Conceptos básicos de lógica

Linette **Colmenares**

UNELLEZ

Ediciones de la Universidad Ezequiel Zamora
Colección **Docencia Universitaria**

Universidad Nacional Experimental de
los Llanos Occidentales **Ezequiel Zamora**

Publicado por feduez Fondo Editorial Universidad Ezequiel Zamora

Linette Colmenares

Nació en Maracaibo, Estado Zulia. Es Ingeniero de Sistemas egresada de la Universidad de los Andes, con Maestría en Gerencia y Planificación Institucional en la UNELLEZ y Doctora por la Universidad de Málaga, España.

Actualmente es Profesora en pre y postgrado con categoría de Asociado, adscrita al Programa Ingeniería, Arquitectura y Tecnología del Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Social de la UNELLEZ, en pre y postgrado. Investigadora en las áreas de tecnología de información y comunicación, sistemas de información y educación a distancia, participando como ponente en éstas áreas en eventos nacionales e internacionales.

Conceptos básicos de lógica

Segunda edición, 2020

Diseño de cubierta y maquetación:
Gustavo Quintana

Depósito Legal: BA2021000055
ISBN: 978-980-248-276-4

UNELLEZ
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL
DE LOS LLANOS OCCIDENTALES
EZEQUIEL ZAMORA
La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Índice

Prólogo

La lógica es un tema presente en la vida diaria y en todos los campos especializados del conocimiento, ya que en muchas de nuestras actividades, hacemos uso de ella para plantear soluciones a diferentes tipos de problemas. Entre las áreas de conocimiento donde se aplica se pueden mencionar: en matemática para demostrar teoremas y axiomas, en las ciencias puras y naturales para aplicar el método científico y en el área filosófica, por mencionar algunos.

Específicamente la lógica tiene una relación significativa con la informática, tal como señala Ben-Ari: 'la lógica es la base matemática del software', ya que proporciona herramientas para saber si un desarrollo es correcto. Entre las funciones que cumple la lógica en la informática podemos mencionar:

- Por su capacidad deductiva, la lógica presenta las expresiones booleanas que se utilizan en los diferentes lenguajes de programación. Se ha utilizado para diseñar e implementar sistemas que razonan sobre un dominio particular (inteligencia artificial); para sistemas que incorporan el tiempo como parámetro principal; para sistemas concurrentes y en todas las áreas en las que se emula el razonamiento, se maneja información imprecisa y donde el conocimiento es incierto.
- Por su capacidad para representar el conocimiento, la lógica se ha utilizado para representar modelos de cálculo, para establecer la semántica de los lenguajes de programación y en la verificación formal de los programas.

El libro Conceptos Básicos de Lógica como lo indica el título, trata los temas considerados de relevancia para un primer acercamiento formal a la lógica. Está elaborado para apoyar la enseñanza de la lógica que se incluye en los pensa de estudios de las carreras de informática. Fundamentalmente, está orientado al contenido programático que se dicta en las carreras Técnico Superior Universitario en Informática e Ingeniería en Informática de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora (UNELLEZ). El material expuesto está pensado para los estudiantes de informática, pero también puede ser útil para estudiantes de matemáticas o de otras carreras.

Su redacción está basada en la experiencia acumulada en la docencia del Subproyecto Lógica dictado a los estudiantes del primer semestre de las dos carreras de informática de dicha Universidad; también se ha nutrido de la experiencia obtenida en la docencia de otros Subproyectos como Introducción a la Informática, Informática II y Algoritmo y Programación I y de los materiales didácticos generados para los respectivos cursos. Es necesario mencionar textos como el de Hortalá, Martí, Palomino, Rodríguez y Del Vado; el de Suppes y Hill, así como las obras de García; Celani, González y Garrido consultadas en internet y que aparecen citados en la bibliografía, por ser obras instructivas que sirvieron para la presentación y formulación de ejemplos y ejercicios didácticos.

El propósito de este libro es introducir al estudiante en el uso de la lógica clásica, esto es: la lógica proposicional y la lógica de predicados, como instrumentos adecuados para la formalización de razonamientos y la modelización de situaciones que verán en otros subproyectos. Se presenta en un nivel sencillo en presentación y contexto para una fácil comprensión. El punto de vista representado en este libro es el que una enseñanza de lógica bien meditada y planificada al principio de la carrera, proporciona una base para otros subproyectos más profundos. Se hace hincapié en la importancia de traducir enunciados en lenguaje natural a símbolos lógicos. Entre las competencias que se quieren lograr están:

- Capacidad para conocer las propiedades formales de la lógica.
- Capacidad de abstracción y de análisis lógico de argumentos.
- Capacidad para expresar razonamientos lógicos en lenguaje simbólico.
- Capacidad para construir razonamientos deductivos e inductivos, elemento necesario tanto para la investigación científica, como para proponer argumentos válidos en un ensayo o para debatir ideas.
- Capacidad para usar los principios del álgebra booleana para simplificar expresiones del lenguaje natural.

- Capacidad para construir funciones lógicas en subproyectos del área de la informática.

El libro se ha organizado de la siguiente manera:

El capítulo 1 es un capítulo introductorio donde se presentan varias definiciones de lógica, sus características, como está dividida y conceptos relacionados con el término y que se consideran importantes. En el capítulo 2 se presenta la lógica proposicional, incluyendo la definición de proposiciones y el lenguaje formal de la lógica proposicional, tanto la sintaxis como la semántica. En este capítulo se comprende cómo trabajan los términos de enlace que se usan en el lenguaje natural y su representación en el lenguaje formal de la lógica.

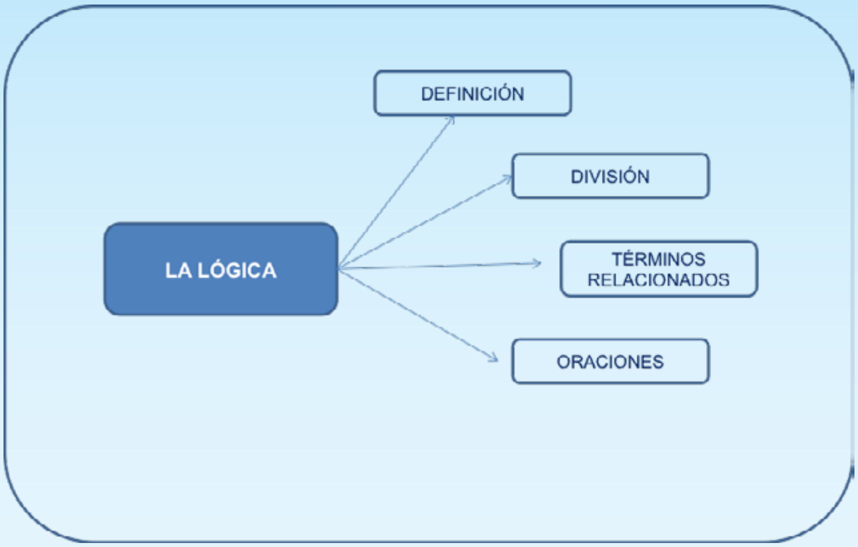
En el capítulo 3 se sigue trabajando con la lógica proposicional, incorporando las tablas de verdad y los diagramas de certeza. Se resuelven fórmulas complejas y en función de sus resultados, se hace una clasificación: tautología, contradicción y consistencia. También se trabaja la equivalencia lógica y se incorporan métodos de razonamiento adecuados para las demostraciones de validez utilizando las tablas de verdad. El capítulo 4 incorpora una parte importante de la lógica formal: la inferencia y la deducción utilizando reglas de inferencia para flexibilizar el proceso llamándose deducción natural.

Finalmente, el capítulo 5 abarca todo lo referente a la lógica de predicado, llamada también por otros autores lógica de primer orden, iniciando con el concepto de predicado para luego presentar la sintaxis, la semántica, la formalización y las técnicas de razonamiento y de deducción.

En cada uno de los capítulos se agregan ejercicios resueltos detalladamente y ejercicios sin resolver que han sido elaborados con criterios didácticos para ayudar al estudiante a que adquiera un conocimiento aplicado de los diversos temas tratados.

Capítulo 1

La Lógica



OBJETIVO Y COMPETENCIAS DEL CAPÍTULO

Comprender el concepto de lógica, definir los términos que están relacionados con el tema y abordar las oraciones como elemento clave de la lógica.

INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se expone la caracterización de la lógica, comenzando con la definición presentada por varios autores, los términos relacionados con la disciplina, su división y sus principales características.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

1.1 Definición de lógica

1.2 Términos relacionados con la lógica

1.3 División de la lógica

1.4 Oraciones

1.1 Definición de lógica

La palabra lógica viene del griego logike, constituida por los términos logos y techen. La palabra logos tiene los siguientes significados: conceptos, proposición: cuando se afirma o se niega algo, y razonamiento: como la relación que existe entre una afirmación y su justificación. Molina (2007) define la lógica como la ciencia del pensamiento, doctrina de la razón o la disciplina filosófica que tiene por objeto el estudio de los actos de la razón.

Aristóteles fue el primero en utilizar el término lógica para referirse al estudio de los argumentos dentro del lenguaje natural; la definió como "El arte de la argumentación correcta y verdadera". Citado por Zepeda (2011).

Deaño (2009) la define como 'la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia'. El término inferencia es considerado por el autor como sinónimo de razonamiento o argumentación. En esto coincide con Copi (2000), ya que este autor afirma que la lógica se encarga de caracterizar los razonamientos. Distinguir entre el razonamiento correcto y el incorrecto es el problema central que debe tratar la lógica, determinando las condiciones bajo las cuales la verdad de ciertas creencias nos lleva con certeza a la verdad de alguna otra creencia.

Por su parte, Celani (2003) señala que la lógica se ocupa de los métodos del razonamiento. Uno de los objetivos fundamentales es sistematizar los principios de los razonamientos válidos con el objeto de formar o construir argumentaciones o deducciones que sean correctas. Estudiar la razón como herramienta del conocimiento Maritain (2014).

En computación, es la ciencia que estudia la forma de razonar correctamente, la que indica cómo obtener conclusiones y los métodos conocidos para lograrlo Zepeda (2011). Proporciona herramientas para saber si un desarrollo es correcto.

La lógica puede definirse como aquella ciencia o reflexión sistemática que estudia las condiciones o leyes que debe cumplir todo razonamiento para ser formalmente válido. Fernández (s/f). Se ocupa del estudio de los razonamientos, deducciones e inferencias.

1.2 Términos relacionados con la lógica

De los conceptos revisados podemos ver que tienen en común los siguientes términos: argumento, verdad, razonamiento correcto, y validez.

Por argumento, entendemos el conjunto de enunciados en un lenguaje determinado (también llamadas oraciones). Unos de los enunciados son considerados premisa y otro enunciado es considerado la conclusión.

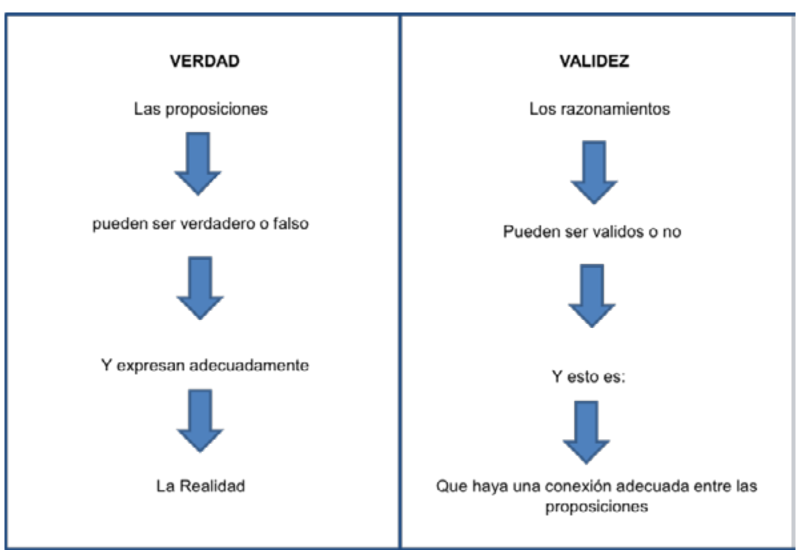
Y cómo se define el razonamiento? Razonar significa producir juicios (Muñoz s/f). Un razonamiento es un proceso donde se obtiene una afirmación llamada conclusión que se deduce a partir de otras afirmaciones llamadas premisas. Los razonamientos son válidos, cuando de las premisas se obtiene la conclusión.

Y la verdad? Una expresión puede ser verdadera o falsa si lo que afirma ocurre o no en la realidad. Por ejemplo: 'los gatos tienen alas', es un enunciado que podemos decir si es verdadero o falso. Para este caso, sería falso.

Por otro lado, la validez está asociada con los razonamientos. Un razonamiento es válido cuando la conclusión se deduce de las premisas. Un argumento es válido si en todas las situaciones pensables o en todos los modelos posibles en los que las premisas se cumplen, la conclusión también debe cumplirse. La validez radica en la estructura misma del razonamiento independientemente del modelo particular en el cual se aplica.

Una idea que se deduce de estos conceptos y que es fundamental para entender la lógica es que la validez de un razonamiento es independiente de la verdad o falsedad de las premisas y la conclusión. La lógica no se ocupa de verdades materiales sino de las relaciones formales entre esas verdades. (Deaño, 2009)

Figura 1.1. Verdad vs Validez



1.3 División de la lógica

Se habla de lógica clásica cuando el resultado de las fórmulas sólo admite dos valores de verdad: verdadero o falso. Como características de la lógica clásica tenemos (Sarrión y Hernández, 2012):

- Es bivalente, sólo admite dos valores de verdad: verdadero o falso.
- Un enunciado tiene un valor de verdad de hecho pero no es una verdad necesaria.
- Es monótona, el aumento de la información, no cambia los resultados previos.

