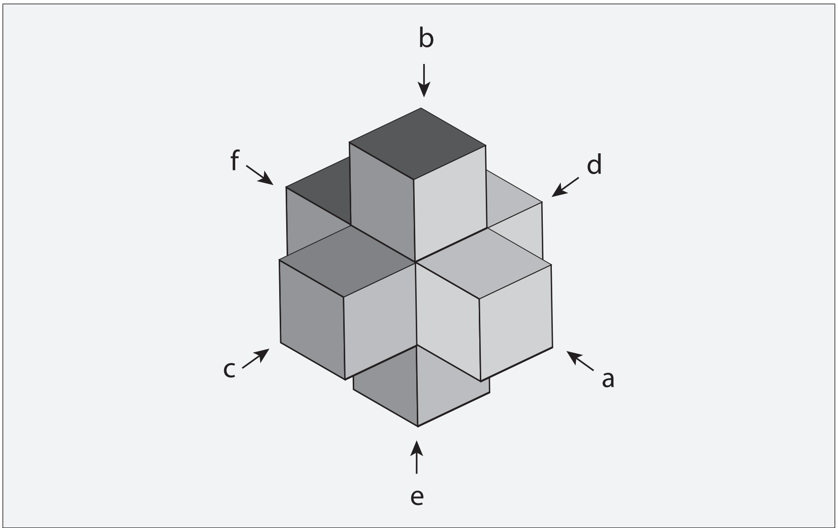


Figura 105. Letras asociadas a las direcciones de las seis vistas.

Tabla 7. Diseño de vistas

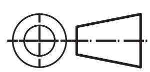
Dirección de observación		Diseño de la vista
Vista en la dirección	**Vista desde**	
a	El frente	A
b	Arriba	B
c	La izquierda	C
d	La derecha	D
e	Abajo	E
f	Atrás	F

Estas seis vistas tienen cuatro métodos de representación ortográfica: 1) Proyecciones de tercer ángulo; 2) Proyecciones de primer ángulo; 3) Plantilla de flechas de referencia (posiciona libremente las distintas vistas); 4) Representación ortográfica reflejada (se usa en construcción).

En este texto solo profundizaremos en los dos primeros.

1) Proyecciones de tercer ángulo

Se usa en Estados Unidos, Canadá, Latinoamérica y otros países. Se llama así porque sitúa el objeto en el tercer ángulo diedro. En este método, el objeto por representar y a ser visto por un observador aparece atrás de los planos visuales coordenados sobre los cuales se proyecta el objeto ortogonalmente. El objeto se representa en cada plano de proyección como si fuera visto en forma ortogonal desde el frente de cada plano. Su símbolo es:



Con relación a la vista principal *A*, las demás vistas se colocan de la siguiente manera:

- La vista superior o desde arriba (*B*), se coloca arriba de la frontal (*A*).

- La vista inferior o desde abajo (*E*), se coloca debajo de la frontal (*A*).

- La vista desde la izquierda (*C*), se coloca a la izquierda de la frontal (*A*).

- La vista desde la derecha (*D*), se coloca a la derecha de la frontal (*A*).

- La vista trasera, o desde atrás (*F*), se coloca a la izquierda o la derecha, según convenga.

Las letras *A* a *F* solo se usan para identificar las vistas cuando se emplea la proyección de tercer ángulo, y no deben aparecer en los dibujos de trabajo.

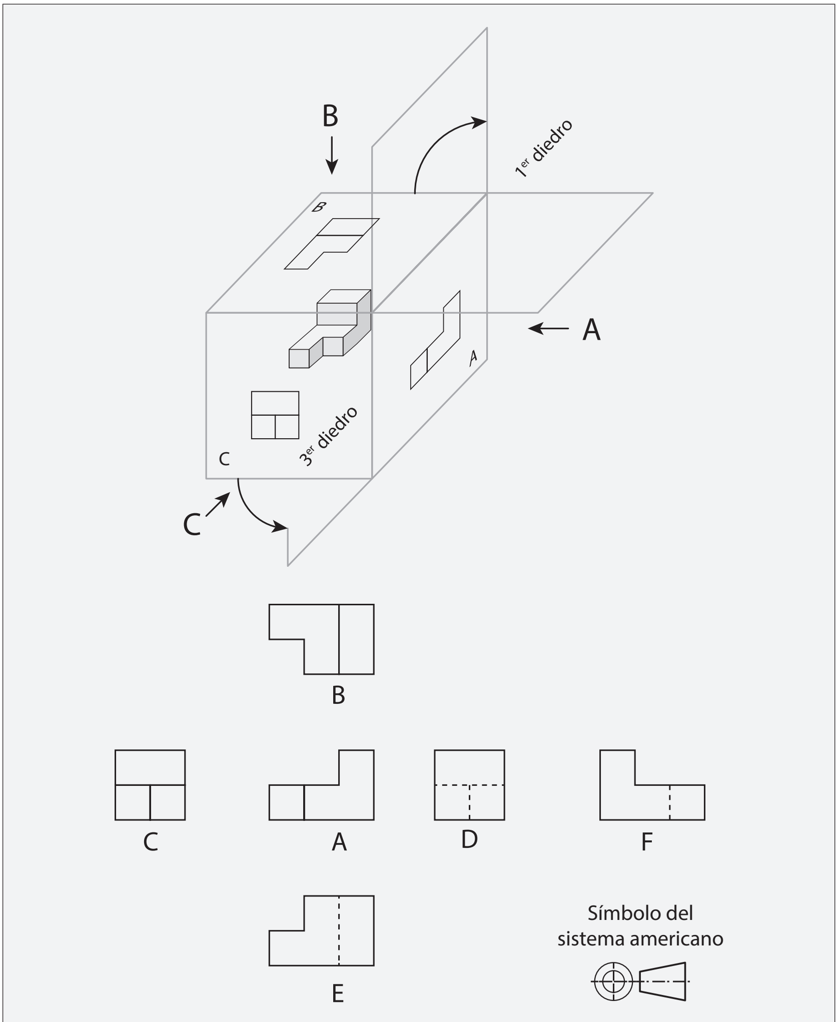


Figura 106. Disposición de las vistas en proyecciones de tercer ángulo. Tomado de Arrate et al. (2008).

Las figuras 107 y 108 muestran cómo las seis vistas se asocian a las caras de una caja, la cual se denomina **caja transparente** o **caja de cristal** y, al desplegarse, origina la disposición de las vistas del objeto.

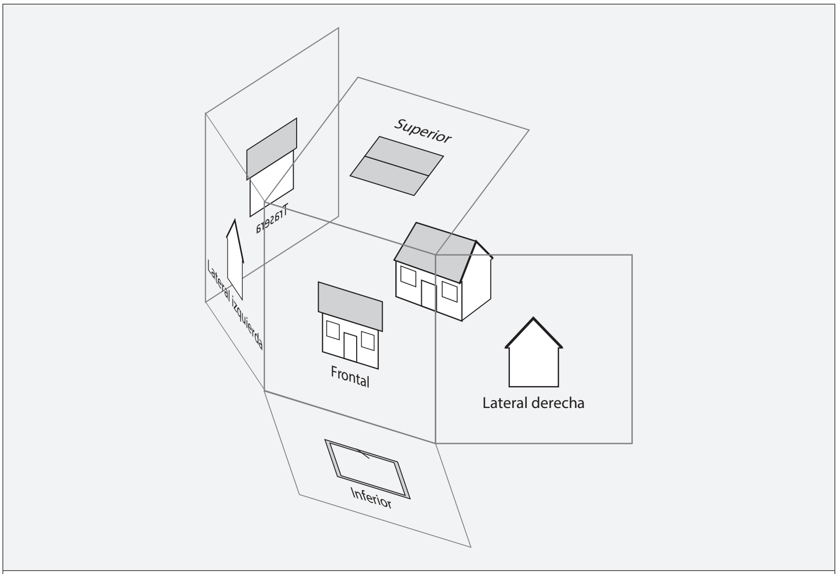


Figura 107.

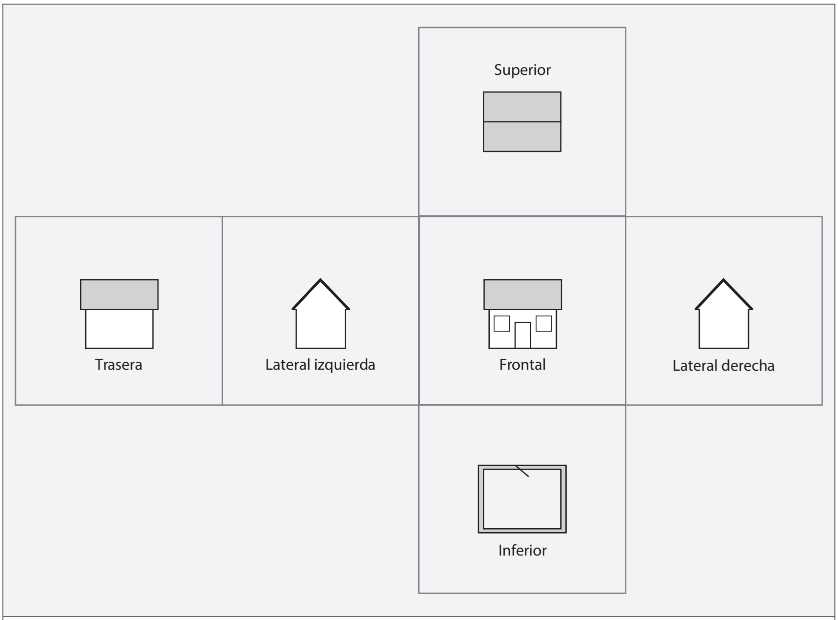
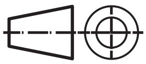


Figura 108.

2) Proyecciones de primer ángulo

Se usa en Europa y Asia. Se denomina así porque sitúa el objeto en el primer ángulo diedro. En este método, el objeto por representar aparece entre el observador y los planos visuales coordenados sobre los que se proyecta ortogonalmente el objeto. Su símbolo es:



Con relación a la vista principal *A*, las demás vistas se colocan de la siguiente manera:

- La vista superior o desde arriba (*B*), se coloca abajo de la frontal (*A*).
- La vista inferior o desde abajo (*E*), se coloca arriba de la frontal (*A*).
- La vista desde la izquierda (*C*), se coloca a la derecha de la frontal (*A*).
- La vista desde la derecha (*D*), se coloca a la izquierda de la frontal (*A*).
- La vista trasera, o desde atrás (*F*), se coloca a la izquierda o la derecha, según convenga.

Las letras *A* a *F* solo se usan para identificar las vistas cuando se emplea la proyección de primer ángulo, y no deben aparecer en los dibujos de trabajo.

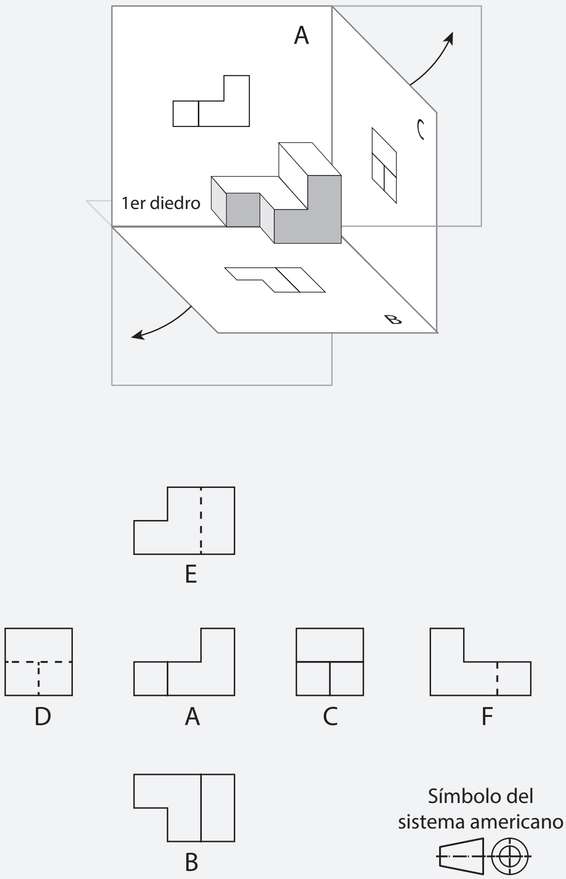
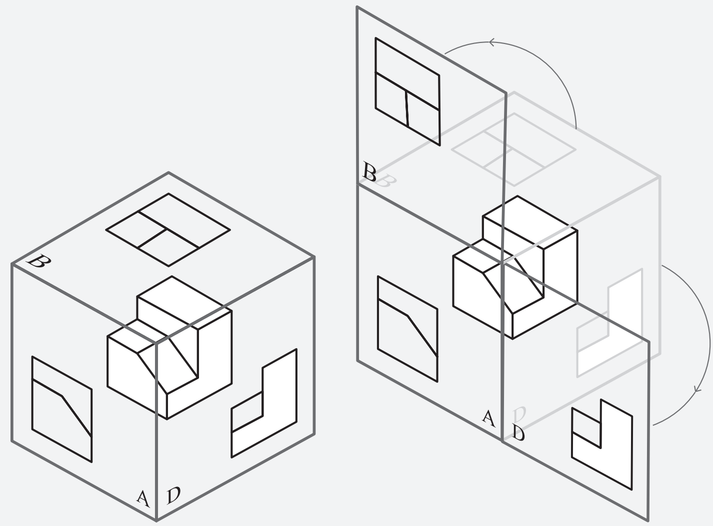


Figura 109. Disposición de las vistas en proyecciones de primer ángulo. Tomado de Arrate et al. (2008).