La lógica clásica se subdivide a su vez en:

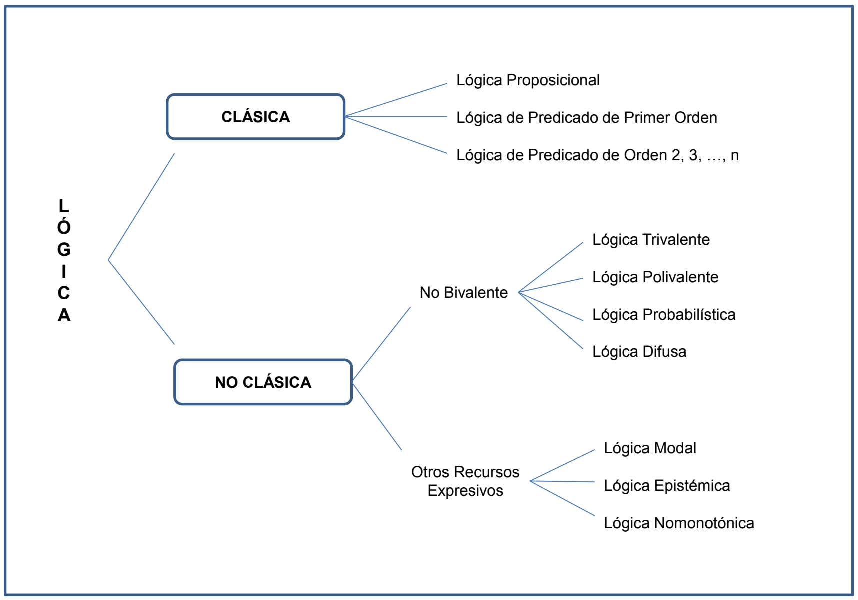
- Lógica Proposicional: estudia las proposiciones o sentencias lógicas, sus posibles evaluaciones de verdad sin realizar análisis interno de los componentes de la proposición.
- Lógica de Predicados de Primer Orden: se caracteriza por analizar cada uno de los componentes de la oración y utiliza cuantificadores.
- Lógica de Predicados de orden 2, 3, …, n: es una extensión de la lógica de primer orden que permite cuantificar predicados y funciones.

La lógica no clásica surge porque algunos razonamientos no siguen lo establecido en la lógica clásica como por ejemplo la inclusión del tiempo en los resultados, la incertidumbre, la probabilidad de ocurrencia de algunos hechos. La lógica no clásica admite más valores de verdad, no solo verdadero o falso. Se subdivide en:

- Lógica Trivalente: los valores de verdad son: verdadero, falso e incierto,
- Lógica Polivalente: es llamada también lógica probabilística y los valores de verdad están en el rango [0, 1].
- Lógica Modal: incorpora condiciones para que una proposición sea verdadera o falsa, incluye valores como: lo necesario, lo posible, incluye parámetros de tiempo. Busca especificar, expresar y razonar en los comportamientos dinámicos.

- Lógica Epistémica: formaliza enunciados de creencias y opiniones.
- Lógica Nomonotónica: formaliza situaciones reales.

Figura 1.2. División de la Lógica



Fuente: Adaptado de Muñoz (s/f)

1.4 Oraciones

En el lenguaje natural, las oraciones se definen como una expresión lingüística sintácticamente correcta, que establece un pensamiento completo (Fernández, S. s/f). Pueden clasificarse en interrogativas (sirven para preguntar), imperativas (indican mandato u orden), desiderativas (expresan deseos), dubitativas (expresan dudas), exclamativas o admirativas (expresan admiración) y declarativas (sirven para afirmar o negar). Las oraciones declarativas son las usadas en lógica. Estas oraciones declarativas son conocidas en lógica como proposiciones o enunciados. Nosotros las llamaremos proposiciones.

Figura 1.3. Clasificación de las Oraciones

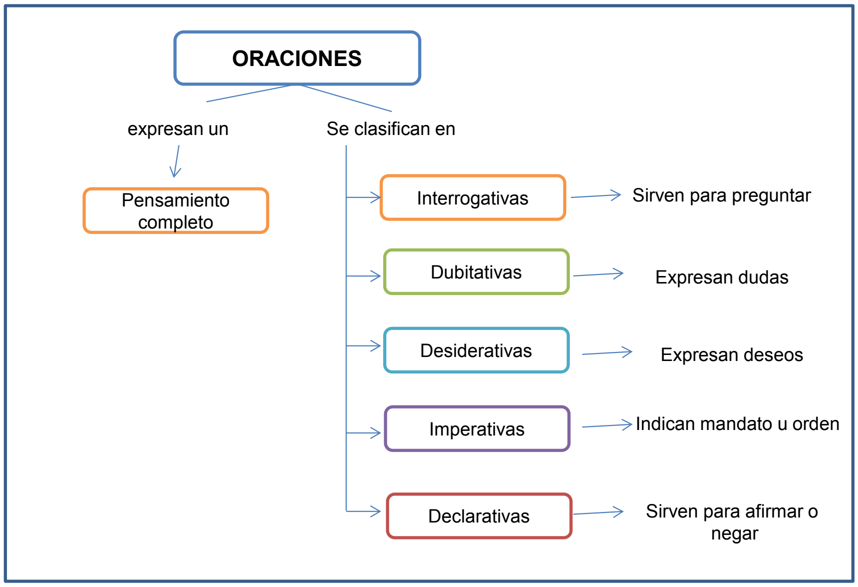
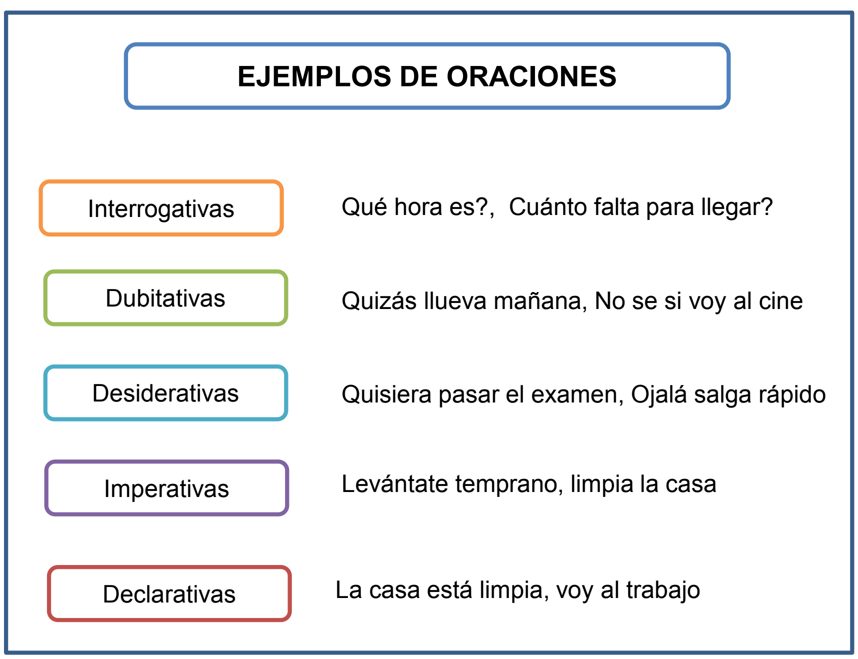


Figura 1.4. Ejemplo de Oraciones



Ejercicios:

¿Qué estudia la lógica?

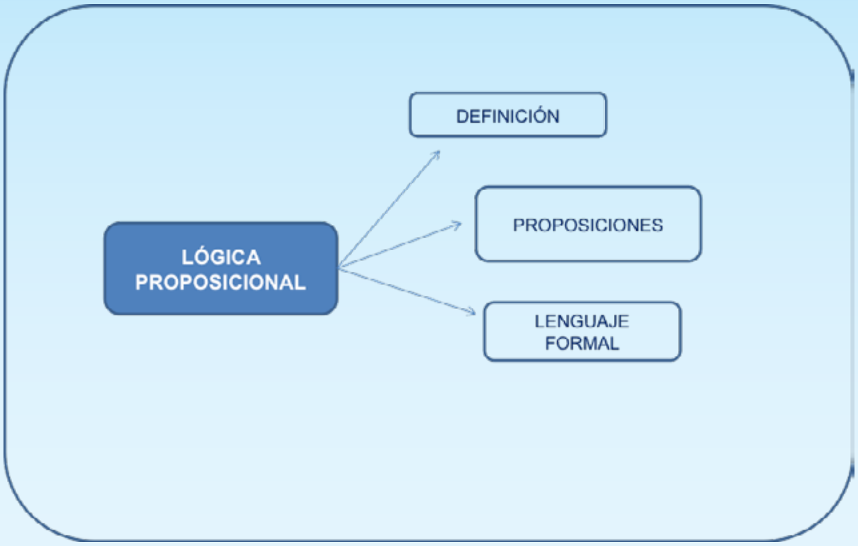
¿Para qué sirve la lógica?

¿Todos los razonamientos que se expresan en la ciencia y en la vida diaria se pueden tratar con lógica?.

Realiza un mapa conceptual con los elementos resaltantes del capítulo.

Capítulo 2

Lógica Proposicional



OBJETIVO Y COMPETENCIAS DEL CAPÍTULO

Comprender la lógica proposicional y elaborar fórmulas lógicas a partir de enunciados en lenguaje natural, haciendo uso del lenguaje formal de la lógica.

INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se expone la caracterización de la lógica, comenzando con la definición presentada por varios autores, los términos relacionados con la disciplina, su división y sus principales características. Las teorías científicas o filosóficas están constituidas de proposiciones que expresan un conocimiento completo que puede ser verdadero o falso. La lógica proposicional se encarga de estudiar la validez de las proposiciones. Para ello necesitamos conocer el concepto de proposiciones como elemento fundamental para formalizar y simbolizar la lógica y a partir de allí conocer el lenguaje formal de la lógica con sus símbolos y reglas.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

2.1 Definición de lógica proposicional

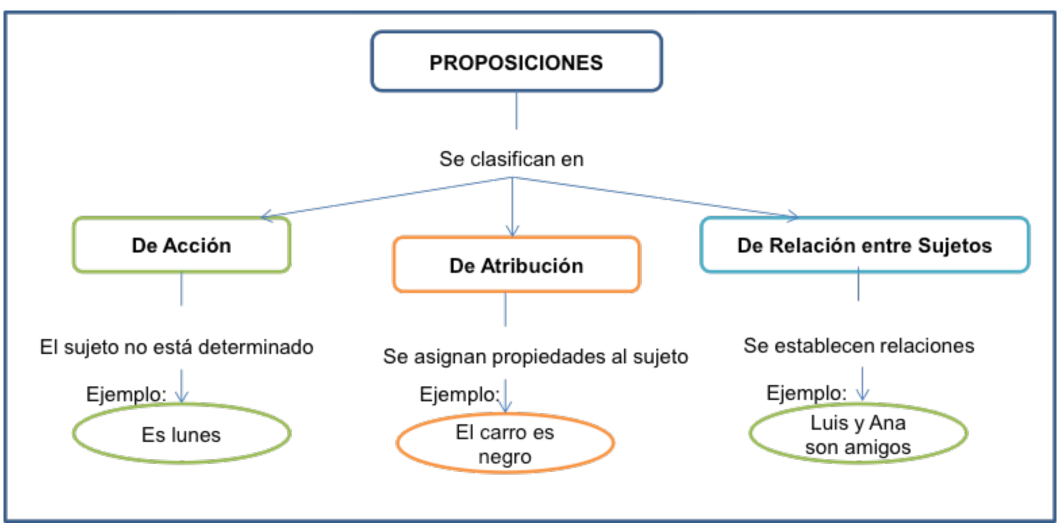
La tarea de la Lógica proposicional consiste en ocuparse de estudiar la validez formal de los razonamientos tomando en bloque las proposiciones que los forman, es decir, sin hacer un análisis interno de tales proposiciones. (Deaño, 2009). Los elementos que compones una proposición como los sujetos, los predicados, las propiedades, son irrelevantes desde el punto de vista de la lógica de proposiciones.

Por su parte, Garrido (2010) señala que la lógica proposicional trata sobre la verdad o la falsedad de las proposiciones y de cómo la verdad se transmite de unas proposiciones (premisas) a otras (conclusión). Una proposición es la unidad mínima de significado que puede ser verdadera o falsa.

2.2 Proposiciones

Son oraciones que pueden ser verdaderas o falsas. Las proposiciones se clasifican en: proposiciones de acción, de atribución y de relaciones entre sujetos.

Figura 2.1. Clasificación de las proposiciones



Fuente: La autora (2015)

La importancia de las proposiciones es que son las unidades que utiliza la lógica para formar argumentos. La principal tarea de la lógica es la de averiguar cómo la verdad de una determinada proposición está conectada con la verdad de otra. En lógica, habitualmente se trabaja con grupos de proposiciones relacionadas.