De las seis vistas de un objeto, usualmente se seleccionan tres: la superior, la frontal y la lateral derecha. No obstante, la selección depende de las que mejor describan los contornos dominantes del objeto, y de que tengan el menor número de detalles ocultos presentes.

La figura 110 ilustra el caso de las tres vistas: superior, frontal y latera derecha. A estas se les han asociado las tres caras visibles de un cubo que, al desplegarse, da la disposición de estas tres vistas en el método de proyección del tercer ángulo.



Los planos de proyección *B* y *D* rotan 90° respecto a las aristas de manera que forman con el plano de proyección *A* un solo plano

Figura 110.

Ejemplo 1.1

Dibuje las tres vistas (frontal, superior y lateral derecha) con el método de proyecciones del tercer ángulo de la pieza del cubo que se presenta en la figura 111.

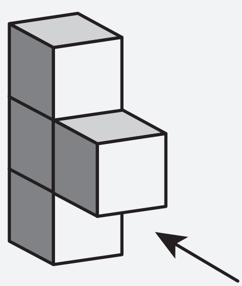


Figura 111. Cubo Soma (la flecha indica el frente).

Solución

Con el método de proyecciones del tercer ángulo, la vista superior va arriba de la vista frontal, y a la derecha de esta última, la vista lateral derecha, como lo muestra la figura 112.

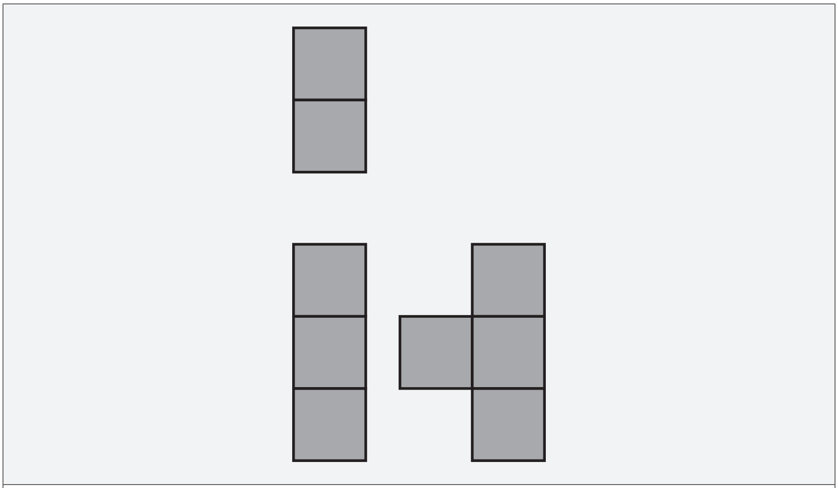


Figura 112.

Definición 1.2.5

Las **tres dimensiones principales** de un objeto son **anchura**, **altura** y **profundidad**. En dibujo técnico, estos términos se utilizan para las dimensiones mostradas en ciertas vistas, independientemente de la forma del objeto. Los términos **longitud** y **grosor** no se utilizan, ya que no pueden aplicarse en todos los casos.

Los objetos se definen y se miden por las tres dimensiones del espacio. No debemos confundir las dimensiones del espacio con las dimensiones del objeto. El objetivo de la proyección es mostrar la forma. El tamaño del objeto no se establece hasta que se acoten con números las dimensiones, o bien se indique la escala a la que se ha hecho el dibujo. Las dimensiones del espacio son solo las direcciones en que se miden las magnitudes del espacio tridimensional.

A continuación, se proporcionan las definiciones de estas tres dimensiones.

DEFINICIÓN 1.2.6

Altura es la distancia vertical entre el plano horizontal superior y el plano horizontal inferior. Las aristas del objeto pueden o no coincidir en dimensión con la altura. En la figura 113, la arista $\overline{AB}$ coincide con la dimensión de la altura, mientras que la arista $\overline{CD}$ no coincide con ella.

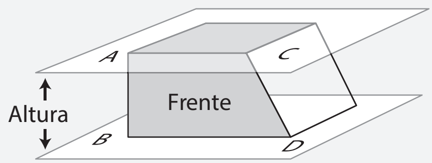


Figura 113. Altura. Tomado de French y Vierck (1997).

DEFINICIÓN 1.2.7

Anchura es la distancia, de izquierda a derecha, entre el plano de perfil derecho y el plano de perfil izquierdo. En la figura, la arista $\overline{EF}$ es paralela a la dirección de la anchura y coincide con su dimensión, pero la arista $\overline{GH}$ está inclinada hacia abajo desde G hasta H, por lo que $GH > EF$.

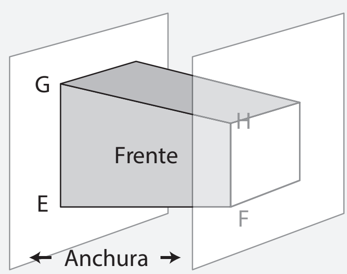


Figura 114. Anchura. Tomado de French y Vierck (1997).

Definición 1.2.8

Profundidad (en el sentido que se le da en ingeniería civil) es la distancia entre el plano frontal y el plano posterior. En la figura 115, la arista $\overline{JK}$ es paralela a la dirección de la profundidad y coincide con su dimensión, mientras que la arista *LM* no.

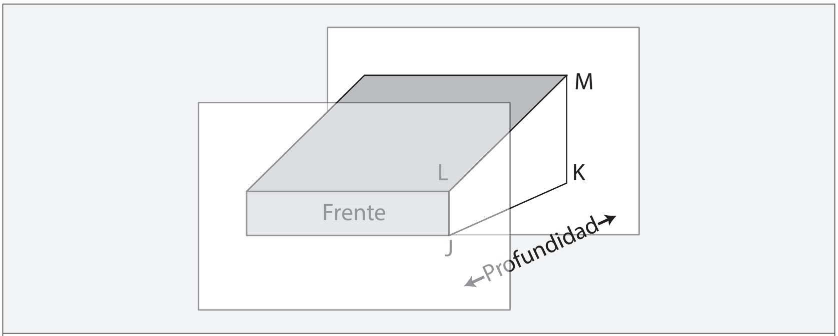


Figura 115. Profundidad. Tomado de French y Vierck (1997).

Cualquier vista estándar o principal de un objeto tridimensional muestra solo dos de las tres dimensiones principales:

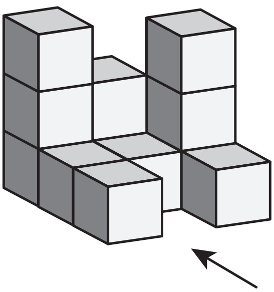
- La vista frontal: altura y anchura.
- La vista superior: anchura y profundidad.
- La vista izquierda: altura y profundidad.
- La vista derecha: altura y profundidad.
- La vista inferior: anchura y profundidad.
- La vista trasera: altura y anchura.

Un objeto puede o no tener aristas y caras paralelas o perpendiculares a los planos de proyección, según su forma y posición en el espacio. En este texto restringimos la forma de los objetos a poliedros con aristas y caras paralelas o perpendiculares a los planos de proyección, y orientados en el espacio de tal forma que esto suceda. Por consiguiente, las posiciones relativas de las aristas y las caras del objeto con respecto al plano de proyección son dos: paralelas y perpendiculares.

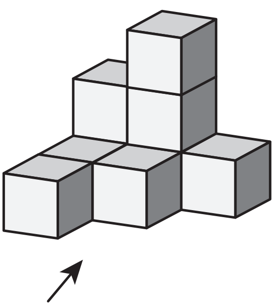
APLICACIONES 1.2

Realice las tres vistas (frontal, superior y lateral derecha) con el método de proyecciones del tercer ángulo, de los sólidos multicubos que se presentan a continuación. La flecha indica la dirección del frente:

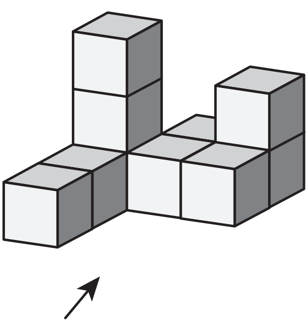
1.



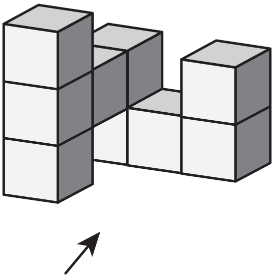
2.



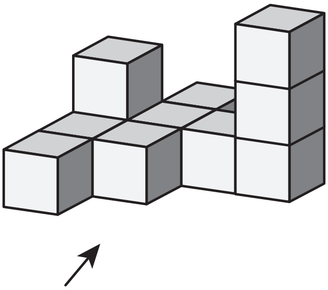
3.



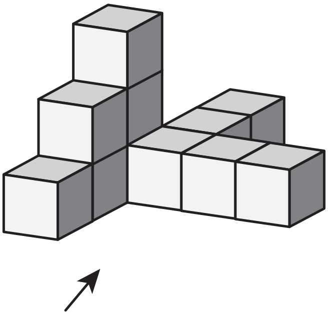
4.



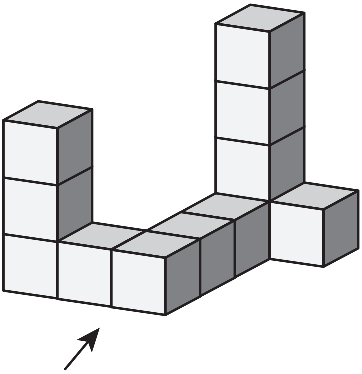
5.



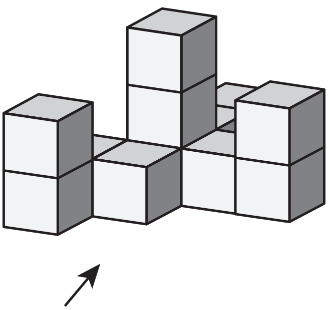
6.



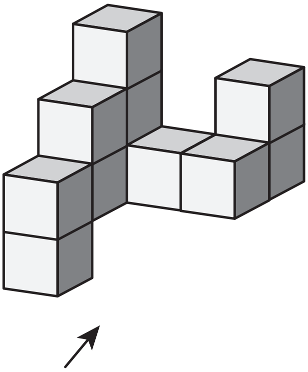
7.



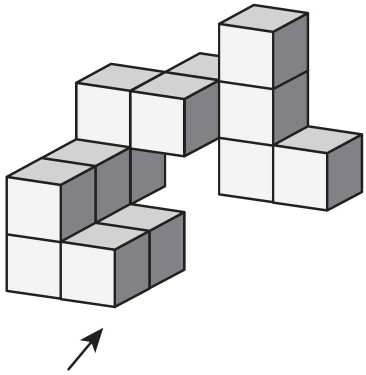
8.



9.



10.



1.3. PROYECCIÓN ISOMÉTRICA

Dado que una vista de un sólido muestra dos de las tres dimensiones, se hace necesario un dibujo que muestre las tres dimensiones a fin de complementar la información del sólido. La figura 116 muestra un resumen de la clasificación de las proyecciones.

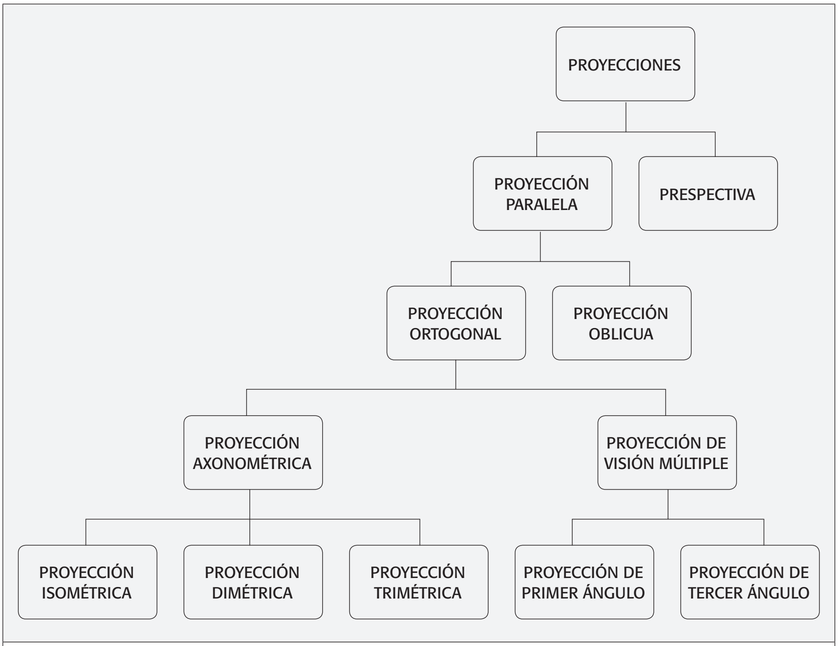


Figura 116. Clasificación de las proyecciones.

Tanto en la proyección de vistas múltiples —estudiadas en la sección "Proyección de vistas múltiples"—, como en la proyección axonométrica, los rayos visuales son paralelos entre sí y perpendiculares al plano de proyección. Por tal razón, ambas se clasifican como proyecciones ortogonales.

La característica esencial de la proyección axonométrica, comparada con la proyección de vistas múltiples, es que el objeto está inclinado respecto al plano de proyección, tal como lo muestra la figura 117.

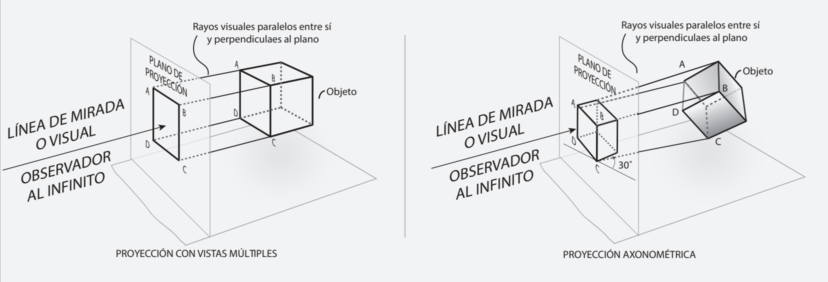


Figura 117. Tomado de Giesecke et al. (2006).