Para que una oración sea una proposición debe cumplir con lo siguiente:

- Ser una oración declarativa o aseverativa
- Tomar el valor verdadero o falso

Y no son ejemplos de proposiciones:

- Las oraciones exclamativas, imperativas, interrogativas y las dubitativas.
- Los juicios de valor.
- Las descripciones definidas
- Las falsas proposiciones
- Las frases filosóficas

Ejemplos de Oraciones que son Proposiciones:

- "2 es mayor que 1" es una proposición, ya que puede tomar el valor verdadero o falso. En este caso el valor de verdad es: verdadero que abreviaremos con la letra (V).
- "1 = 0" también es una proposición, pero su valor de verdad es falso (F).
- "Mañana caerá un rayo" es una proposición. Para conocer su valor de verdad habrá que esperar hasta mañana.

Ejemplos de Oraciones que no son Proposiciones:

- "Ponte la pijama" no es una proposición, puesto que no se le puede asignar ningún valor de verdad (Está en modo imperativo, es una orden, y no una frase declarativa).

- "José es un polígono de tres lados". Es una proposición pero con elementos que son imposible ya que una persona no es un polígono de tres lados, por tanto no tiene sentido revisarla ni considerarla en lógica.
- "El perro" no es una proposición, puesto que no es ni siquiera una frase completa (al menos en este contexto).
- "¿Qué hora es? " es una oración interrogativa; es una pregunta, no se puede decir si es verdadero o falso.
- "Quisiera ir a la fiesta", está expresando un deseo, es una oración desiderativa.
- "Levántate temprano" es una orden.
- "El río santo domingo", no es una oración completa, sólo se nombra al sujeto.
- "El hombre es mortal por sus temores e inmortal por sus deseos", Las frases filosóficas no pueden considerarse proposiciones ya que para algunas personas son verdaderas y para otras no.

Ejercicios:

1. De los siguientes enunciados:

   - ¡Qué día tan agradable!
   - El edificio tiene tres pisos
   - Borges escribió varios poemas

¿Qué alternativa es correcta?

a) Una es proposición.

b) Dos son expresiones no proposicionales.

c) Dos son proposiciones.

d) Todas son proposiciones.

2. Indicar cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones y cuáles no lo son.

- El sol no es un astro
- El relámpago del Catatumbo en Maracaibo
- 2 + 2 = 5
- El cielo es azul
- Pedro es alto.
- Juan es estudiante.
- Vayan con cuidado.
- ¿Qué es eso?
- ¡Feliz cumpleaños!
- 3 es impar.
- Los martillos corren muy rápido
- Las clases tienen y horas

2.2.1 Tipos de Proposiciones

Proposiciones Simples o Atómicas: Son aquellas que no se componen de otras proposiciones. Son proposiciones completas sin conjunciones gramaticales o términos de enlace Su valor de verdad (verdadero o falso) no depende de otras proposiciones.

Ejemplos:

- La Unellez es la universidad de los Llanos Occidentales
- La lógica estudia la validez de los razonamientos
- La casa es grande
- 2 + 2 = 5
- José y Pedro van a la misma universidad.

Proposiciones Compuestas o Moleculares: Son proposiciones que contienen varias proposiciones atómicas unidas por términos de enlace. Los términos de enlace son conectores que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta.

Las proposiciones moleculares también tienen un valor de verdad, pero ese valor está en función del valor de verdad de cada proposición atómica y del término de enlace que las relaciona. Las proposiciones compuestas o moleculares se clasifican dependiendo del término de enlace que las relaciona.

Proposiciones Conjuntivas: Llevan la conjunción "y" o sus equivalentes: e, pero, aunque, aun cuando, tanto… como, sino, ni …ni, sin embargo, además. Como ejemplo se tienen:

- La cocina es grande pero poco funcional.
- Tanto María como Luisa van a la universidad.
- La casa es grande y cómoda.
- Petra ni lava ni presta la batea.

Se presentan en algunos casos proposiciones que son atómicas y son confundidas con moleculares por tener el término "y". En esos casos el término "y" no es un término de enlace, sino que sirve para establecer relaciones.

Ejemplos:

- Luis y maría son hermanos
- La casa y el carro son míos

Son proposiciones atómicas

Proposiciones Disyuntivas: Llevan la conjunción disyuntiva "o" o sus equivalentes: u, ya…ya, bien…bien, y/o, sea…sea.

Ejemplos:

- Vas al cine o al colegio.
- Estás a favor o en contra de la reforma del reglamento.

- No sabe lo que dice u olvida con quién está hablando.
- Esa figura literaria se llama personificación o prosopopeya.

Proposiciones Condicionales: Llevan la conjunción compuesta "si… entonces" o sus equivalentes: Si, siempre que, con tal que, puesto que, ya que, porque, cuando, de, a menos que, a no ser que, salvo que, solo si, solamente sí. Las proposiciones condicionales tienen dos elementos: el antecedente y el consecuente. La proposición que va después del si es el antecedente y la que va después del entonces es el consecuente.

Ejemplos:

- Es carnívoro porque come carne.
- Si vas a clases, entonces llevas los útiles.
- Cuatro es par porque es divisible por dos.
- Cuando baje el sol, salimos a caminar

Proposiciones Bicondicionales: Llevan la conjunción compuesta "si y solo si" o sus equivalentes: Cuando y solo cuando, si… entonces y solo entonces.

Ejemplos:

- Empiezas la universidad si y solo si apruebas el examen de admisión.
- Se dará el maíz cuando y solo cuando llueva.
- La Tierra es esférica si y sólo si el sol es una estrella.
- Enseño matemáticas cuando y solo cuando comience el próximo semestre.

Proposiciones Negativas: Llevan al adverbio de negación "no" o sus equivalentes: Nunca, jamás, tampoco, no es verdad que, no es cierto que, es falso que, le falta, carece de, sin.

Ejemplos:

- Es falso que mañana comiencen las clases.

- Las aves no son mamíferos
- Al profesor le falta dar clases.

Resumiendo tenemos:

Tabla 2.1. Tipos de Proposiciones Moleculares

	Términos de Enlace
Proposiciones Conjuntivas:	y, e, pero, aunque, aun cuando, tanto… como, sino, ni ...ni, sin embargo, además
Proposiciones Disyuntivas:	O, u, ya...ya, bien…bien, y/o, sea… sea
Proposiciones Condicionales:	Si ...entonces, Si, siempre que, con tal que, puesto que, ya que, porque, cuando, de, a menos que, a no ser que, salvo que, solo si, solamente si.
Proposiciones Condicionales:	Si y solo si, Cuando y solo cuando, si… entonces y solo entonces.
Proposiciones Negativas:	No, Nunca, jamás, tampoco, no es verdad que, no es cierto que, es falso que, le falta, carece de, sin.

Fuente: La autora (2015)

Ejercicios:

1. ¿Qué es una proposición?
2. ¿Por qué las oraciones exclamativas, imperativas e interrogativas no son proposiciones?
3. ¿Qué requisitos debe cumplir una oración para ser proposición?
4. Diga si las siguientes proposiciones son atómicas o moleculares. En caso de ser moleculares, encierre en un círculo el o los términos de enlace.
   a) Baila a menos que estés triste.
   b) Siempre que estudio, me siento feliz.
   c) El delfín es un cetáceo, ya que es un mamífero marino.

d) La cena será servida a las 7 pm

e) La música está muy baja o yo estoy sordo

f) Los alumnos están ansiosos por recibir clases

g) Él es buen jugador o tiene mucha suerte

h) El índice académico debe ser mayor que 3,50 pero los ingresos menores a 3000

i) Muchos alumnos estudian lógica en el primer año de carrera

j) A las focas no les crece el pelo

k) B = 1 y a >= 2

l) Aun cuando el profesor no de clases, los alumnos deben estudiar

m) La muchacha irá al teatro o irá al cine

n) Si la clase comenzó entonces llego tarde

o) Una parte de la luna no se ve desde la tierra

p) Si x = y entonces x = 2

q) Tanto la suma como la multiplicación de números naturales son conmutativas

r) Luisa y maría le prestaron el cuaderno a José y se fueron de clases

s) Si Manuel es un jugador de videojuegos y un pésimo estudiante, entonces sus padres no estarán satisfechos y no le dejarán jugar

t) Los términos lenguaje objeto y metalenguaje no son absolutos sino relativos

u) La suma de los lados internos de un triángulo es igual a 180 grados

5. Diga si las siguientes proposiciones moleculares son conjuntivas, disyuntivas, condicionales, bicondicionales o negativas

   a) Este número es par sí y solo si es divisible por 2

b) Manuel e Isabel son contadores públicos

c) La comida no supo bien

d) Tanto la suma como la multiplicación de números naturales son asociativas

e) La huelga continúa porque no hay solución

f) Los seres nacen pero también viven y mueren

g) Pedro es tanto profesor como poeta

h) O vas a clases o al cine

i) Las preposiciones son la unión con una o más palabras brindándoles significación de circunstancias tales como lugar, movimiento, tiempo, causa, modo, pertenencia, materia, procedencia y posesión

j) Luis es profesor o es alumno, pero no puede ser ambas cosas a la vez.

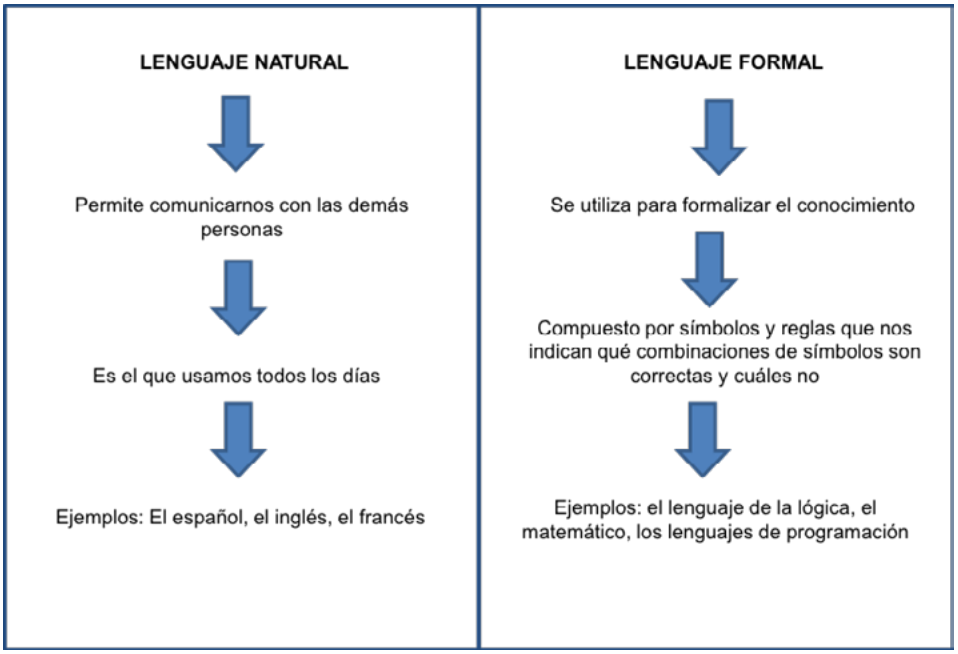
k) La Universidad está sin rector

2.3 El lenguaje formal de la lógica proposicional

2.3.1 El Lenguaje Natural y el Lenguaje Formal

Se tienen dos tipos de lenguajes: el lenguaje natural y el formal o artificial. Los lenguajes naturales son los que hablamos todos los días, son los instrumentos de comunicación entre los seres humanos. Los lenguajes formales son lenguajes de precisión, medios de expresión construidos por los científicos para formular con mayor rigidez las relaciones entre los objetos estudiados por las respectivas ciencias. (Deaño, 2009).

Figura 2.2. Lenguaje Natural y Lenguaje Formal



Fuente: La autora (2015)

Tanto para los leguajes naturales como los artificiales, se establecen reglas para representar la información que se quiere mostrar.

Por ejemplo, en el lenguaje natural tenemos la siguiente oración:

"no yo vamos al cine"

Claramente podemos decir que está mal formada porque no cumple con las reglas gramaticales del castellano.

Otro ejemplo en el leguaje formal matemático sería:

"/ 2 % 3 - 5"

Esta fórmula matemática también está mal formada porque no se ajusta a las reglas matemáticas para poder resolverla.

Así como ocurre con esos lenguajes, así debemos tener reglas y símbolos para el lenguaje formal de la lógica. El lenguaje formal de la lógica proposicional está formado por los símbolos de la lógica y por las reglas de formación de las fórmulas lógicas. El lenguaje formal lógico permite estructurar las proposiciones, las formulas proposicionales y las inferencias.

2.3.2 Símbolos de la Lógica

- Constantes: V para indicar verdadero y F para falso.
- Variables proposicionales: A cada proposición se le asigna una variable. Se denotan con letras minúsculas y las más utilizadas son: p, q, r, s, a, b, c. Las variables en lógica sólo pueden tomar dos valores de verdad: verdadero o falso.
- Operadores o conectores lógicos: También llamados términos de enlace, sirven para relacionar las proposiciones y formar proposiciones moleculares. Establecen conexiones entre las proposiciones representadas por las variables proposicionales. En la siguiente tabla se presentan los conectores, su expresión en lenguaje natural y el símbolo utilizado en lógica.

Tabla 2.2. Conectores Lógicos

Nombre del conector	Lenguaje natural	Símbolo	Representación
Negación	No, Nunca, jamás, tampoco, no es verdad que, no es cierto que, es falso que, le falta, carece de, sin.	˥	˥p
Conjunción	y, e, pero, aunque, aun cuando, tanto… como, sino, ni ...ni, sin embargo, además	^	p ^ q
Disyunción	O, u, ya…ya, bien… bien, y/o, sea…sea	V	p V q

Nombre del conector	Lenguaje natural	Símbolo	Representación
Condicional	Si…entonces, si, siempre que, con tal que, puesto que, ya que, porque, cuando, de, a menos que, a no ser que, salvo que, solo si, solamente sí.	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$
Bicondicional	Si y solo si, Cuando y solo cuando, si… entonces y solo entonces.	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$

Fuente: La autora (2015)

Los conectores en las fórmulas lógicas se evalúan en el siguiente orden: primero la negación, luego la disyunción y conjunción y finalmente el condicional y el bicondicional. En el caso que se tengan fórmulas con conectores que tengan el mismo orden de evaluación, se evalúa la fórmula de izquierda a derecha.