Como consecuencia de esta inclinación, las longitudes de las líneas, las medidas de los ángulos y las proporciones dependen de la orientación exacta que tiene el objeto respecto al plano de proyección. La figura 117 muestra las tres proyecciones axonométricas de un cubo: proyección isométrica, proyección dimétrica y proyección trimétrica.

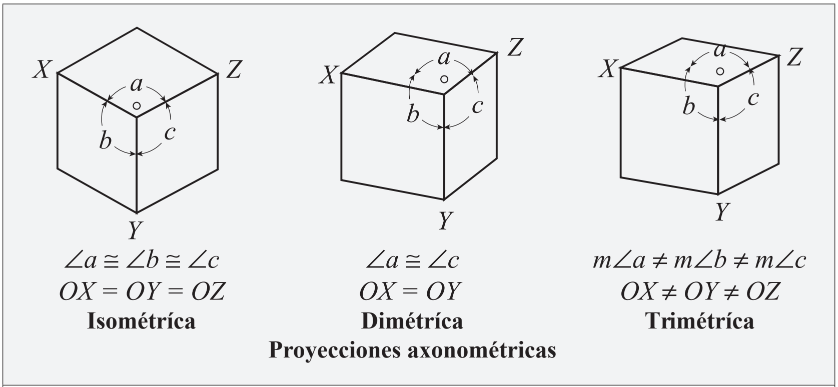


Figura 118.

De estas tres proyecciones axonométricas, solo consideraremos la isométrica. Dado que la palabra *isométrica* significa “medidas iguales”, obtenemos la Definición 13.1.

Definición 1.3.1

La proyección isométrica es un tipo de proyección axonométrica en la que las escalas de cada uno de los ejes son iguales. Por tal razón, las proyecciones de los ejes sobre el plano de proyección forman ángulos congruentes de 120°.

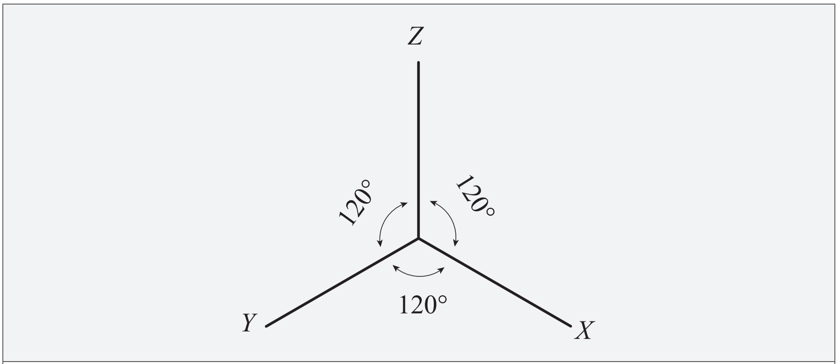


Figura 119.

Al realizar una proyección isométrica de un sólido, todas sus dimensiones principales se reducen de igual manera en la dirección de cada eje. Existen hojas para dibujar proyecciones isométricas, denominadas **papel punteado isométrico** y **papel isométrico**.

Ejemplo 1.2

A partir de las tres vistas con la proyección del tercer ángulo de una pieza del cubo Soma que se presenta en la figura 120, dibuje la proyección isométrica del sólido.

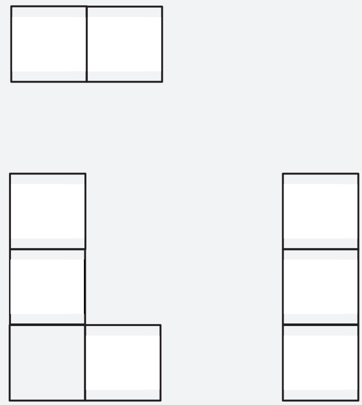


Figura 120.

Solución

La proyección isométrica de la pieza del cubo Soma, en papel isométrico se muestra en la figura 121.

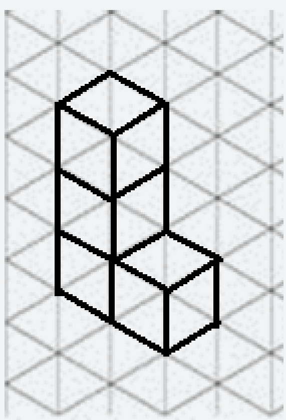
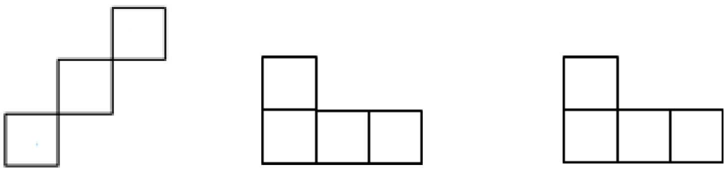


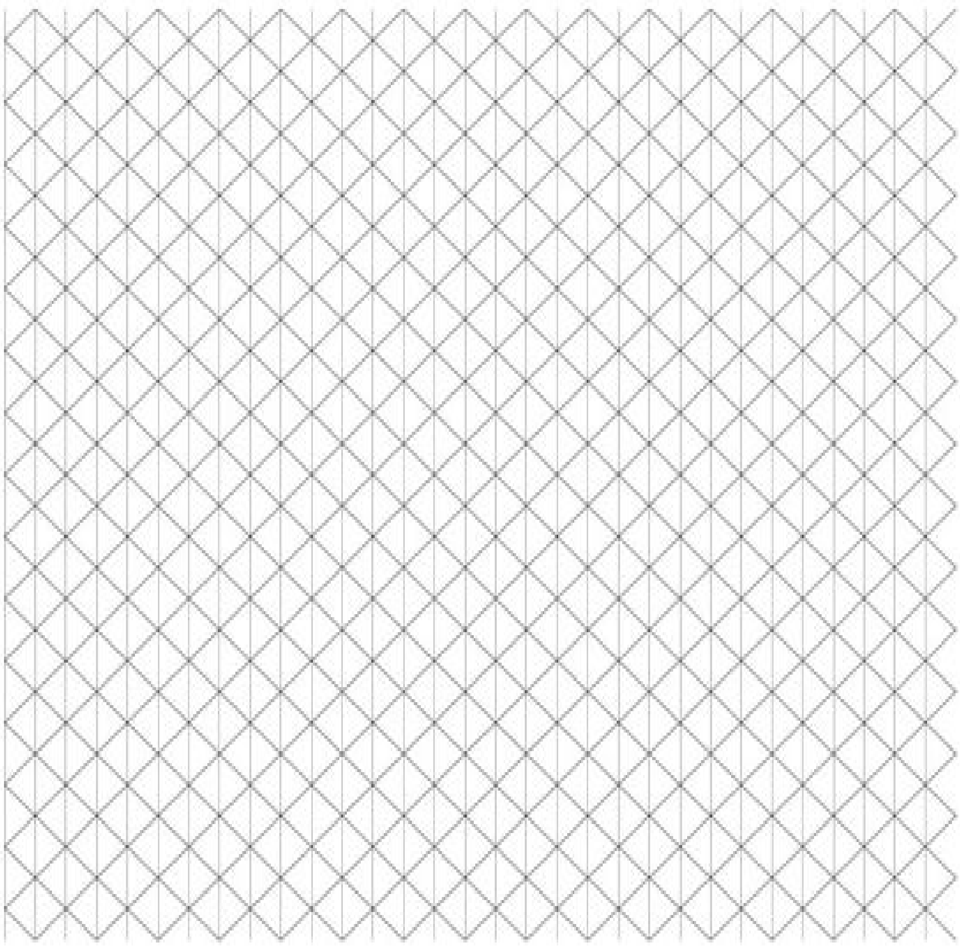
Figura 121. Proyección isométrica de la pieza del cubo Soma en papel isométrico.

APLICACIONES 1.3

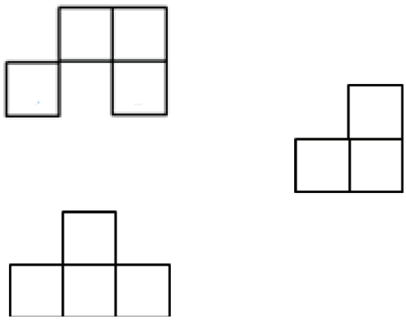
A partir de las tres vistas con la proyección del tercer ángulo, dibuje en el papel isométrico adjunto la proyección isométrica de cada sólido que se presenta a continuación.

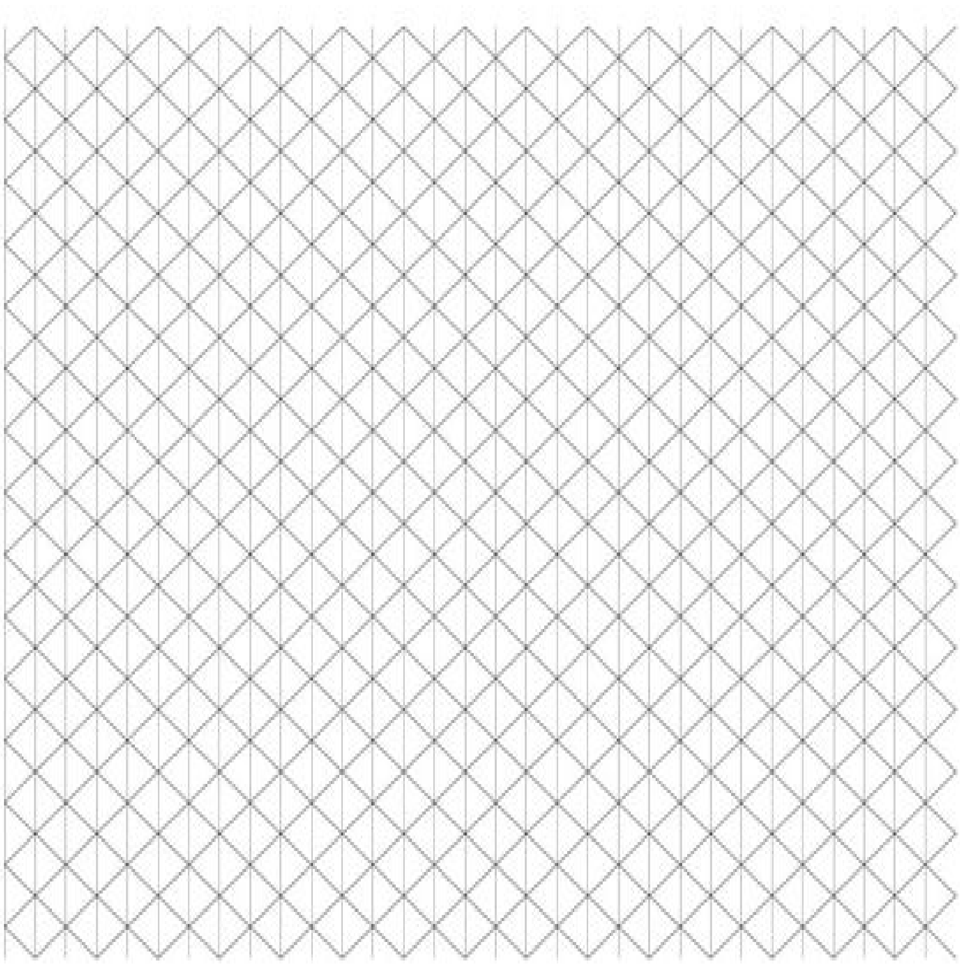
1.



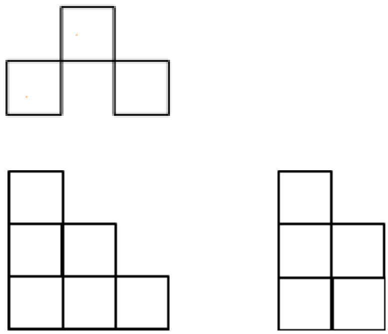


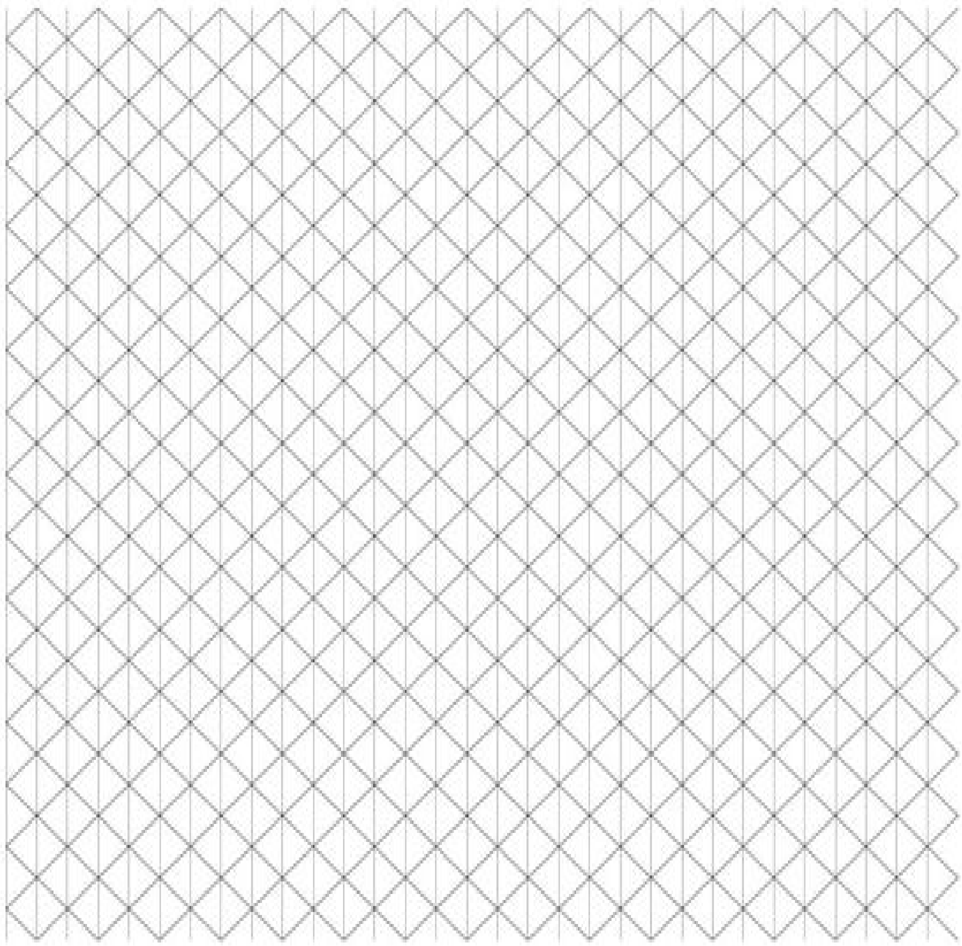
2.



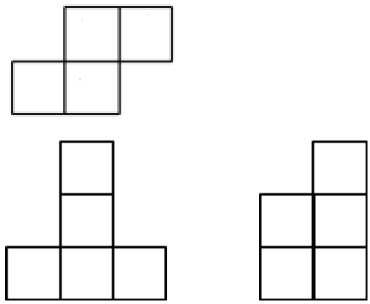


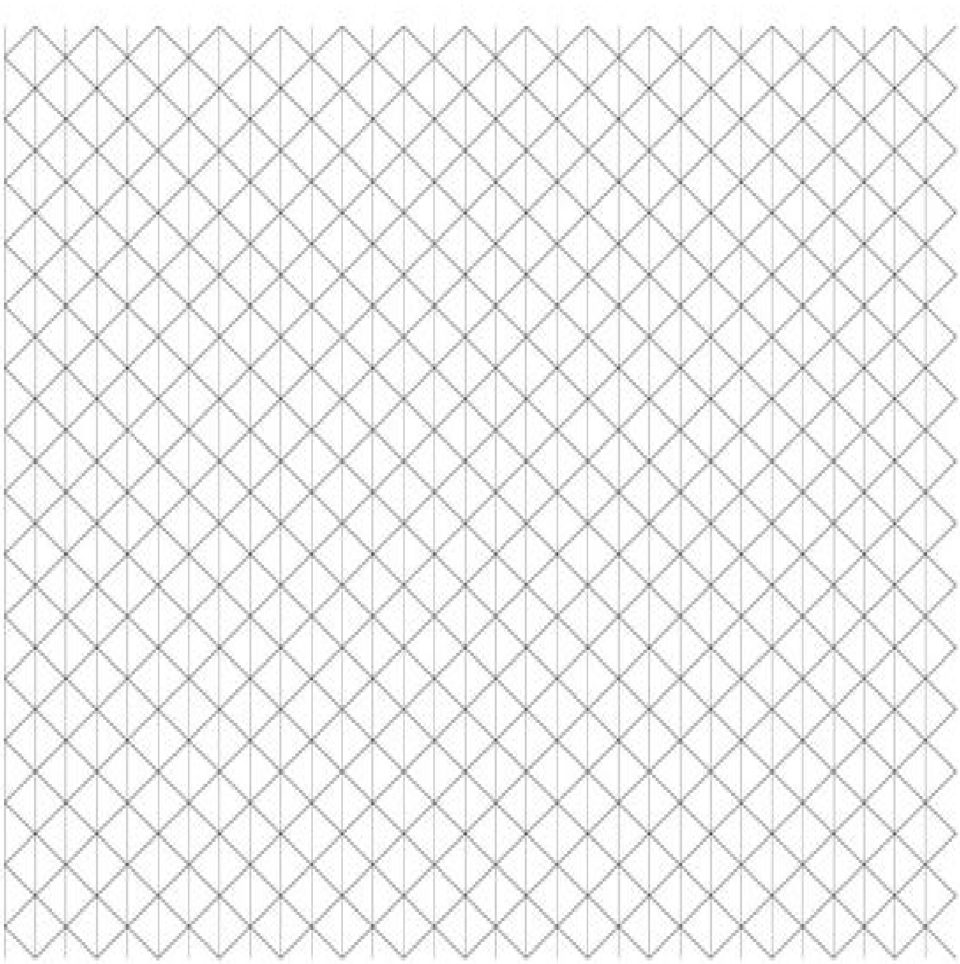
3.



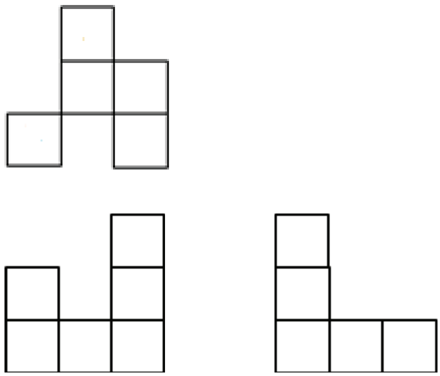


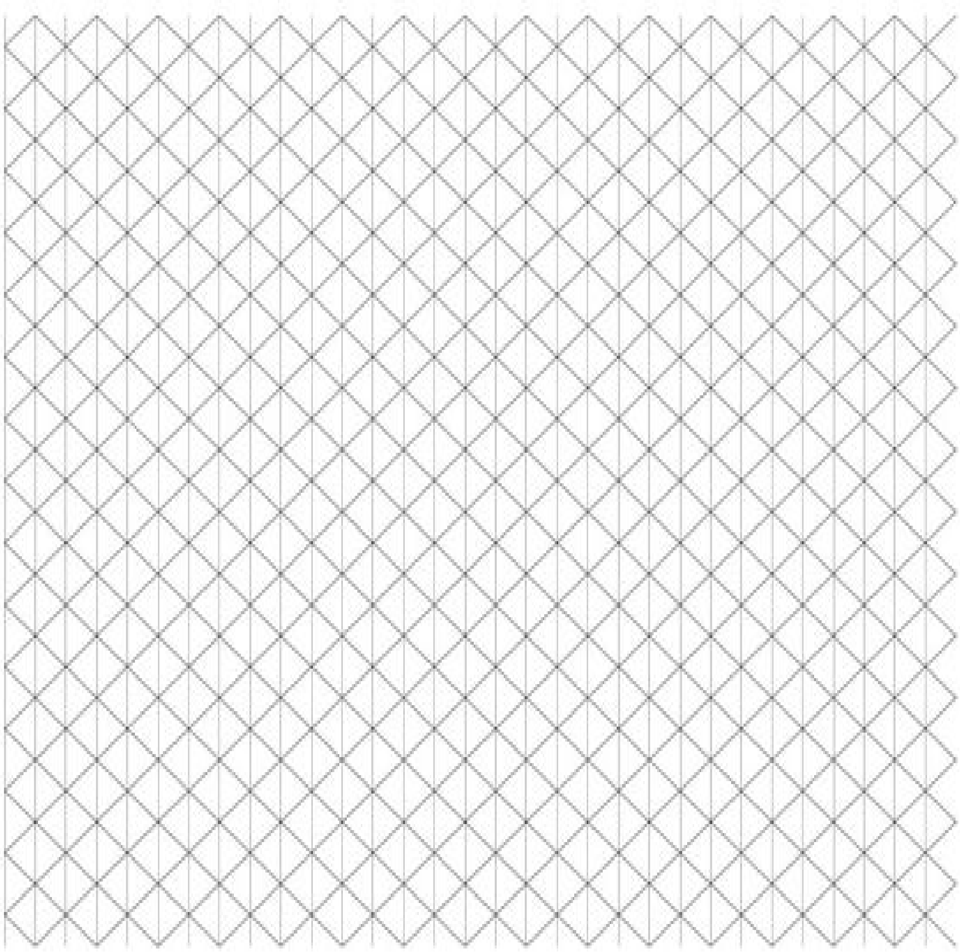
4.



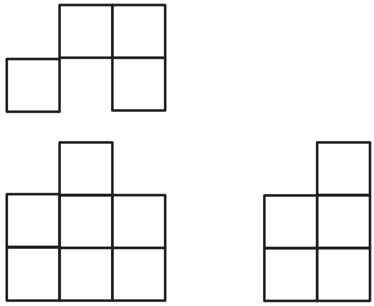


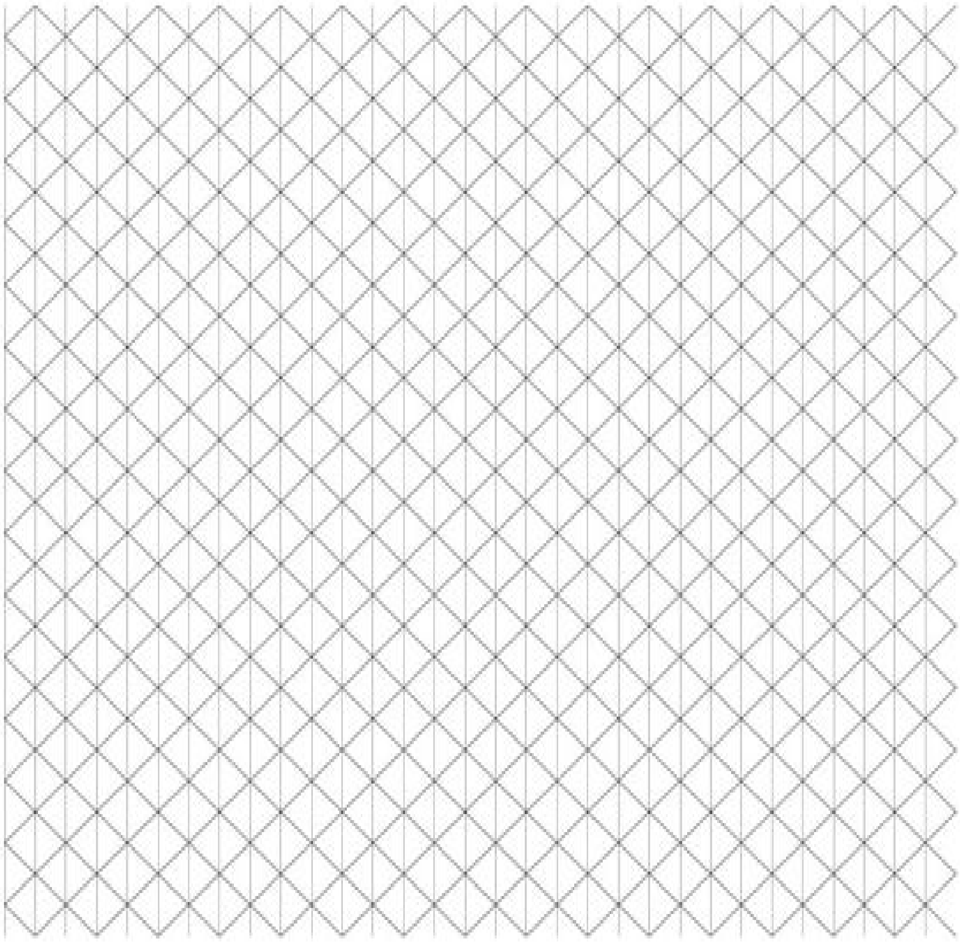
5.



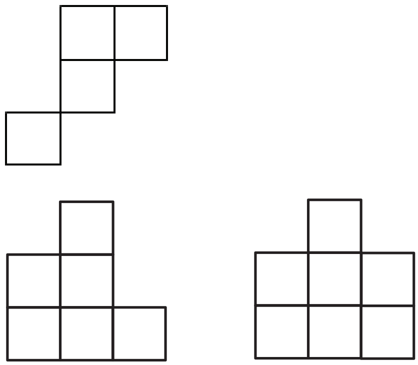


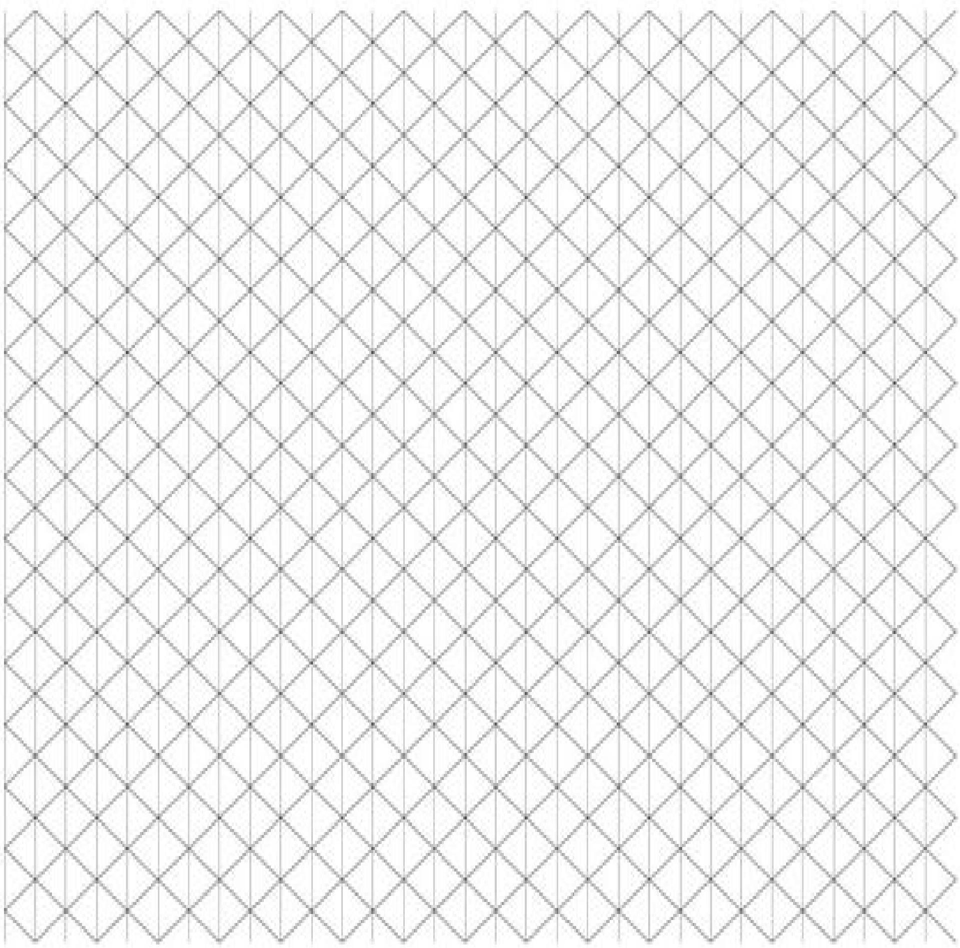
6.