Tabla 2.3. Orden de Evaluación de los Conectores Lógicos

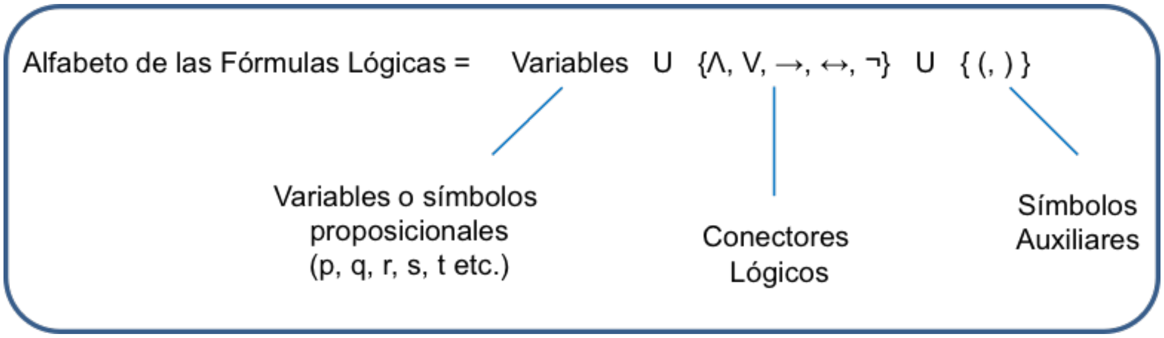
1	$\neg$
2	$\wedge$ $\vee$
3	$\rightarrow$ $\leftrightarrow$

Fuente: La autora (2015)

- Símbolos auxiliares: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }, sirven para romper el orden de evaluación de los conectores y ayudan a delimitar las fórmulas lógicas.

Resumiendo, tenemos:

Figura 2.3. Sintaxis de la Lógica de Proposiciones



Fuente: La autora (2015)

2.3.3 Reglas de Formación

Las reglas de formación ayudan a convertir expresiones del lenguaje natural al de la lógica formal. Establecen cómo combinar los símbolos para tener expresiones bien formadas. Como expresiones bien formadas se tienen:

- Una proposición atómica es una fórmula bien formada (fbf). Se sustituye la proposición por una variable.

Ejemplos:

PROPOSICIÓN ATÓMICA	LENGUAJE FORMAL (FBF)
Mario Vargas Llosa es escritor	p
El 2 o el 3 son divisores de 24	q

- Si a una fórmula bien formada se le antepone el símbolo de la negación "¬" es una fbf.

Ejemplos:

PROPOSICIÓN	LENGUAJE FORMAL (FBF)
Nunca he viajado al exterior	¬p
Las reglas no están claras	¬q

- Si “p” y “q” son fbf, entonces los siguiente también son fbf: (p Λ q), (p V q), (p → q), y (p   q).

Ejemplos:

PROPOSICIÓN	LENGUAJE FORMAL (FBF)
José estudia y trabaja	$p \wedge q$
El caballo es negro o marrón	$p \vee q$

- Si “p” y “q” son fbf, entonces, toda fórmula que esté conformada por la combinación de las opciones anteriores es una fbf.

Ejemplos:

PROPOSICIÓN	LENGUAJE FORMAL (FBF)
Si estudio y voy a clases, aprobaré el semestre y conseguiré la beca	$p \wedge q \rightarrow r \wedge s$

- Una fbf tiene un nombre y está en función del operador de mayor jerarquía. El operador de mayor jerarquía es el último en ser evaluado, también llamado término de enlace dominante. En algunos casos, es el que está fuera de los paréntesis.

Ejemplo:

LENGUAJE FORMAL (FBF)	TÉRMINO DE ENLACE DOMINANTE
	$\rightarrow$
$p \wedge q \rightarrow r \wedge s$	Primero de evalúa $p \wedge q$ luego $r \wedge s$ y finalmente el resultado de $p \wedge q \rightarrow$ con el resultado de $r \wedge s$

- El conector de la negación se escribe antes de una fórmula.

Ejemplo:

PROPOSICIÓN	LENGUAJE FORMAL (FBF)
Voy al parque porque no quiero ir al gimnasio	p → ¬q

Ejemplos:

1. Indicar si las siguientes fórmulas lógicas son fórmulas bien formadas o no (fbf).

    a) p → (p V q). Es una fbf. Es una fórmula condicional porque el conector que se evalúa al final es el condicional.

    b) p V q ^ r. Para no causar confusión en la evaluación de la fórmula, se recomienda colocar paréntesis. Podría quedar:

    p V (q ^ r). En este caso sería una fórmula disyuntiva, por ser el último conector en evaluarse.

    o (p V q) ^ r. En este caso sería una fórmula conjuntiva

    c) ¬(p   q) → ¬ (p V q). Es una fbf. Es una fórmula condicional.

    d) p¬. Es una fórmula mal formada porque el conector de la negación debe ir antes de una variable o de una expresión.

    e) p ¬ q. Es una fórmula mal formada porque el conector de la negación no va entre dos variables. Él se asocia con una variable o con una expresión y va delante de la misma.

2. A partir de los siguientes enunciados expresados en lenguaje natural, elaborar fórmulas bien formadas en lógica, sustituyendo las proposiciones atómicas por variables y los conectores por su correspondiente símbolo.

Lenguaje natural: Daba 3 pasos a la derecha y entonces iba 2 pasos hacia adelante
1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían: Daba 3 pasos a la derecha: p Iba 2 pasos hacia adelante: q 2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo el término de enlace es una conjunción “y” 3. Ahora elaboramos la fórmula
Fórmula Bien Formada en Lógica: p ^ q

Lenguaje natural	Si x = y entonces x = 2
1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían: x = y : p x = 2: q 2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo el término de enlace es un condicional “si entonces” 3. Ahora elaboramos la fórmula	
Fórmula Bien Formada en Lógica:	p → q

Lenguaje natural	La muchacha irá al teatro o irá al cine
1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían: La muchacha irá al teatro: p La muchacha irá al cine: q 2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo el término de enlace es una disyunción “o” 3. Ahora elaboramos la fórmula	
Fórmula Bien Formada en Lógica:	p V q

Lenguaje natural	El átomo no se ve, pero existe.

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   El átomo se ve: p

   El átomo existe: q

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo los términos de enlace son la conjunción "pero" y la negación "no"

3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica: $\neg p \wedge q$

Lenguaje natural	Los tigres no son paquidermos, tampoco las nutrias.

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   Los tigres son paquidermos: p

   Las nutrias son paquidermos: q

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo los términos de enlace son la negación "no" y "tampoco"

3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica: $\neg p \wedge \neg q$

Lenguaje natural	Hay 900 números naturales que se representan con tres cifras.

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   Hay 900 números naturales que se representan con tres cifras.: p

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo no hay término de enlace, por tanto es una proposición atómica

3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica: p

Lenguaje natural	Es imposible que el año no tenga 12 meses.

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   El año tiene 12 meses: p

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo hay dos términos de enlace, la negación “no” y la negación “imposible”
3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica:	$\neg\neg p$

Lenguaje natural	Si estudias y vienes a clases entonces aprobarás el examen

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   estudias: p

   vienes a clases: q

   aprobaras el examen: r

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo hay dos términos de enlace, la conjunción “y” y la condicional “si entonces”
3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica:	$(p \wedge q) \rightarrow r$

Lenguaje natural	No es cierto que este corriendo y llegue tarde

1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían:

   Estoy corriendo: p

   Llego tarde: q

2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo hay dos términos de enlace, la conjunción “y” y la negación “no es cierto”. Hay que acotar que se niega la conjunción completa de las dos proposiciones.
3. Ahora elaboramos la fórmula

Fórmula Bien Formada en Lógica:	$\neg (p \wedge q)$

Lenguaje natural	No voy a jugar, pero si voy, llevaré el balón y la malla.
1. Se identifica cada proposición y se le asigna una variable. En las proposiciones no se incluyen los conectores. Para este caso serían: Voy a jugar: p Llevaré el balón: q Llevaré la malla: r 2. Se identifica el o los términos de enlace. En este ejemplo los términos de enlace, la negación “no”, la conjunción “pero” y la condicional “si”. 3. Ahora elaboramos la fórmula	
Fórmula Bien Formada en Lógica:	$\neg p \wedge (p \rightarrow (q \wedge r))$

Ejercicios:

1. ¿Cómo se formaliza una proposición?

2. ¿Qué es una fórmula bien formada y qué es una fórmula mal formada?

2. Emparejar cada una de las palabras de la izquierda con los ejemplos en la lista de la derecha

Disyunción	$p \rightarrow q$
Negación	$p \wedge q$
Proposición condicional	q en la proposición $p \rightarrow q$
Proposición molecular	$\neg p$
Antecedente	p en la proposición $p \rightarrow q$
Consecuente	$p \vee q$
Conjunción	Cualquier proposición con un término de enlace
Proposición atómica	Cualquier proposición sin términos de enlace

2. Colocar los paréntesis para que el conector de mayor jerarquía sea el señalado.

a) conjunción $s \wedge t \vee r$

b) condicional $t \wedge s \rightarrow q$

c) negación $\neg t \rightarrow s \vee r$

d) conjunción $p \vee q \wedge t$

e) disyunción $p \vee q \rightarrow r$

f) bicondicional $\neg q \rightarrow r \leftrightarrow s \leftrightarrow t$

g) disyunción $p \vee r \rightarrow q$

3. Indique si las siguientes fórmulas lógicas están bien formadas o no. En el caso en que no esté bien formada, decir por qué.

a) $\neg p \rightarrow \neg q$

b) $(p \wedge q) \wedge \neg (r \wedge s)$

c) $\neg p \rightarrow \neg q \leftrightarrow \neg r$

d) $(p \wedge q \wedge r) \neg$

e) $\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \mid (p \wedge r) \} \rightarrow (q \leftrightarrow s)$

f) $\neg [p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)]$

g) $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \leftrightarrow (t \wedge w)$

h) $\neg pq \rightarrow q$

i) $\neg(q \rightarrow) \vee \neg p$

4. Simbolizar las proposiciones moleculares sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas y el término enlace por su correspondiente símbolo.

a) Si aumenta la demanda esto implica que aumenta la oferta y viceversa.

b) Si son más de las seis, la asamblea no ha comenzado.

c) O mi reloj está mal o llegamos tarde.

d) Cuando apruebe el examen de admisión, ingresaré a la universidad.

e) Luis trabaja despacio, pero sin pausa.

f) Sólo en el caso de que no sepas hacer el dibujo y haya dos preguntas más en el examen, deberás contestar únicamente a la primera de ellas.

g) Llegamos temprano si y solo si mi reloj está bien

h) Hoy es lunes

i) Si el tren llega a las 7 y hay taxis en la estación, entonces Juan llegará a tiempo a la reunión

j) Pedro es profesor y poeta

k) No es cierto que por mucho madrugar amanece más temprano

l) El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

m) El catolicismo, el islamismo y el judaísmo son religiones monoteístas.

n) Sólo si baja la Bolsa 15 puntos, vendes el 10% de las acciones de la empresa sin decírselo al Consejo.

o) Juan abrirá la puerta y saldrá a la calle, sólo en el caso de que, si viene María con el carro, no venga con ella Pedro

p) Vas a clases o al cine

q) Luis es profesor o es alumno, pero no puede ser ambas cosas a la vez

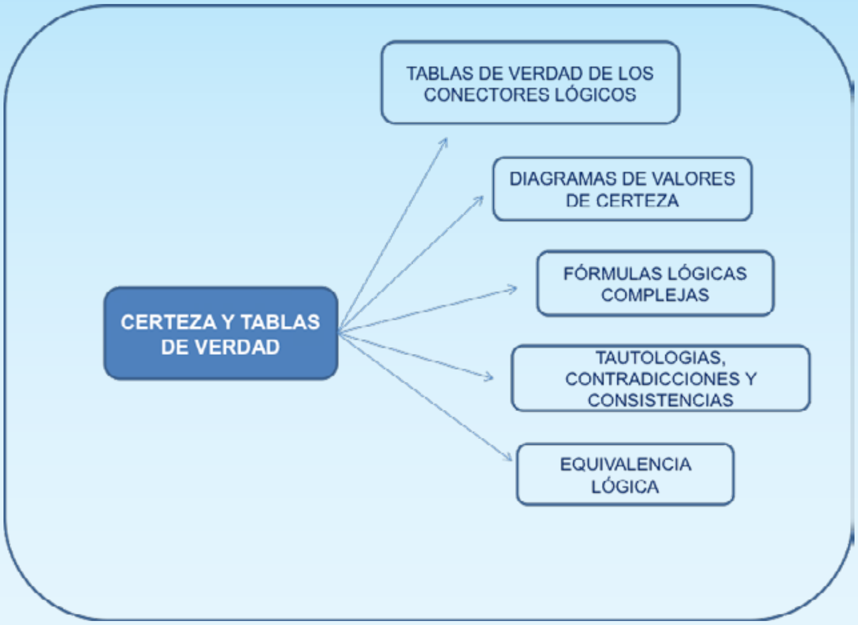
r) La universidad está sin rector.

s) Si vas al Banco, entonces abres una cuenta o tendrás problemas si necesitas abrir una cuenta.

t) Me quieras o no, tendrás que aguantarme.