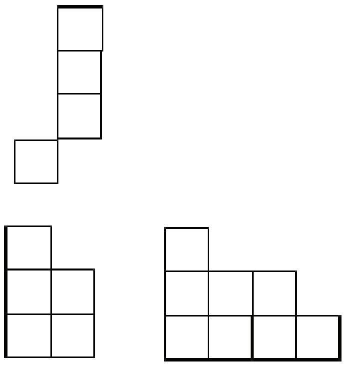


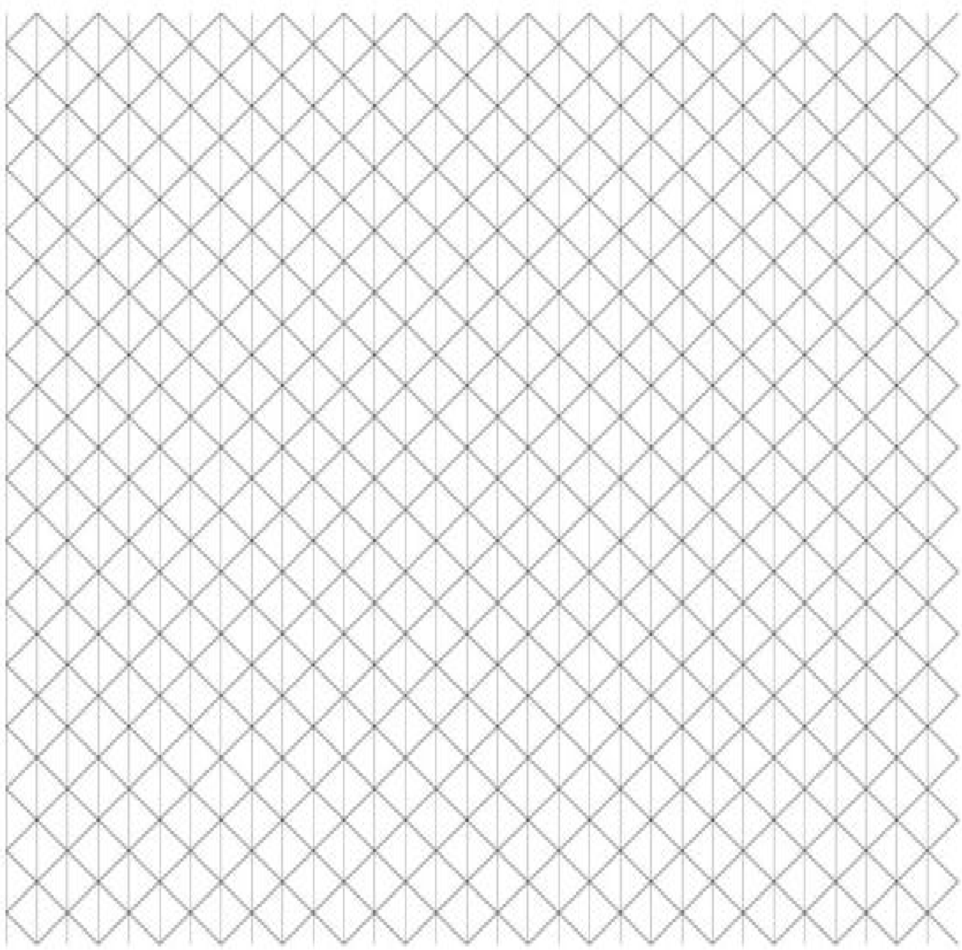
7.





8.





9. Dibuje en el papel isométrico la figura 122.

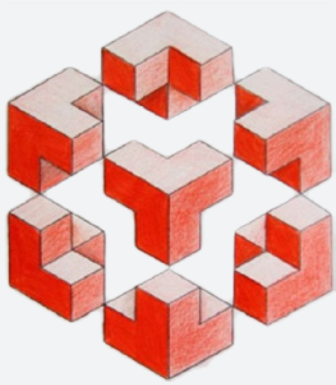


Figura 122. Tomado de https://es.slideshare.net/plasticabyla/sistema-axonomtrico-12562149.

10. Dibuje en el papel isométrico la figura 123.

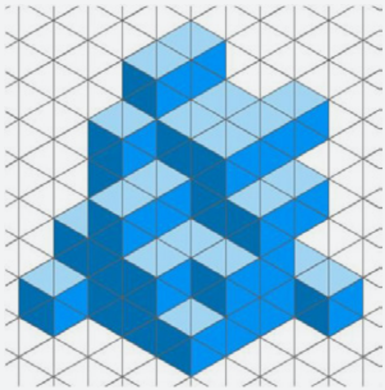
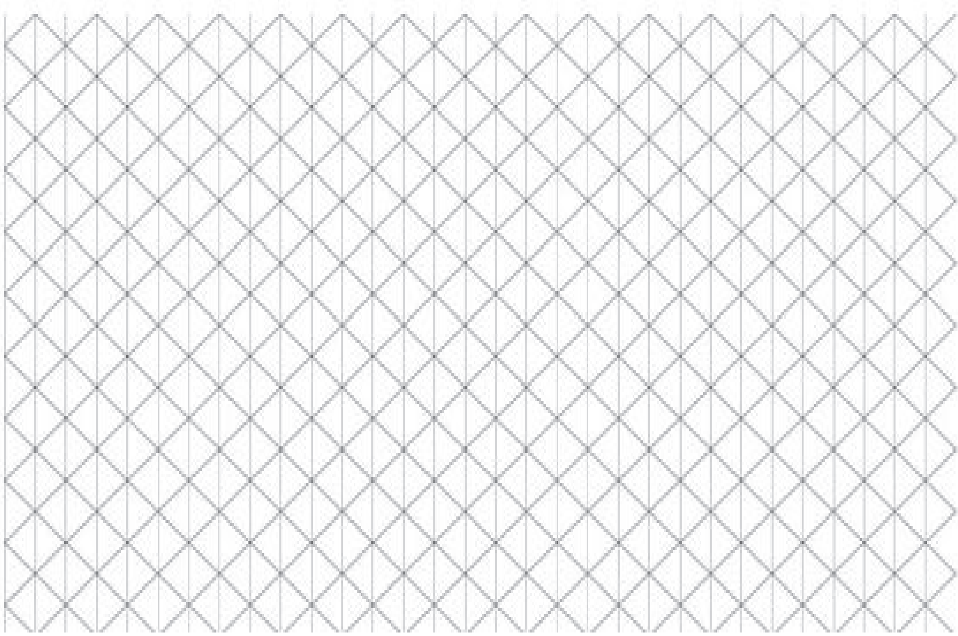


Figura 123. Tomado de https://laverdaderamagnitud.wordpress.com/tag/perspectiva-isometrica.



REFERENCIAS

Arrate, J., et al. (2008). *Dibujo técnico. 1º Bto*. Madrid: Editex S. A.

Baldor, A. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México: Cultural.

Clemens, S., et al. (1998). *Geometría*. México: Addison Wesley Longman.

Collette, J. (2003). *Historia de las matemáticas II* (6ª edición). México: Siglo Veintiuno.

French, T., y Vierck, Ch. (1997). *Dibujo de ingeniería* (3ª edición). México: McGraw-Hill.

Giesecke, M. et al. (2006). *Dibujo y comunicación gráfica*. (6ª edición). México: Pearson.

Jensen, C., y Helsel, J. (2007). *Interpreting Engineering Drawings* (7ª edición). Nueva York: Delmar, Cengage Learning.

Moise, E., y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna*. EE. UU.: Fondo Educativo Interamericano S. A.

Tsijli, T. (2006). *Geometría Euclídea II*. San José: Universidad Estatal a Distancia.

Unidad 2

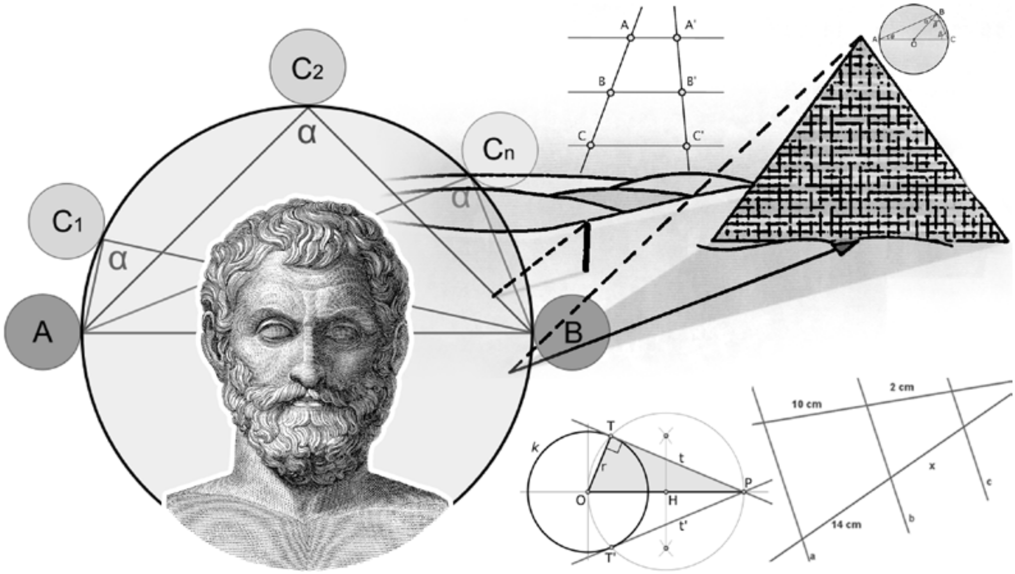
Proporciones

2.1. Proporción 101

2.2. La proporción áurea 112

Referencias 127

Reseña histórica



Thales de Mileto (640-547? a.C.). Primer geómetra griego, uno de los siete sabios de Grecia y fundador de la escuela Jónica. Fue el primero en predecir un eclipse; resolvió la determinación de distancias inaccesibles; estableció la congruencia de los ángulos en la base de un triángulo isósceles; la demostración de los teoremas conocidos que llevan su nombre, relativos a la proporcionalidad de las longitudes de los segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas; entre otras propiedades.

2.1. PROPORCIÓN

DEFINICIÓN 2.1.1

Sean a y b dos números reales, con $b \neq 0$. La **razón** de a a b es el número $\frac{a}{b}$. Usualmente se simboliza por $a : b$.

Una de las aplicaciones de la razón, en dibujo técnico, es la escala.

DEFINICIÓN 2.1.2

La **escala** indica la razón del tamaño del objeto dibujado respecto a su tamaño real, independientemente de la unidad de medición utilizada. Es decir:

$$Escala = \frac{Medida\ dibujo}{Medida\ real\ objeto}$$

En símbolos: $E = \frac{D}{R}$ o $E = D : R$

DEFINICIÓN 2.1.3

La **escala natural** o **escala 1:1** es la escala que se usa para dibujar un objeto con sus dimensiones reales.

Cuando se dibuja un objeto con dimensiones grandes y no se puede usar la escala natural, se usa una **escala reducida**, y por el contrario, cuando se dibuja un objeto con dimensiones pequeñas y no se puede usar la escala natural, se usa una **escala amplificada**.

Existen **escalas métricas** (la unidad lineal de medida para los dibujos mecánicos es el milímetro), y **escalas del sistema inglés**, divididas en pulgadas y en pies. En este texto utilizaremos la escala métrica.

El tamaño de una circunferencia se especifica ordinariamente por su diámetro, sin embargo, para dibujarla lo que necesitamos es su radio. Lo que hay que tener en cuenta al dibujar a escala es pensar y hablar de cada dimensión en su tamaño natural, y no en su tamaño reducido (o amplificado), el cual ha tomado en el papel. Esto evita confusión entre el tamaño real y el representado.

La tabla 8 muestra los distintos tipos de escala métricas (ampliadas y reducidas).

Tabla 8. Escalas métricas

Ampliada	Natural	Reducida
1000 : 1	1 : 1	1 : 2
500 : 1		1 : 5
200 : 1		1 : 10
100 : 1		1 : 20
50 : 1		1 : 50
20 : 1		1 : 50
10 : 1		1 : 100
5 : 1		1 : 200
2 : 1		1 : 1000

DEFINICIÓN 2.1.4

Una **proporción** es la igualdad de dos razones. En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$. La proporción anterior se lee: "a es a b como c es a d. Así, a, b, c y d son, respectivamente, el 1º, 2º, 3º y 4º términos de la proporción. Los números a y d reciben el nombre de **extremos**, y los números b y c, medios.

Propiedad 2.1.1

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.

Propiedad 2.1.2

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Propiedad 2.1.3

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Propiedad 2.1.4

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

Ejemplo 2.1

El empaque de la figura 124 tiene la forma de un prisma hexagonal recto, en el que la arista de la base mide 4 cm y la altura 11 cm. Dibuje el molde plano del empaque con la escala 1:2.

Figura 124.

Solución

Sea h la altura real, a_b la arista de la base real, h' la altura del prisma en el dibujo, y a'_b la arista de la base en el dibujo. Luego $h = 11$ cm, y $a_b = 4$ cm. Entonces, por definición de escala, para la altura h':

$$\frac{1}{2} = \frac{h'}{11\ cm}$$

Por la "Propiedad 1" del apartado "Proporción":

$$2h' = 11cm$$

Despejando h':

$$h' = \frac{11cm}{2} \quad \rightarrow \quad h' = 5{,}5cm$$

Y para la arista de la base a'_b, por definición de escala:

$$\frac{1}{2} = \frac{a'_b}{4\,cm}$$

Por la "Propiedad 2.1.1" del apartado "Proporción":

$$2a'_b = 4\ cm$$

Despejando a'_b:

$$a'_b = \frac{4\ cm}{2} \quad \rightarrow \quad a'_b = 2\ cm$$

A fin de establecer la medida del ángulo interno del hexágono, aplicamos la fórmula de la "Propiedad 8" del apartado "Polígonos" con $n = 6$:

Por lo tanto, el molde plano del empaque es el que se muestra en la figura 125.

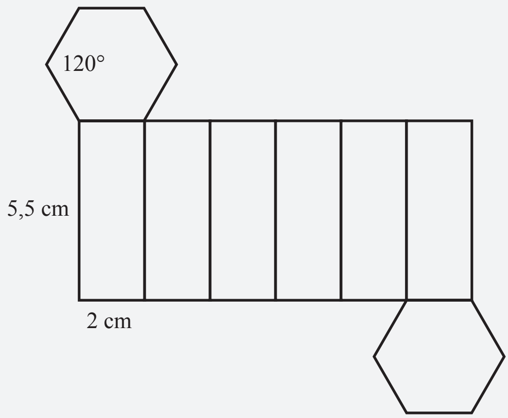
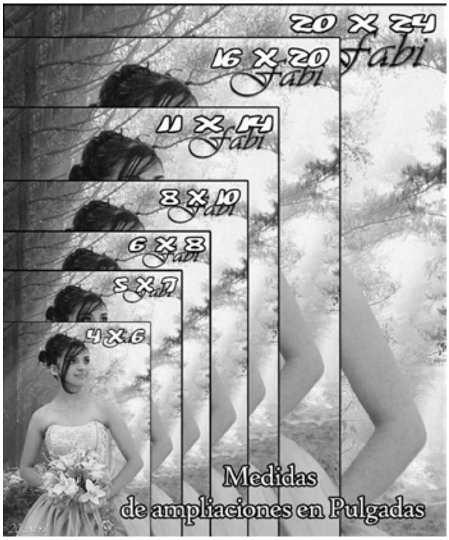


Figura 125.

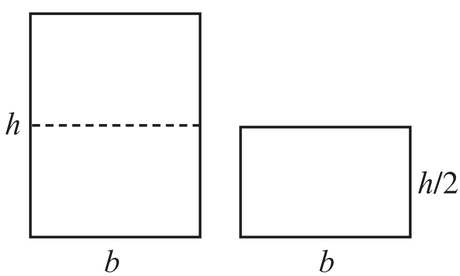
APLICACIONES 2.1

1. En diseño gráfico es indispensable que las letras sean legibles a determinadas distancias. Para ello, el tamaño que debe tener una letra mayúscula debe ser de 2,5 cm para que sea legible a una distancia de 7,5 metros. Sí por cada 7,5 metros que nos alejamos, la altura de la letra mayúscula debe aumentar 2,5 centímetros, a una distancia de 30 metros, ¿qué altura debe tener la letra mayúscula?

2. Los tamaños de las fotos que indica la figura de abajo, están en pulgadas. ¿Son proporcionales? ¿Qué implicaciones tiene para la reducción o ampliación?, ¿por qué? ¿Cuál debe ser la altura del tamaño para que sea proporcional al tamaño? Escriba las operaciones efectuadas.



3. Se tiene una hoja de base *b* y altura *h*, que se divide por la mitad como lo muestra la figura. Así, entonces: a) deduzca la relación que debe haber entre *b* y *h* para que la hoja más pequeña tenga las mismas proporciones que la original; b) dado que la base *b* de la hoja original (*A*0) es la altura de la hoja pequeña (*A*0) y la base de *A*1 es la mitad de *A*0, aplique la relación obtenida en el ejercicio a) para $b = 84{,}1$ cm y $h = 118{,}9$ cm, con el fin de verificar dicha relación; y c) si *A*2 es la hoja que se obtiene de dividir por la mitad *A*1, como se hizo con *A*0; y *A*3 se obtiene de dividir *A*2, y así sucesivamente, calcule las dimensiones de *A*2, *A*3, *A*4, *A*5 y *A*6. A estos tamaños se le conoce como serie *A*.



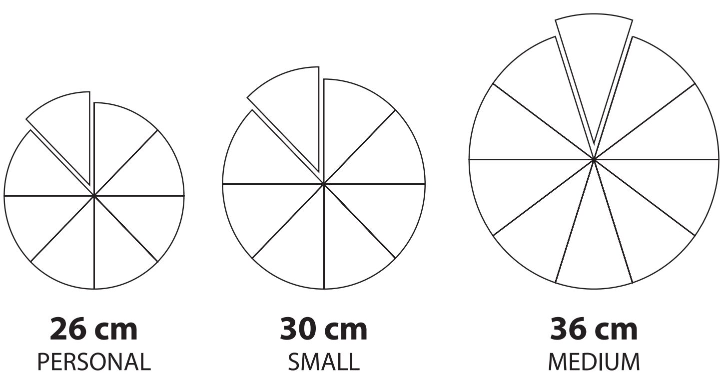
4. Repita el problema anterior para una hoja $B0$ con ancho de 100 cm y altura de 141,4 cm. A estos tamaños se les conoce como serie B.

5. Los sobres vienen en tamaños que se obtienen de la misma forma que en el problema 1, a partir de $C0$ con ancho de 91,7 cm y altura de 129,7 cm. Obtenga los tamaños de los sobres del $C0$ al $C10$.

6. La serie B japonesa (definida como Japan Industrial Standard B: JIS B) parte de $B0$, cuyas dimensiones son (103 × 145,6) cm. Obtenga los tamaños del $B1$ al $B10$, aplicando la razón encontrada en el problema 3.

7. Un local vende cajas para pizza. Tres de sus tamaños son (40 × 40), (30 × 30) y (25 × 25) en cm. Realice un dibujo para los tamaños de las cajas de tal forma que las dimensiones de los cuadrados de los dibujos sean proporcionales a las dimensiones dadas de las cajas. Especifique la escala aplicada.

8. Una pizzería tiene un comercial acerca del tamaño de sus pizzas, como lo muestra la figura. Haga un dibujo para un volante publicitario de tal forma que las dimensiones de las pizzas en el dibujo sean proporcionales a las dimensiones de las pizzas. Especifique la escala aplicada.



9. La siguiente tabla muestra los tamaños, los diámetros y las porciones de algunas pizzas:

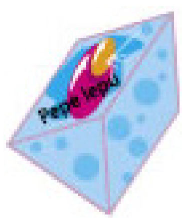
Tamaño	Diámetro	Porciones
Familiar	40 cm	12
Mediana	28 cm	8
Pequeña	22 cm	6

Realice un dibujo para un volante publicitario de tal forma que las dimensiones de las pizzas en el dibujo sean proporcionales a las dimensiones de las pizzas. Especifique la escala aplicada.

10. La siguiente tabla muestra los tamaños, los diámetros y las porciones de algunas pizzas:

Tamaño	Diámetro	Porciones
Personal	20 cm	4
Pequeña	25 cm	6
Mediana	32 cm	8

Realice un dibujo para un volante publicitario de tal forma que las dimensiones de las pizzas en el dibujo sean proporcionales a las dimensiones de las pizzas. Especifique la escala aplicada.



11. Dibuje el molde plano, correspondiente al prisma triangular recto, en la escala 2:1, si la arista lateral del prisma mide 4 cm y la arista de la base 2 cm.

12. En un prisma pentagonal recto, la arista lateral mide 12 cm y la arista de la base mide 6 cm. Dibuje el molde plano del prisma con la escala 1:2. (Sugerencia: aplique la “Propiedad 5.8” del apartado “Polígonos”).

13. Un empaque tiene la forma de un prisma hexagonal recto. La altura mide 15 cm y la arista de la base mide 6 cm. Realice el molde plano del empaque a escala 1:3. (Sugerencia: aplique la “Propiedad 5. 8” del apartado “Polígonos”).

14. Un empaque para servilletas tiene la forma de una pirámide cuadrangular regular. La arista de la base mide 12 cm y la apotema (altura inclinada) mide 16 cm. Realice el molde plano de la pirámide a escala 1:4.

15. Un empaque para dulces tiene la forma de una pirámide hexagonal regular. Si la apotema de la pirámide mide 12 cm y la arista de la base mide 4 cm, dibuje el molde plano de la pirámide con una escala adecuada. (Sugerencia: aplique la "Propiedad 5.8" del apartado "Polígonos").

16. Un empaque para chocolates tiene la forma de un tronco de pirámide cuadrangular regular. La arista de la base menor mide 5 cm; la arista de la base mayor, 9 cm, y la apotema del tronco, 13 cm. Realice el molde plano del tronco de pirámide a escala 1:2.

17. Un empaque para chocolates tiene la forma de un tronco de pirámide cuadrangular regular. La arista de la base mayor mide 9 cm; la arista de la base menor, 6 cm, y la apotema del tronco, 15 cm. Realice el molde plano del tronco de pirámide con la escala 1:3.

18. Se tiene un empaque para chocolates con forma de tronco de pirámide cuadrangular regular, la arista de la base mayor mide 7 cm, la de la base menor mide 6 cm y la apotema es de 9 cm. Si el empaque tiene para cada tapa el equivalente a tres bases respectivas, realice el molde plano del empaque sin tener en cuenta las pestañas y el corazón de arriba con la escala 1:2.

2.2. LA PROPORCIÓN ÁUREA

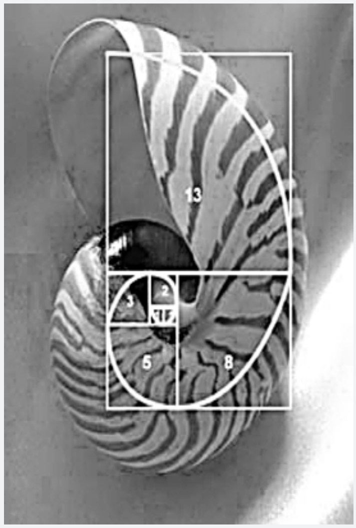


Figura 126.

En la naturaleza existen proporciones que han sido copiadas por el ser humano para aplicarlas en la modelación de construcciones. Una de ellas es el patrón de crecimiento de la concha donde habita el caracol del nautilo (véase la figura 126). Tal como se muestra en la figura 126, la espiral que describe la concha se construye a partir de los cuadrados de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 8 cm y 13 cm de lado, respectivamente. La razón del lado del cuadrado más grande al lado del cuadrado inmediatamente anterior, $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, se aproxima a un número:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2\,cm}{1\,cm} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{3\,cm}{2\,cm} = 1{,}5$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{5\,cm}{3\,cm} = 1,\overline{6}$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{8\,cm}{5\,cm} = 1,6$$

$$\frac{a_6}{a_5} = \frac{13\,cm}{8\,cm} = 1,625$$

Suponiendo que el patrón de crecimiento continúa, esto es, que cada número de la sucesión se obtiene a partir de la suma de los dos términos anteriores, las razones son:

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{21\,cm}{13\,cm} = 1,615384615$$

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{34\,cm}{21\,cm} = 1,619047619$$

La razón obtenida a medida que se sigue, se aproxima al número conocido como la proporción áurea o sección dorada. Este número, representado por la letra griega minúscula *fi* (en honor al escultor Fidias), tiene un valor aproximado con nueve dígitos decimales: 1,618033989. Este número fue usado por los griegos, como, por ejemplo, por Pitágoras (580-500 a. C.) en el símbolo de su escuela pitagórica (el pentagrama), así como por el arquitecto, pintor y escultor ateniense Fidias (490-431 a. C.) quien la aplicó en la construcción del Partenón, como lo muestra la figura 127, aunque existe controversia porque algunos autores afirman que no hay evidencia de su uso en la antigüedad.

Figura 127.

En el Partenón de Atenas, según algunos autores, se tiene que

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}=\phi$$

DEFINICIÓN 2.2.1

La **proporción áurea** o **sección dorada** es el número irracional

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618033989$$

La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …, es la sucesión de Fibonacci, apodo de Leonardo de Pisa (1170-1250).

A fin de dividir un segmento en proporción áurea, la relación entre la longitud del segmento resultante más largo y la del segmento dado es igual a la relación entre la longitud del segmento resultante más corto y del segmento resultante más largo. Esta es la manera de relacionar las partes con el todo, el eterno secreto de la armonía.

Antes de definir el segmento áureo, definimos la media geométrica de dos cantidades.

Definición 2.2.2

Sean a y b dos cantidades. El valor x es la **media proporcional** o la **media geométrica** de a y b, si y solo si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Definición 2.2.3

Dividir un segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón, consiste en dividirlo en dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ tales que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, es decir, la medida AC es la media proporcional entre AB y CB.

El segmento $\overline{AC}$ se denomina **segmento áureo**. Se considera que esta división es la más proporcionada que se puede hacer de un segmento.