Capítulo 3

Certeza y tablas de verdad



OBJETIVO Y COMPETENCIAS DEL CAPÍTULO

Comprender la tabla de verdad de los conectores lógicos y a partir de las tablas, resolver formulas lógicas utilizando diagramas de certeza y tablas de verdad.

Caracterizar las fórmulas lógicas de acuerdo al resultado final así como establecer si son equivalentes.

INTRODUCCIÓN

Este capítulo tiene como propósito establecer las relaciones entre las proposiciones. Se comienza con la idea de que cada proposición tiene un valor de certeza, esto es, cada proposición es verdadera o falsa. Para establecer la certeza, se presenta por separado la tabla de verdad de cada conector lógico.

A partir de las tablas de verdad de los conectores, se pueden resolver diagramas de certezas y tablas de verdad de fórmulas lógicas. Al resolver las fórmulas lógicas, se establece si son tautologías, contradicciones o consistencias. También se revisar el concepto de equivalencia lógica.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

3.1 Tablas de verdad de los conectores lógicos

El valor de verdad de una fórmula lógica depende de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen y se determina mediante una tabla de verdad. La tabla de verdad es un método que permite mostrar todas las combinaciones posibles de los valores de las variables para luego establecer la verdad de la fórmula.

La tabla de verdad de una variable cualquiera (por ejemplo "p") sería:

p
V
F

Valores que puede tomar la variable

Esta tabla significa que la proposición atómica "p" puede tomar uno de los dos posibles valores: verdadero (V) o falso (F).

Para elaborar la tabla de verdad de una fórmula lógica, primero debemos conocer la tabla de verdad de los conectores lógicos. Para ello, seguimos los siguientes pasos:

1. Se crean columnas para cada variable y para el conector lógico

2. Para cada variable se colocan los posibles valores que puede tomar. Recuerda que cada variable puede ser verdadera (V) o falsa (F). En la primera columna, se colocan la mitad de valores verdaderos y la otra mitad falsos. En la segunda columna también la mitad de los valores son verdaderos y la mitad falsos, pero combinándolos con la primera columna.

A continuación se presentan las tablas de verdad de cada uno de los conectores lógicos.

NEGACIÓN (¬): La negación de una proposición verdadera es falsa y la de una proposición falsa es verdadera. La negación afecta sólo a una proposición.

p	¬p
V	F
F	V

Ejemplo: Se tiene la proposición José no es vecino de Luisa.

Solución: Simbolizando, se sustituye la proposición José es vecino de Luisa por la variable: **p**.

Agregando el conector que en este caso es la negación (no), se tiene: **¬p**

Para saber el valor de certeza de esta proposición es necesario saber el valor de certeza de la variable "p". Si "p" es verdadero, la negación sería falsa y si esta es falsa, la negación sería verdadera.

CONJUNCIÓN (**L**): La conjunción de dos proposiciones es verdadera si y solo si ambas proposiciones son verdaderas. En los demás casos es falso.

p	**q**	**p** L **q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo: Se tiene el siguiente enunciado: El cumpleaños de José es en abril y el de Luisa es dos meses después. Se sabe que el cumpleaños de José es en abril, pero el de Luisa es en julio. La pregunta es ¿este enunciado es verdadero o falso?

Solución: El enunciado es una proposición molecular y tiene como conector lógico la conjunción 'Y'. Las proposiciones atómicas son:

El cumpleaños de José es en abril. La representamos con la letra **p**

El cumpleaños de Luisa es dos meses después. La representamos con la letra **q**.

En forma lógica quedaría: p L q.

De acuerdo al planteamiento, se sabe que el valor de certeza de "p" es verdadero (V), pero el de "q" es falso (F), ya que la proposición dice que el cumpleaños de Luisa es dos meses después del de José, o sea, que debería ser en junio, pero se afirma que es en julio. Al aplicar la tabla de verdad del conector ‘Y’ se puede afirmar que el valor de certeza de la fórmula es Falso (F).

DISYUNCIÓN (**V**): La disyunción de dos proposiciones es verdadera si por lo menos una de las proposiciones es verdadera.

p	**q**	**p V q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo: Indicar si p V q es verdadero o falso en cada uno de los siguientes casos:

a) p = F, q = V

b) ambas proposiciones verdaderas

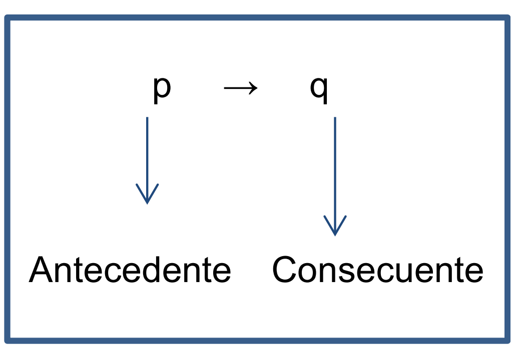
c) ambas proposiciones falsas

d) p = V, q = F

Solución: De acuerdo a la tabla de verdad del conector disyunción, se puede determinar que el valor de certeza en los casos ‘a, b y d’ es verdadero ya que una de las proposiciones es verdadera. En el caso ‘c’ el valor de certeza es falso ya que ambas proposiciones son falsas.

CONDICIONAL (**→**): Una proposición condicional es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente falso. En los demás casos, la proposición es verdadera.

Figura 3.1. Proposición Condicional



p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En lógica, en las proposiciones condicionales, no necesariamente el antecedente tiene relación con el consecuente; se pueden tener dos proposiciones atómicas que no tengan nada que ver una con la otra.

Ejemplo: Se tiene la siguiente afirmación 'Si vamos al cine, entonces dos por cuatro es ocho'. Desde el punto de vista de la lógica ¿Cuál es el valor de certeza de la afirmación?.

Solución: Las proposiciones atómicas serían:

Vamos al cine; le asignamos como variable: p

Dos por cuatro es ocho; le asignamos como variable: q

Simbolizando, tenemos: $p \rightarrow q$

Se sabe que la proposición dos por cuatro es ocho es verdadera, por tanto, se puede decir que la afirmación es verdadera ya que la tabla de verdad del conector condicional señala que en los casos en que el consecuente es verdadero, la fórmula es verdadera.

BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$): Una proposición bicondicional es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor, esto es, si sus dos valores son ambos verdaderos o falsos. En los demás casos es falsa.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo: ¿Es ¬q ↔ q siempre verdadera, siempre falsa o depende del valor de q?.

Solución: Independientemente del valor de q, el valor de certeza es falso, ya que ¬q es el valor contrario de "q", esto es, siempre van a tener valores diferentes.

Ejemplos:

1) Hallar el valor de certeza de las siguientes proposiciones:

a) (3 + 2 = 5) V (7 – 2 = 11)

Tenemos dos proposiciones unidas por el conector de la disyunción.

Proposición 1: 3 + 2 = 5 con valor de verdad verdadero (V), ya que la suma de 3 + 2 es 5.

Proposición 2: 7 – 2 = 11 con valor de verdad falso (F), ya que la resta de 7 – 2 es 5 y no 11 como lo establece la proposición.

Al revisar la tabla de verdad de la disyunción, podemos ver que conque una de las proposiciones sea verdadero, el resultado da verdadero, por tanto:

(3 + 2 = 5) V (7 – 2 = 11) = V

b) (4 – 1 = 3) → (2 - 10 = - 8)

Proposición 1: (4 – 1 = 3)   Proposición 2: (2 – 10 = -8)

V → V

V

c) (3 + 7 = 10) L (12 > 5)

Proposición 1: (3 + 7 = 10) Proposición 2: (12 > 5)

V Λ V

V

d) (12 = 2) $\leftrightarrow$ (1 + 1/2 = 3/2)

Proposición 1: (1^2 = 2) Proposición 2: (1 + 1/2 = 3/2)

F $\leftrightarrow$ V

F

3.2 Diagramas de valores de certeza

Para saber el valor de certeza de una fórmula lógica, basta con conocer los valores de certeza de sus partes. Para ello, se realiza un diagrama asignando a cada proposición atómica su valor de verdad, y después, se va analizando cada parte en función de los conectores lógicos que se presente en la fórmula hasta el conector de mayor jerarquía.

Ejemplos:

1. Utilizando diagrama de certeza, hallar el valor de verdad de la siguiente fórmula lógica: (p V q) L r, sabiendo que: p = V, q = F y r = V.

En este ejemplo, se resuelve primero lo que está entre paréntesis p V q y luego se resuelve la conjunción (L). Comenzando, se colocan los valores de certeza de cada proposición:

(p V q) L r
V F V

Luego, en este caso se resuelve primero la disyunción porque es lo que está entre paréntesis. Para ello, utilizamos la tabla de verdad de la disyunción.

(p V q) L r
V F V
V

Con el resultado obtenido de la disyunción (en este caso V), se resuelve la conjunción entre ese resultado y el valor de "r". El diagrama de certeza quedaría:

(p V q) L r
V F V
V
V

Como el resultado final es V, se dice que el valor de certeza de la fórmula es verdadero.

2. Utilizando diagrama de certeza, hallar el valor de verdad de la siguiente fórmula lógica (p L q → p) L (r V s), donde, p = V, q = V, r = F y s = F.

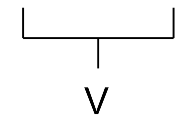
Primero: Se colocan los valores de verdad de cada proposición atómica.

(p Λ q → p) Λ (r V s)
V V V F F

Segundo: Se resuelve siguiendo el orden de precedencia de los conectores y los paréntesis. Por tanto, se resuelve p L q

$$(p \quad \Lambda \quad q \quad \rightarrow \quad p) \quad \Lambda \quad (r \quad V \quad s)$$

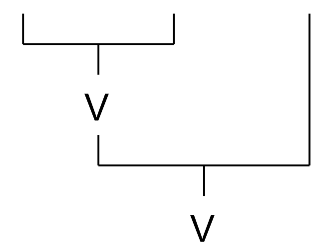
$$V \qquad\quad V \qquad\quad V \qquad\qquad F \qquad\qquad F$$



Tercero: el resultado de p L q se resuelve con → p

$$(p \quad \Lambda \quad q \quad \rightarrow \quad p) \quad \Lambda \quad (r \quad V \quad s)$$

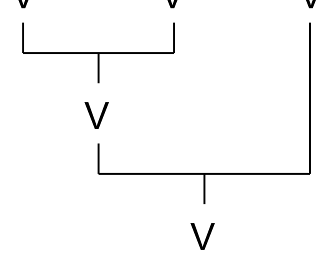
$$V \qquad\quad V \qquad\quad V \qquad\qquad F \qquad\qquad F$$



Cuarto: se resuelve r V s

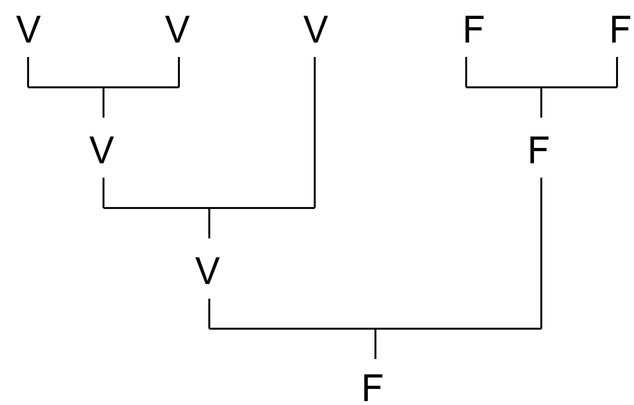
$$(p \quad \Lambda \quad q \quad \rightarrow \quad p) \quad \Lambda \quad (r \quad V \quad s)$$

$$V \qquad\quad V \qquad\quad V \qquad\qquad F \qquad\qquad F$$



Quinto: el resultado de p L q → p se resuelve con la conjunción de r V s. El diagrama de certeza quedaría:

(p Λ q → p) Λ (r V s)



En este caso, el valor de certeza de la fórmula es Falso (F).

3. Si la proposición p → (r V s) es falsa, ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

   a) (¬s V t) V ¬p

   b) r ↔ p

   c) t → ¬r

   d) (r → p) V (s → t)

El conector de mayor jerarquía es el condicional y para que de falso, el valor de "p" deber ser verdadero y el resultado de la disyunción r V s debe ser falso.

Para que la disyunción de falso, ambos valores deben ser falsos, por tanto r= falso y s = falso. Teniendo estos datos, los resultados de las proposiciones son para cada caso:

   a) Verdadero

   b) Falso

c) Verdadero

d) Verdadero

Ejercicios propuestos

1. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones por medio de sus diagramas de certeza, si a y b son proposiciones verdaderas y c y d son falsas.

   a) $(a \wedge \neg b) \leftrightarrow (a \vee d) \wedge c$

   b) $(a \wedge b) \vee c \rightarrow (a \leftrightarrow c)$

   c) $(a \rightarrow b) \rightarrow [(b \rightarrow \neg c) \rightarrow (\neg c \rightarrow a)]$

   d) $(a \vee \neg c \rightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow \neg a \vee c)$

2. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones por medio de sus diagramas de certezas, si p y q son proposiciones verdaderas y a y b son falsas.

   a) $(a \rightarrow p) \leftrightarrow (p \rightarrow a)$

   b) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$

   c) $\neg(p \wedge b) \rightarrow (\neg p \wedge \neg b)$

   d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (a \rightarrow b)$

   e) $[(p \wedge q) \rightarrow b] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow b)]$

3. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones por medio de sus diagramas de certezas, sabiendo que p y s son proposiciones verdaderas y q y r son falsas.

   a) $((p \vee q) \vee r) \wedge s$

   b) $r \rightarrow (s \wedge p)$

   c) $(p \vee r) \rightarrow (r \wedge \neg s)$

4. Si la proposición $(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg r \rightarrow s)$ es falsa, ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

   a) $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q$

   b) $(\neg r \vee q) \leftrightarrow (\neg q \vee r) \wedge s$

   c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg q)$

5. Si el valor de verdad de la fórmula $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$; es falsa, determinar los valores de verdad de p, q y r.