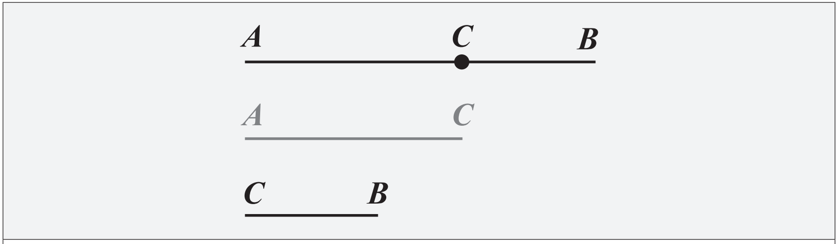


Figura 128.

Método gráfico para la división áurea de un segmento

Realice los siguientes pasos con base en la figura 130: 1) dibuje $\overline{AB}$ con medida de 10 cm; 2) trace $\overline{BO} \perp \overline{AB}$ y determine P sobre $\overline{BO}$ tal que $BP = \frac{AB}{2}$; 3) trace la circunferencia con centro P y radio PB; 4) trace $\overline{AP}$ que corta a la circunferencia en D; y 5) con centro en A y radio AD trace un arco que corte a $\overline{AB}$ en C. $\overline{AC}$ es el segmento áureo de $\overline{AB}$.

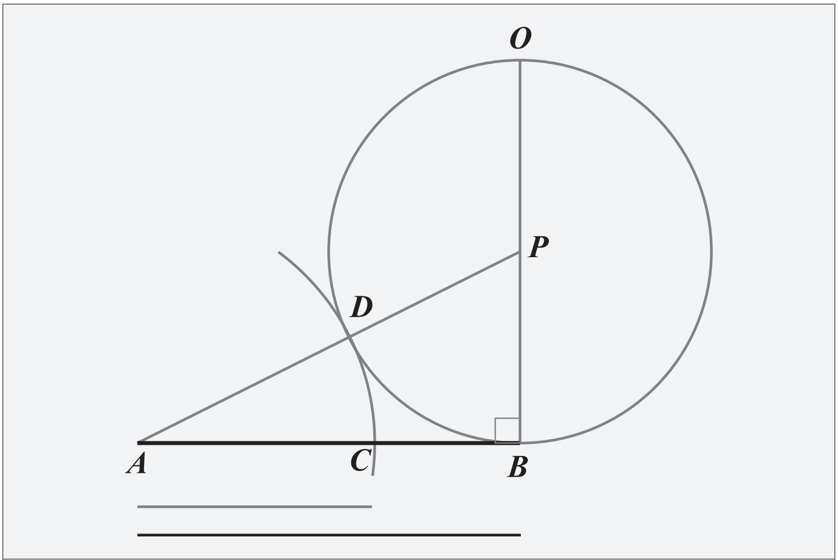


Figura 129.

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$ se obtiene del siguiente procedimiento:

Por definición del segmento áureo: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

Si la longitud de $\overline{AB}$ es 1 unidad lineal, entonces CB = 1 – AC. Reemplazando en la fórmula de la definición: $\frac{1}{AC} = \frac{AC}{1-AC}$, por la "Propiedad 2.1.1" del apartado "Proporción":

$$(AC)(AC) = 1(1 - AC) \Rightarrow (AC)^2 = 1 - AC \Rightarrow (AC)^2 + AC - 1$$

Al aplicar la solución de la ecuación cuadrática, que equivale a despejar AC de la ecuación anterior:

$$AC = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)\,(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Se selecciona el valor positivo:

$$AC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\textit{unidades lineales}$$

A fin de comprobar este resultado, primero aplicamos la "Propiedad 2" del apartado "Proporción" a la fórmula de la definición de segmento áureo, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, y obtenemos $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$. Si reemplazamos el valor de *AC* y *AB* en la primera razón:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033 = \phi,$$ es el número áureo.

Existen ejemplos de diseño de logotipos aplicando la razón áurea. Uno de ellos es el rediseño del logotipo de la BP. García (2013) afirma en la página web Brandemia[1] que la razón entre el radio de una circunferencia y la siguiente menor es el número áureo 1,618.

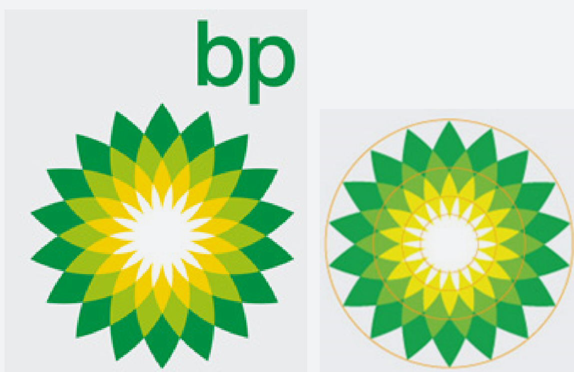


Figura 130.

[1] Véase http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos/

Además del segmento áureo, también existe el rectángulo áureo.

Definición 2.2.4

El *rectángulo áureo* es el rectángulo en el que sus lados están en razón áurea.

Construcción gráfica del rectángulo áureo

Realice los siguientes pasos con base en la figura 131: 1) Dibuje el cuadrado $\square ABCD$ de 5 cm de lado; 2) Sea E el punto medio de $\overline{AD}$; 3) Con centro en E y radio $\overline{EC}$ trace el arco $\overset{\frown}{CG}$ que corta a $\overrightarrow{AD}$ en G ; 4) Trace $\overline{FG} \perp \overline{AG}$ con $FG = 5$ cm; Y 5) Complete el rectángulo $\square ABFG$, el rectángulo áureo.

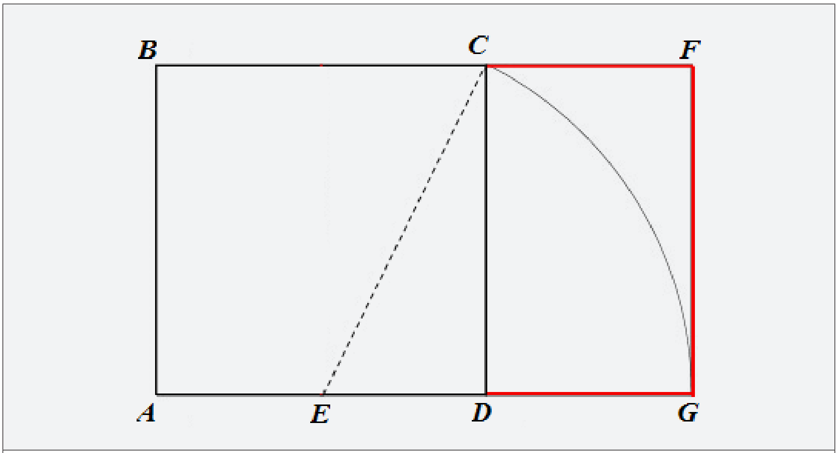


Figura 131.

También se encuentran ejemplos de la aplicación del rectángulo áureo en el diseño de logotipos. Uno es el logotipo de National Geographic. Según García (2013), el rectángulo interno es un rectángulo áureo, por lo que la razón entre la altura y la base es el número áureo 1,618.

Figura 132.

Ejemplo 2.2

De acuerdo con García (2013), al enmarcar el logotipo de Toyota, se obtienen las dimensiones de un rectángulo áureo.

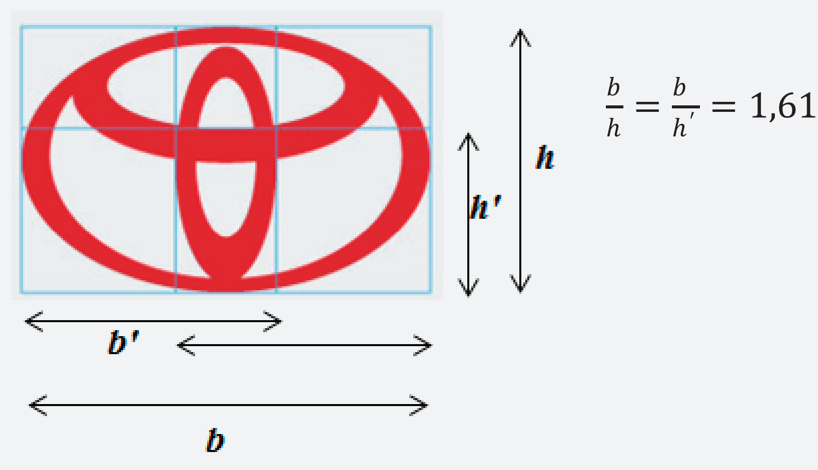


Figura 133.

Construya gráficamente los rectángulos que enmarcan el logotipo de la figura 134 y aplique la definición de rectángulo áureo para deducir las dimensiones del rectángulo áureo b' y h' a partir de un cuadrado de 2 cm de lado.

Solución

Partimos de un cuadrado de 2 cm de lado, al cual se le añade una medida x mediante la construcción gráfica del rectángulo áureo mostrada anteriormente:

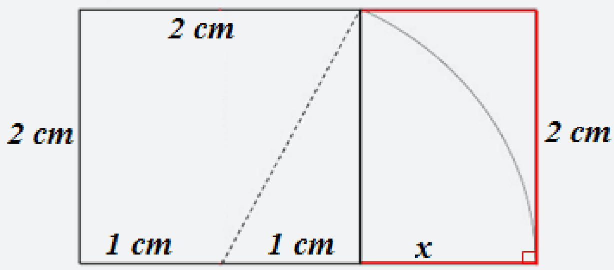


Figura 134.

Aplicamos la "Definición 3" de rectángulo áureo, del apartado "Proporción", a fin de establecer la siguiente proporción:

$$\frac{2+x}{2} = \frac{2}{x}$$

Ahora, aplicamos la "Propiedad 2.1.1", del apartado "Proporción", de las proporciones:

$$x(2+x) = 2(2)$$

Luego, aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro y trasponemos el segundo miembro al primer miembro, con el fin de igualar a cero la ecuación y la ordenamos:

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

Para despejar x en esta ecuación, aplicamos la solución de la ecuación cuadrática,

$$ax^2 + bx + x = 0$$

La cual, es la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Para este caso, $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$. Luego, reemplazando en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(1)(-4)}}{2\,(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\,(4)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{5\,(4)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2\,(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

Como el objetivo es adicionar el valor de x, entonces seleccionamos el valor positivo y el valor de x es:

$$x = \left(-1 + \sqrt{5}\right)cm \approx 1{,}23\ cm$$

Entonces tenemos que

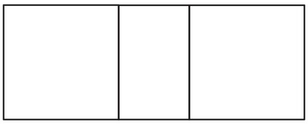
$$b' = (2 + x)cm = \left(2 - 1 + \sqrt{5}\right)cm = \left(1 + \sqrt{5}\right)cm$$

es la misma altura del cuadrado, por lo que $h' = 2$ cm.

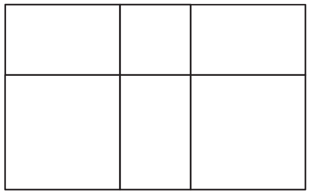
Por lo tanto, la razón $\frac{b'}{h'} = \frac{2+x}{2}$ es:

$$\frac{b'}{h'} = \frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)cm}{2\ cm} \approx 1{,}618 = \phi$$

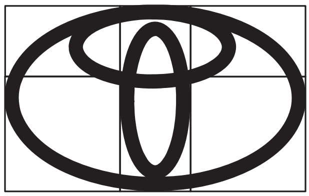
Lo cual verifica que el rectángulo obtenido es áureo. Ahora bien, hay que añadir a la derecha de este rectángulo áureo un cuadrado de 2 cm de lado:



Y, finalmente, añadimos, arriba, de izquierda a derecha, los rectángulos de (2 × 1,23) cm, de (1,23 × 1,23) cm y (2 × 1,23) cm:



Si añadimos las elipses, el logotipo de Toyota es:



Y la medida de b y h, son, respectivamente:

$$b = (2 + x + 2) = \left(2 - 1 + \sqrt{5} + 2\right)cm = \left(3 + \sqrt{5}\right)cm \approx 5{,}23\ cm$$

$$h = (2 + x)\ cm = \left(2 - 1 + \sqrt{5}\right)cm = \left(1 + \sqrt{5}\right)cm \approx 3{,}23\ cm$$

Si calculamos la razón $\frac{b}{h}$, obtenemos:

$$\frac{b}{h} = \frac{\left(3 + \sqrt{5}\right)cm}{\left(1 + \sqrt{5}\right)cm} \approx 1{,}618 = \phi$$

El cual, es el número de oro.

APLICACIONES 2.2

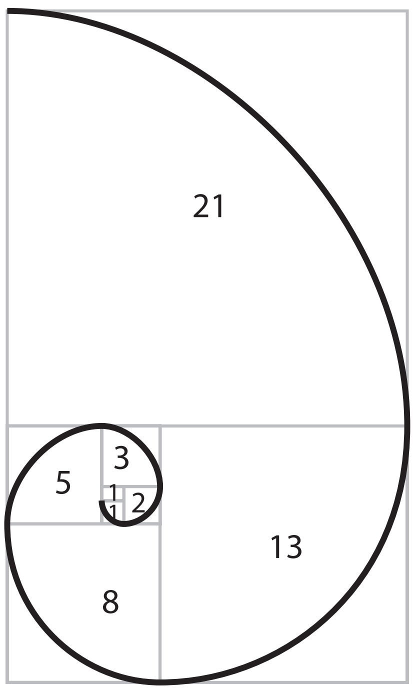
1. Un carnet tiene la forma de un rectángulo de 8,6 cm de base y 5,4 cm de altura. Determine si las dimensiones del rectángulo son las de un rectángulo áureo. De no ser así, aplique la definición de rectángulo áureo y deduzca sus dimensiones para que sea un rectángulo áureo. Dibújelo aplicando el método gráfico.