6. Si la proposición $(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)$ es falsa, hallar el valor de verdad de las siguientes fórmulas:

   a) $\neg (p \vee r) \rightarrow (p \vee q)$

   b) $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$

   c) $[(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)] \leftrightarrow (p \vee \neg r)$

3.3 Fórmulas lógicas complejas

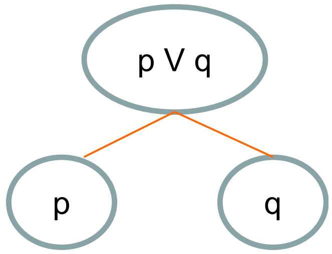
En el caso en que no se tengan los valores de verdad de las proposiciones atómicas, se debe realizar la tabla de verdad de la fórmula molecular compleja. De cualquier fórmula se puede obtener su tabla de verdad, que varía dependiendo del número de proposiciones atómicas que la conforman y su dificultad. Para resolver fórmulas donde se tienen varias variables y varios operadores se procede de la siguiente manera:

1. Se establece la jerarquía de los conectores, de acuerdo al orden de evaluación de los conectores y de los símbolos auxiliares que tenga la fórmula lógica.

2. Se determina el número de columnas y filas que conforman la fórmula. Para calcular el número de columnas, se elabora el árbol estructural de la fórmula.

Lo explicaremos con un ejemplo:

Si se tiene la fórmula p V q, el árbol estructural sería el conjunto formado por {p, q, p V q}, que se representa de la siguiente manera:



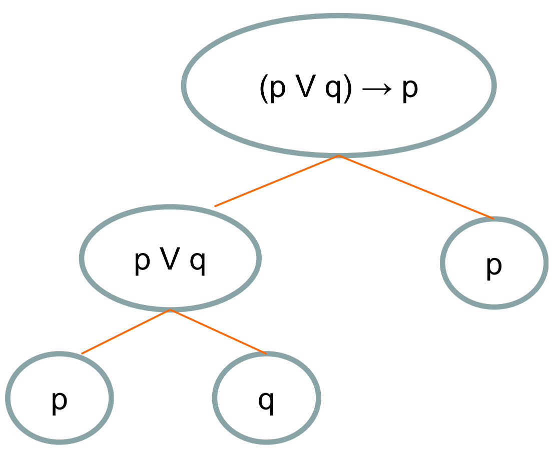
Del árbol estructural podemos decir que la tabla de verdad tendrá tantas columnas como elementos no repetidos tenga el árbol estructural. A cada columna le corresponde uno de los elementos, desde los más simples hasta los más complejos. Para este caso, se tienen 3 columnas, una para la variable "p", una para la "q" y la tercera para la fórmula p V q.

3. Para el número de filas se aplica la fórmula: 2n, siendo el valor constante 2 los posible valores que puede tomar la variable (V o F) y n el número de variables que forman la fórmula lógica.

Ejemplos:

1. **Se tiene la siguiente fórmula lógica**: (p V q) → p. Para resolverla, hacemos lo siguiente:

   Primero: Elaboramos el árbol estructural de la fórmula para determinar el número de columnas. Quedaría:



En este caso, el árbol estructural tiene 5 elementos, pero como la variable “p” aparece dos veces, se cuenta una sola vez, por tanto, la tabla de verdad estará formada por 4 columnas.

Segundo: Se colocan las columnas de las variables que están en la fórmula con sus respectivos valores. Como son dos variables, el número de filas es 22 = 4

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

Tercero: Se van creando columnas de acuerdo a la fórmula que se va a resolver. En este caso, por estar entre paréntesis, se resuelve primero p V q utilizando la tabla de verdad del conector disyunción.

p	**q**	**p V q**
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

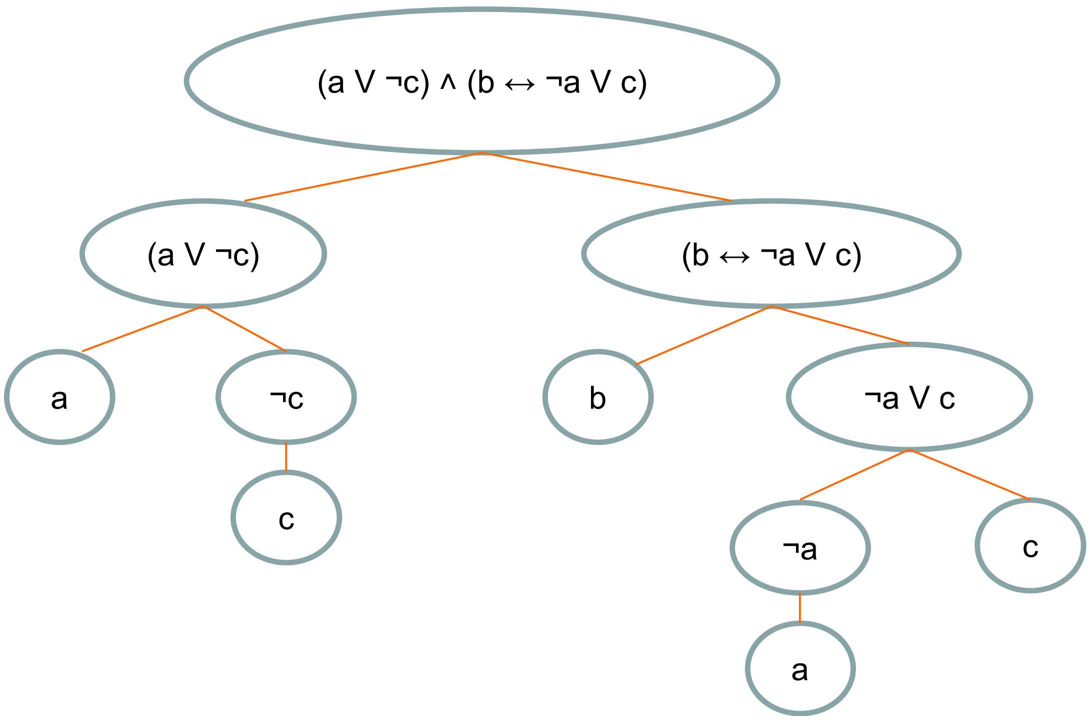
Cuarto: el resultado final se obtiene de aplicar la tabla de verdad del conector condicional con la primera columna que es donde están los valores de la variable “p” y la columna 3 que es donde están los resultados de p V q. Debemos recordar que cuando se utiliza el conector condicional, se debe diferenciar el antecedente del consecuente y evaluarlo en ese orden.

p	**q**	**p V q**	**(p V q) → p** **Columna 3 → columna 1**
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2. **Resolver la siguiente fórmula lógica:** (a V ¬c) Λ (b ↔ ¬a V c)

Como se tienen 3 variables, el número de filas es (2)3 = 8.

Se elabora el árbol estructural y queda:



De acuerdo al árbol estructural, tenemos 9 columnas ya que “a” y “c” aparecen dos veces. Se crean las 3 primeras columnas con las variables “a”, “b” y “c”. Luego se va resolviendo la fórmula por parte en función de los paréntesis y del orden de los conectores.

Para este caso se resuelve en el siguiente orden:

1	¬c
2	a V ¬c
3	¬a
4	¬a V c
5	b ↔ ¬a V c
6	(a V ¬c) Λ (b ↔ ¬a V c)

La tabla de verdad quedaría:

a	b	c	¬c	a V ¬c	¬a	¬a V c	b ↔ ¬a V c	(a V ¬c) Λ (b ↔ ¬a V c)
V	V	V	F	V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	V	F	V	F	**F**
V	F	F	V	V	F	F	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	**F**
F	F	V	F	F	V	V	F	**F**
F	V	F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	F	V	V	V	**F**

Este es el resultado

A partir del siguiente enunciado: Si pasas el examen, entonces pasas el módulo; y si apruebas el proyecto, entonces apruebas el subproyecto, elaborar la fórmula lógica y la tabla de verdad.

Se le asigna una variable a cada proposición:

Pasas el examen: p

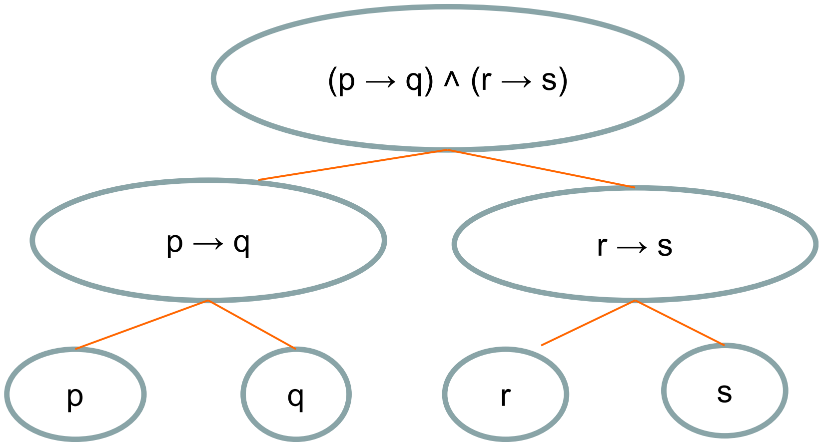
Pasas el módulo: q

Apruebas el proyecto: r

Apruebas el subproyecto: s

Se elabora la fórmula lógica, quedando: (p → q) Λ (r → s)

A continuación, procedemos a elaborar el árbol estructural:



Y finalmente la tabla de verdad quedaría:

p	q	r	s	p → q	(r → s)	**(p → q) Λ (r → s)**
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	V	F	V	F	**F**
V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	V	F	V	**F**
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	V	**F**
V	F	F	V	F	V	**F**
V	F	V	F	F	F	**F**
F	F	F	F	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	F	**F**
F	V	F	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	F	**F**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**

3.4 Tautologías, contradicciones y consistencias

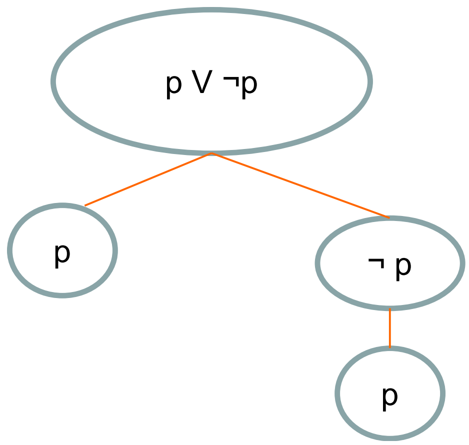
La tabla de verdad permite clasificar a las fórmulas lógicas teniendo en cuenta su resultado final (última columna) en: tautológicas, contradictorias y consistentes.

<u>Tautología</u>: Una fórmula lógica es una tautología si su resultado final para todos los casos es verdadero.

Ejemplos:

1. **Se tiene la siguiente fórmula lógica: p V ¬ p**

Determinamos el número de columnas a través del árbol estructural:



Al realizar la tabla de verdad se tiene:

p	¬ p	**p V ¬ p**
V	F	**V**
F	V	**V**

Resultado Final

Como se puede observar, las columnas del resultado final son todas verdaderas, por tanto es una tautología.

2. **Elaborar la tabla de verdad de la siguiente fórmula: p V q → p**

Como este ejercicio se hizo previamente, no hace falta elaborar el árbol estructural y la tabla de verdad queda.

p	q	p V q	**p V q → p**
V	V	V	**V**

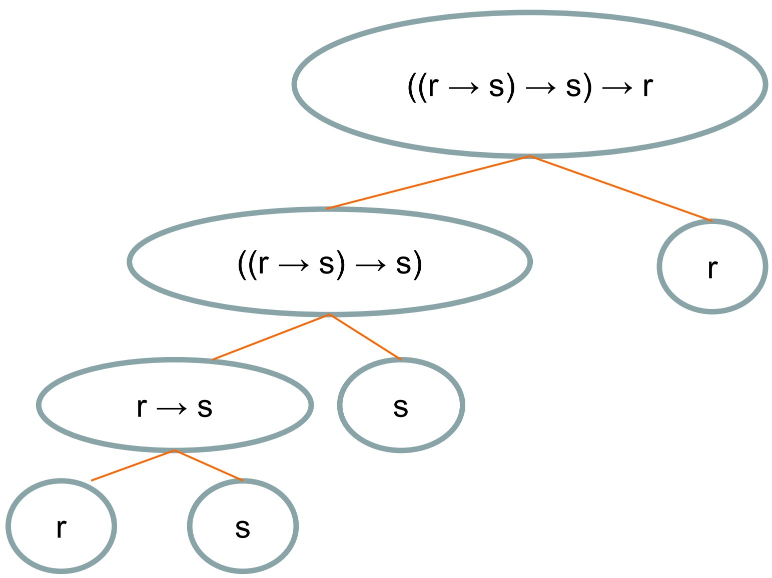
V	F	V	**V**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

En este caso no es una tautología ya que en el resultado final, uno de los valores es falso.

Consistencia o Contingencia: una fórmula lógica en una consistencia si en el resultado final se tienen valores verdaderos y falsos.

Ejemplos

1. **Para la siguiente fórmula (s ↔ ¬ r) V q**, el árbol estructural es:



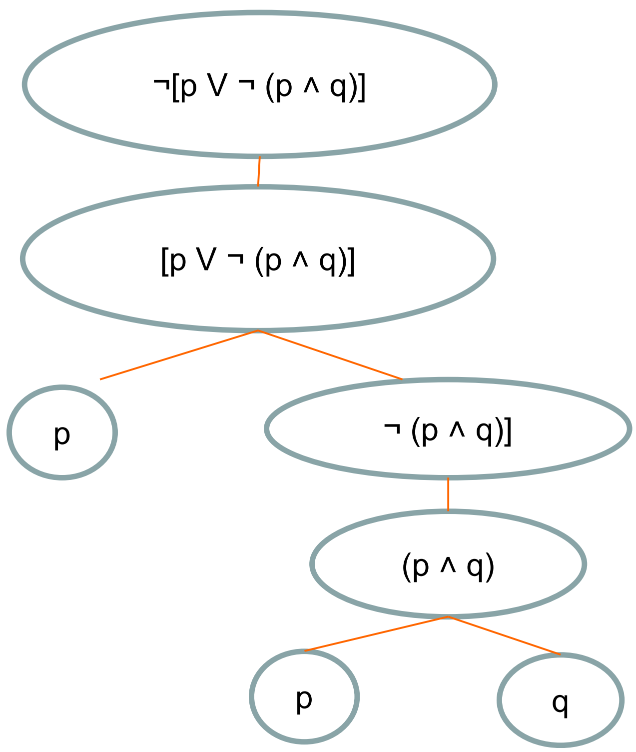
Y la tabla de verdad queda:

r	s	q	¬ r	s ↔ ¬ r	**(s ↔ ¬ r) V q**
V	V	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	**V**
V	V	F	F	F	**F**
V	F	F	F	V	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	**V**

F	F	V	V	F	**V**
F	F	F	V	F	**F**

Por tener en la columna del resultado final, valores V y F es una consistencia

1. **Para la siguiente fórmula ((r → s) → s) → r**, el árbol estructural es:



Y la tabla de verdad queda:

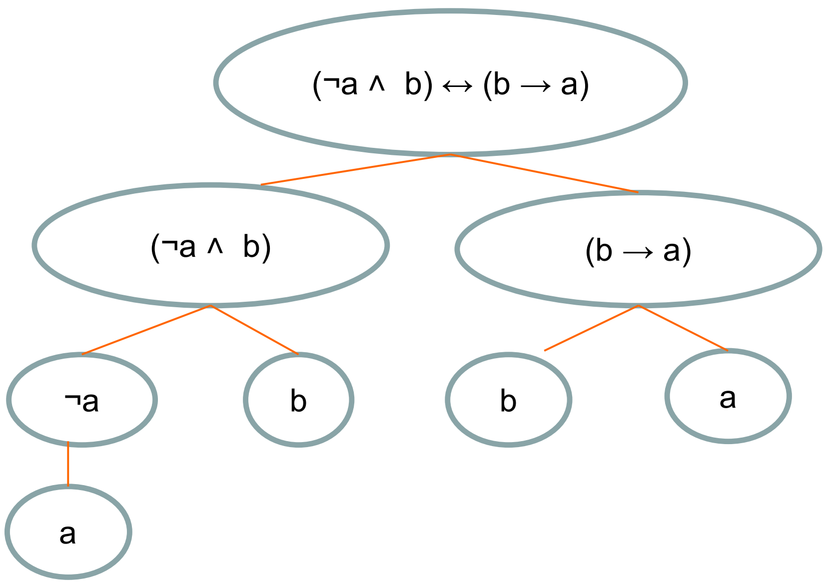
s	r	r → s	((r → s) → s)	**((r → s) → s)→ r**
V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	**F**
F	V	F	V	**V**
F	F	V	F	**V**

Por los valores del resultado final, se puede determinar que es una consistencia.

Contradicción: Una fórmula lógica es una contradicción cuando al realizarse la tabla de verdad, todos los valores del resultado final son falsos.

Ejemplos

1 . **Para la fórmula lógica ¬ [p V ¬ (p Λ q)]**, el árbol estructural es:

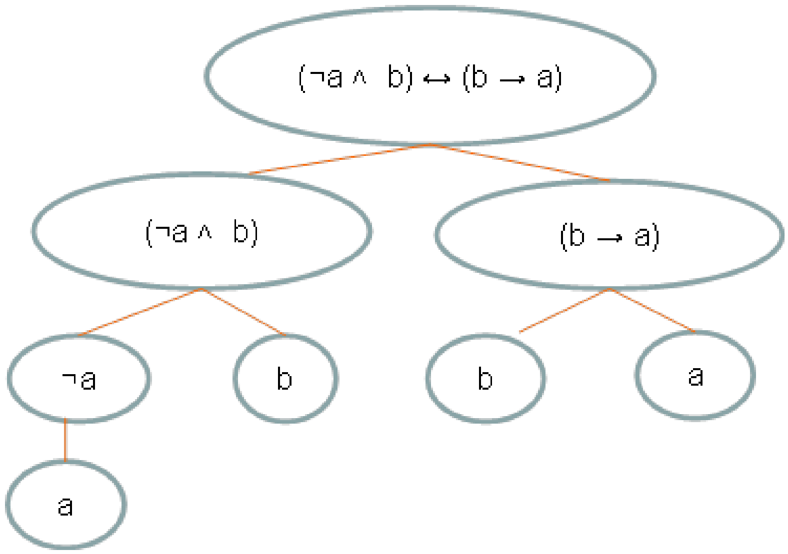


Y la tabla de verdad es:

p	q	p Λ q	¬ (p Λ q)	p V ¬ (p Λ q)	**¬ [p V ¬ (p Λ q)]**
V	V	V	F	V	**F**
V	F	F	V	V	**F**
F	V	F	V	V	**F**
F	F	F	V	V	**F**

Por ser todos los valores del resultado final falsos (F), se dice que la fórmula es una contradicción.

2. **Para la fórmula lógica (¬ a Λ b) ↔ (b → a),** el árbol estructural es:



Y la tabla de verdad es:

a	b	¬ a	¬ a ∧ b	(b → a)	**¬ a ∧ b ↔ (b → a)**
V	V	F	F	V	**F**
V	F	F	F	V	**F**
F	V	V	V	F	**F**
F	F	V	F	V	**F**

Por ser todos los valores del resultado final F, se dice que la fórmula es una contradicción.

Ejercicios propuestos

1) Para cada una de las siguientes fórmulas proposicionales, determinar si son tautología, contradicción o contingencia

a) p → ¬p

b) p ∧ ¬p

c) p ∨ ¬p

d) p ↔ ¬p

e) p → (q → p)

f) (p ↔ q) ∧ p ∧ ¬q

g) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$

h) $\neg (p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

i) $(p \rightarrow \neg q) \wedge p \wedge q$

j) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

k) $(q \rightarrow r) \rightarrow \neg (q \vee r)$

2) Si P es una tautología, entonces $\neg\neg p$ es una:

a) Contradicción

b) Tautología

c) Contingencia

3) Si p y q son tautologías, entonces, p L q es una:

a) Contradicción

b) Tautología

c) Contingencia

4) Si p es una contradicción y q una fórmula proposicional cualquiera, entonces

a) $p \rightarrow q$ es una:

b) Contradicción

c) Tautología

d) Contingencia

5) Si p es una tautología y q una contradicción, entonces $p \vee q$ es una:

a) Contradicción

b) Tautología

c) Contingencia

6) Si p y q son contradicciones, entonces p ↔ q es una:

a) Contradicción

b) Tautología

c) Contingencia

3.5 Equivalencia lógica

Dos fórmulas lógicas son equivalentes si al realizar sus tablas de verdad, el resultado es el mismo. Se simboliza p ⟷ q

Ejemplo 1:

p	¬p	¬¬p
V	F	V
F	V	F

Como se puede observar, la proposición p es equivalente a la proposición ¬¬p ya que sus valores de certeza son iguales en todos los casos.

Ejemplo 2*:* Determinar si a Λ ¬b y ¬ (¬a V b) son equivalentes

a	b	¬b	¬a	a L ¬b	¬a V b	¬ (¬a V b)
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Son equivalentes

Ejercicios propuestos

1. Todas las proposiciones que son tautológicas, ¿son equivalentes?

2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes a:

(¬p V ¬q) Λ r

a) $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$

b) $(p \rightarrow q) \wedge r$

c) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$

d) $p \rightarrow (q \vee r)$

3. Demostrar que las siguientes fórmulas son equivalentes utilizando tablas de verdad:

a) $\neg(p \wedge \neg q) \longleftrightarrow \neg p \vee q$

b) $\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

c) $p \vee (q \wedge \neg q) \longleftrightarrow p$

d) $p \rightarrow q \longleftrightarrow \neg p \vee q$

e) $p \rightarrow (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow r \longleftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

f) $\neg p \longleftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge q)] \wedge (p \rightarrow q)$

4. Determine si las siguientes fórmulas lógicas son equivalentes o no.

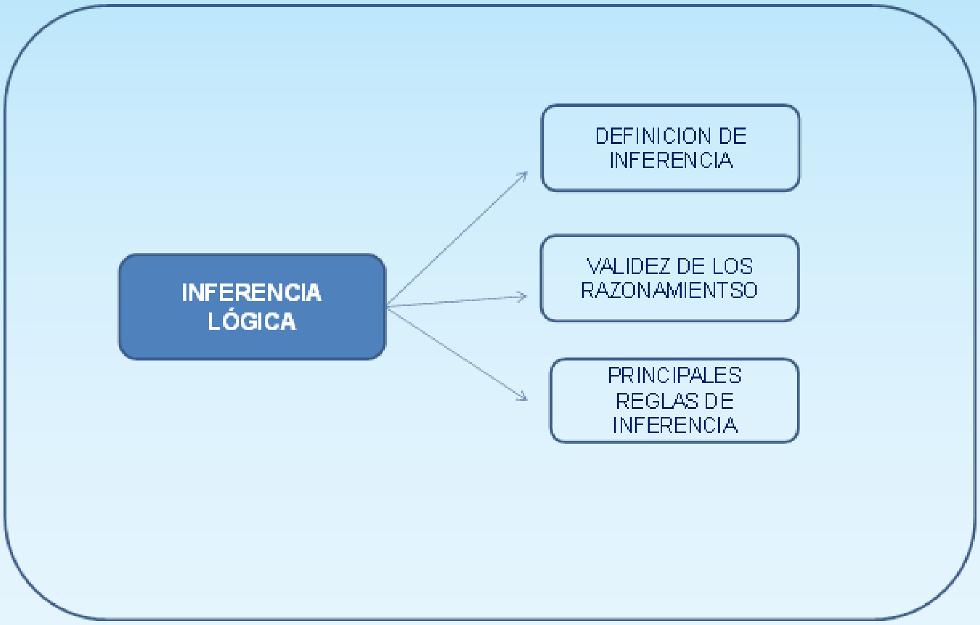
a) $p \rightarrow (q \wedge r)$ con $\neg p \vee (q \wedge r)$

b) $(p \wedge \neg q) \vee \neg(q \wedge \neg p)$ con $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

c) $p \rightarrow q$ con $\neg p \rightarrow \neg q$

Capítulo 4

Inferencia Lógica



OBJETIVO Y COMPETENCIAS DEL CAPÍTULO

Conocer los métodos para establecer la validez de los razonamientos utilizando varios métodos.

Conocer las reglas de inferencia y utilizarlas para deducir conclusiones a partir de las premisas dadas. También utilizar las reglas para verificar que de las premisas dadas, se puede obtener la conclusión dada.

INTRODUCCIÓN

En la lógica formal, se tienen dos elementos fundamentales: la inferencia y la deducción. En ellas, se tienen un conjunto de fórmulas que se denominan premisas. El objetivo de la inferencia es utilizar un conjunto de reglas de manera que nos lleven a otras fórmulas llamadas conclusión. La deducción es el paso lógico que nos lleva de las premisas a la conclusión y esta conclusión es consecuencia lógica de las premisas. En la primera parte del capítulo estudiamos la validez utilizando las tablas de verdad.

Cuando se tienen muchas variables, determinar la validez con las tablas de verdad puede resultar tedioso. Por ello, en este capítulo también se exponen un conjunto de reglas que ya han sido verificadas y validadas y las utilizamos para a partir de ella deducir conclusiones.