2. Seleccione cinco productos impresos (periódicos, revistas, tarjetas de crédito y volantes comerciales) de diversos tamaños, y determine si sus dimensiones se ajustan a los tamaños de hojas de la serie *A*, *B,* o a las de un rectángulo áureo.

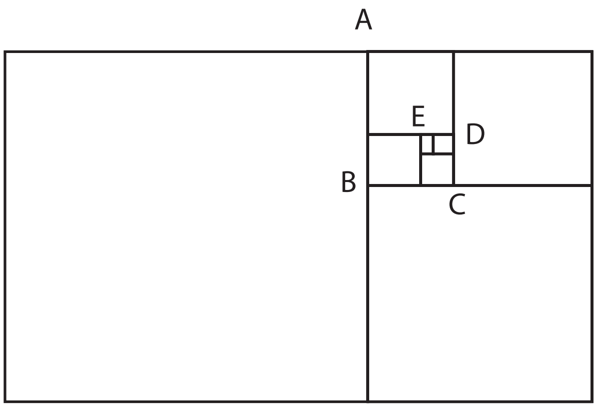
3. Construya gráficamente el rectángulo áureo a partir de un cuadrado de 5 cm de lado. Deduzca sus dimensiones aplicando la definición.

4. Construya gráficamente el rectángulo áureo a partir de un cuadrado de 4 cm de lado. Deduzca sus dimensiones aplicando la definición.

5. Construya gráficamente el rectángulo áureo a partir de un cuadrado de 3 cm de lado. Deduzca sus dimensiones aplicando la definición.

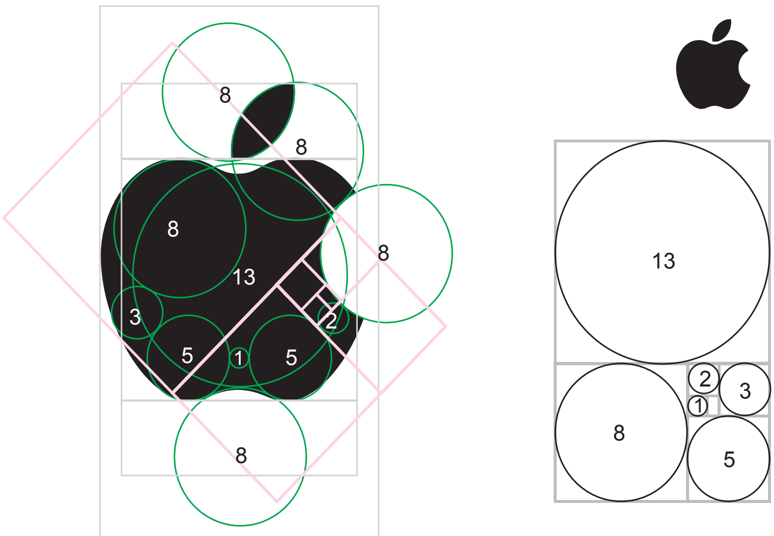


6. La figura muestra la espiral que se construye con los números de la sucesión de Fibonacci. Constrúyala con regla y compás si la longitud de cada lado de un cuadrado está en cm.

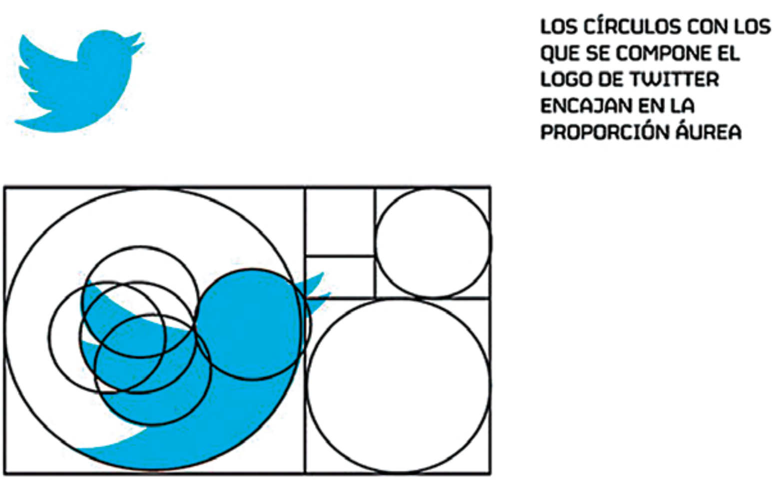


7. Construya la espiral que resulta de la proporción áurea. Para ello, construya el rectángulo áureo a partir de un cuadrado de 12 cm de lado. Luego se van quitando cuadrados, de afuera hacia adentro, de tal forma que siempre sobra un rectángulo áureo en el interior. Finalmente, haciendo centro en los vértices marcados consecutivamente, *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, de los cuadrados respectivos, y con radio igual al lado del correspondiente cuadrado, trace los arcos, formando así la espiral.

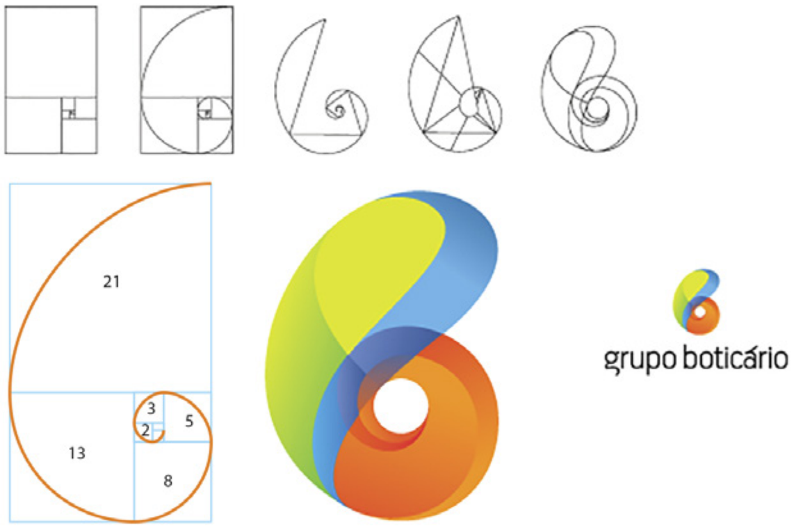
8. Según García (2013), el ícono de Apple se construye según la figura que se presenta a continuación. Determine si este logo se basó en los números de Fibonacci o en la proporción áurea. Justifique su respuesta. ¿Hay alguna diferencia entre un rectángulo construido con los números de Fibonacci y el rectángulo áureo?



9. Según García (2013), el logotipo de Twitter se construye como lo indica la figura. Las razones de los radios de las circunferencias son áureas. Construya el logo con las dimensiones de rectángulos áureos.



10. García (2013) también plantea que el logotipo del Grupo Boticário se construyó como lo muestra la figura. Determine si este logo se basó en los números de Fibonacci o en la proporción áurea. Justifique su respuesta.



REFERENCIAS

Elam, K. (2003). *Geometría del diseño*. México: Trillas.

French, T., y Vierck, Ch. (1997). *Dibujo de ingeniería* (3ª edición). México: McGraw-Hill.

García, M. (febrero 26 del 2013). La proporción áurea en el diseño de logotipos. *Brandemia.org*. Disponible en http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos/

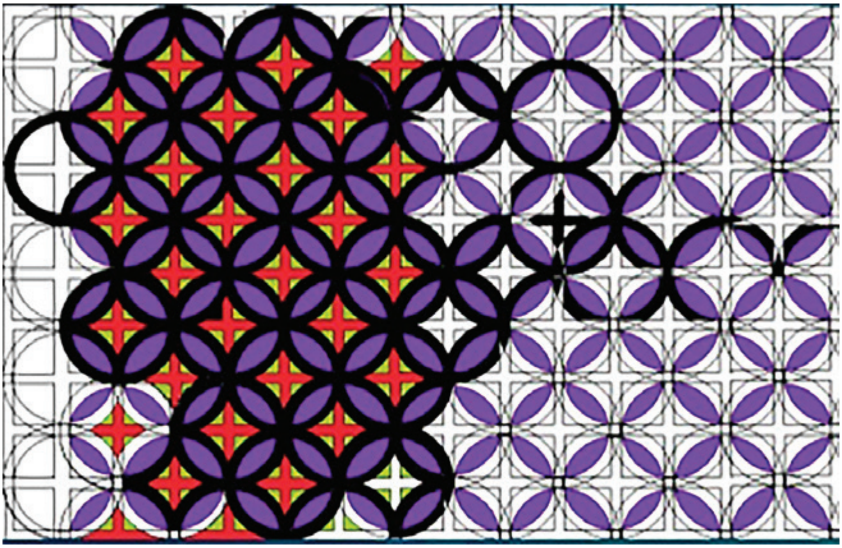
Giesecke, M., et al. (2006). *Dibujo y comunicación gráfica* (6ª edición). México: Pearson.

Jensen, C., y Helsel, J. (2007). *Interpreting Engineering Drawings* (7ª edición). Nueva York: Delmar, Cengage Learning.

Moise, E., y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna*. EE. UU.: Fondo Educativo Interamericano S. A.

Olivares, E., y Vilahur, L. (2012). *Dibujo para diseñadores gráficos*. Badalona: Parramón.

Anexos



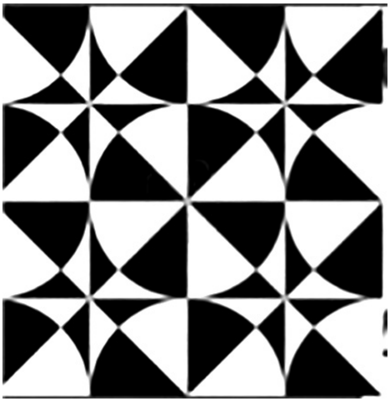
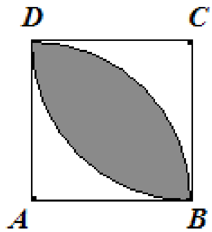


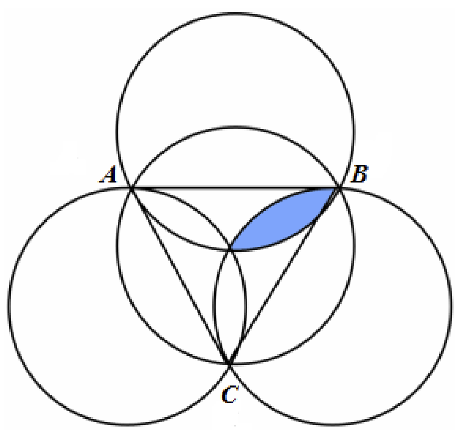
Figura A1.

Debido a la importancia del círculo y sus partes en el diseño, a continuación presentamos el procedimiento para la construcción de algunas figuras:

1. Un pétalo. Desde los vértices A y C del cuadrado $\square ABCD$, y con un radio igual al lado, se trazan dos arcos en el interior del cuadrado que pasan por los vértices adyacentes respectivos. Las intersecciones de los arcos determinan un pétalo.

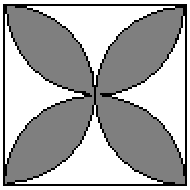


2. Tres pétalos. El procedimiento es el siguiente: (a) construya el triángulo de lado l; (b) trace la mediatriz del lado $\overline{AB}$. (c) En el exterior del triángulo, sobre la mediatriz, localice el punto que esté a una distancia r de uno de los dos extremos del lado (A o B) ($l = r\sqrt{3}$), donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo). Haciendo centro en este punto, y con una abertura r del compás, trace el arco menor, en el interior del triángulo, que tenga por extremos los puntos A y B; (d) Repita los pasos (b) y (c) para el lado $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



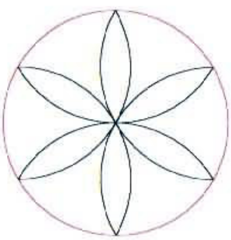
3. Cuatro pétalos. Construya un cuadrado de lado l. Haciendo centro en el punto medio de cada lado del cuadrado, y con una abertura del compás igual a $l/2$, trace el arco menor, en

el interior del cuadrado, que tenga por extremos dos vértices del cuadrado.



4. Cinco pétalos. El procedimiento es el siguiente: (a) construya un pentágono regular de lado l; (b) trace los radios y la mediatriz de cada radio (tenga en cuenta que $l = 2R\ sen\ 36°$, donde R es el radio del pentágono); (c) en el exterior del pentágono y sobre cada mediatriz localice el punto que equidista del centro del pentágono y del vértice adyacente que está al otro lado de la mediatriz. Trace el arco menor, en el interior del pentágono, que tenga por extremos el centro del pentágono y el vértice mencionado. Debe hacer esto dos veces para cada mediatriz, de tal manera que cada punto equidistante esté a lados opuestos del radio.

5. Seis pétalos. Divida una circunferencia en seis partes congruentes. Desde cada punto de división trace un arco, de radio igual al radio de la circunferencia, en el interior de la circunferencia, que tiene por extremos dos puntos adyacentes de división.



Esta obra, editada en Barranquilla por
Editorial Universidad del Norte, se terminó de imprimir
en los talleres de La Imprenta Editores en octubre de 2017.
Se compuso en Palatino Linotype y Formata.

Este texto está dirigido
a estudiantes de Diseño Gráfico,
Arquitectura, Artes y básica secundaria.
Su propósito es aplicar la geometría a
algunas situaciones relacionadas con el
diseño, tales como las vistas de un
sólido, la proporción y el número áureo,
sin perder la rigurosidad de los
conceptos y propiedades de la
geometría elemental.

UNIVERSIDAD DEL NORTE