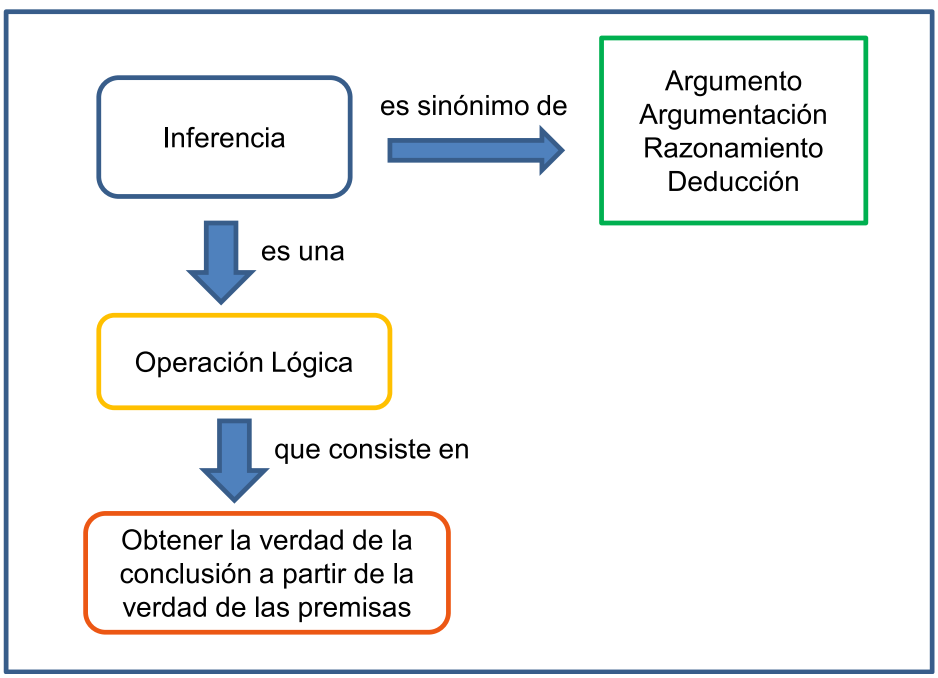
CONTENIDO DEL CAPÍTULO

4.1 Definición de Inferencia

La inferencia es la forma en la que se obtienen conclusiones en función de datos y declaraciones establecidas. Es una operación lógica que consiste en obtener a partir de la verdad de proposiciones llamadas premisas, la verdad de otra proposición llamada conclusión (Suppes y Hill 1988).

Las premisas son proposiciones que ofrecen las razones para aceptar la conclusión y la conclusión es la proposición que se afirma sobre la base de las premisas. En un enunciado, a la conclusión le preceden palabras como: luego, por tanto, en consecuencia.

Figura 4.1. Definición de Inferencia



Fuente: La autora (2015)

Ejemplos:

a) Los venezolanos hablan español. Juan Carlos es venezolano. Por tanto, Juan Carlos habla español

Premisas: Los venezolanos hablan español.
Juan Carlos es venezolano.

Conclusión: Juan Carlos habla español.

b) La autoridad puede hacer lo que dice la ley. La población tiene prohibido lo establecido en la ley. En consecuencia, las autoridades no pueden hacer lo que quieren, y las personas pueden hacer todo lo que quieran menos lo que les prohíbe la ley.

Premisas: La autoridad puede hacer lo que dice la ley.
La población tiene prohibido lo establecido en la ley.

Conclusión: Las autoridades no pueden hacer lo que quieren, y las personas
pueden hacer todo lo que quieran menos lo que les prohíbe la ley.

c) La lectura de un buen libro entretiene. Me gusta leer. Por tanto, leer me entretiene.

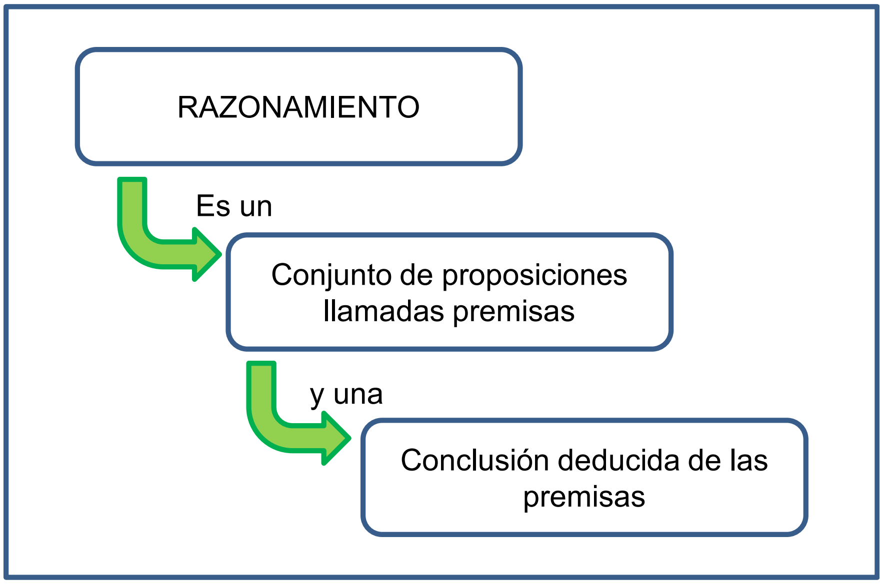
Premisas: La lectura de un buen libro entretiene.
Me gusta leer.

Conclusión: Leer me entretiene.

4.2 Validez de los Razonamientos

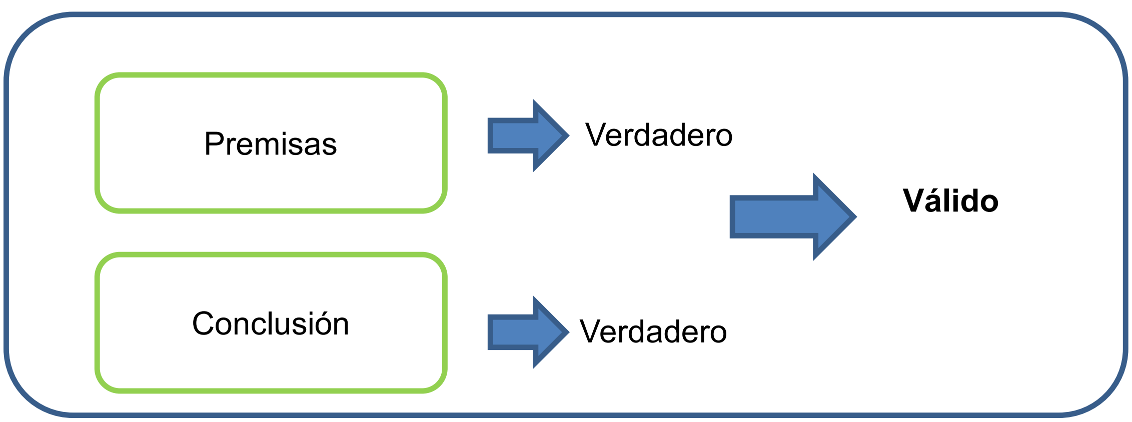
Una argumentación o razonamiento en lenguaje natural está compuesto por varios enunciados que se llaman premisas, y que a partir de los cuales se pretende llegar a otro enunciado llamado conclusión. Si un razonamiento es válido, entonces en cada valor de certeza, si las premisas son verdaderas, también es verdadera la conclusión. No se pueden tener situaciones donde las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa simultáneamente.

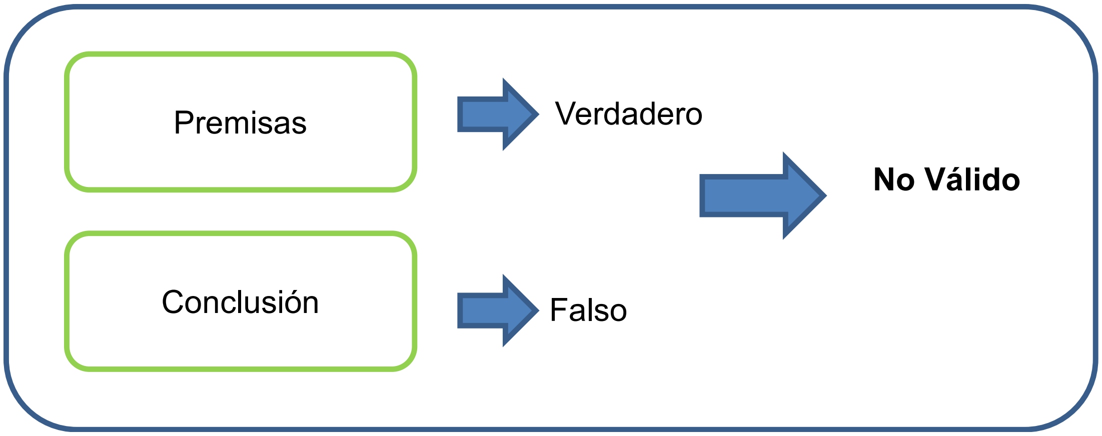
Figura 4.2. Definición de Razonamiento Formal



Fuente: La autora (2015)

Figura 4.3. Validez de los Razonamientos





Fuente: La autora (2015)

4.2.1 Métodos para Determinar la Validez o no Validez de una Conclusión

4.2.1.1 Método 1

Para demostrar si una inferencia es válida o no, se puede dar una interpretación por medio de los valores de certeza. Para comprobar la validez de la conclusión se procede de la siguiente manera:

- Se simbolizan las premisas y la conclusión como fórmulas en lógica proposicional.

↓

- Se elaboran los diagramas de certeza tanto de las premisas como de la conclusión.

↓

- Para que sea válido el razonamiento, si el valor de verdad de las premisas es verdadero, el valor de verdad de la conclusión también debe ser verdadero. Si esto no se cumple , el razonamiento es inválido

Ejemplo 1:

Premisa 1: Si usted vive en Barquisimeto, entonces usted es ciudadano de Venezuela.

Premisa 2: Usted es ciudadano de Venezuela.

Conclusión: Por tanto, usted vive en Barquisimeto.

Lo primero que debemos hacer es representar los enunciados en fórmulas lógicas. Para ello a cada proposición le asignamos una variable.

p: usted vive en Barquisimeto

q: usted es ciudadano de Venezuela

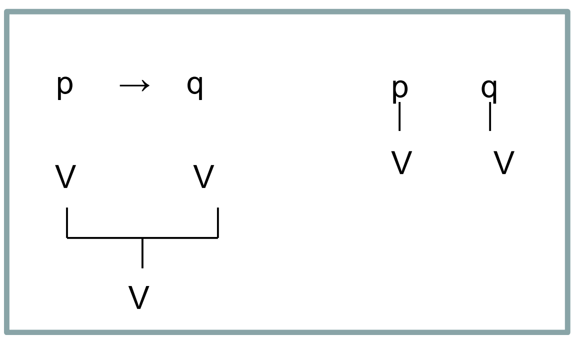
Seguidamente, simbolizamos las premisas y la conclusión; se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} p \to q \\ q \end{array}\right\} \text{Premisas}$$

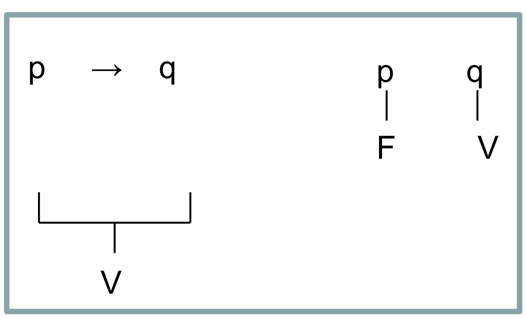
$$\underline{\qquad\qquad}$$

$$p \quad \text{Conclusión}$$

En el caso en que la persona viva en Barquisimeto, el resultado sería:



En el caso en que la persona no viva en Barquisimeto, el resultado sería:



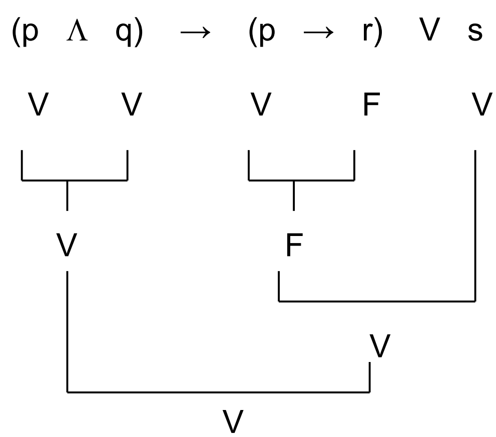
En este ejemplo, la inferencia es inválida ya que las premisas son ciertas y la conclusión falsa.

Ejemplo 2:

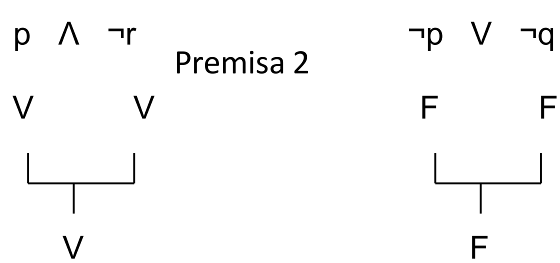
Demostrar que la inferencia es inválida, esto es, que la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas, sabiendo que p = V, q = V, s = V y r = F

(p L q) → (p → r) v s
p L ¬r
} Premisas

¬p v ¬q   Conclusión



Premisa 1



Premisa 2

Conclusión

El resultado de las premisas es verdadero y la conclusión es falsa, por tanto la inferencia es inválida.

4.2.1.2 Método 2

Se puede dar el caso en que no se tenga los valores de certeza de las proposiciones moleculares; para este caso, se debe realizar la tabla de verdad de las premisas y la conclusión.

Se simbolizan las premisas y la conclusión como fórmulas en lógica proposicional.

↓

Se elaboran las tablas de verdad de las premisas y de la conclusión.

↓

Para que sea válido, donde todas las premisas que intervienen su valores de verdad sean verdadero, la conclusión también debe dar verdadero, sino la inferencia será inválida

Ejemplo 1:

Si usted vive en Barinas, entonces usted es ciudadano de Venezuela. Usted es ciudadano de Venezuela. Por tanto, usted vive en Barinas

p: usted vive en Barinas

q: usted es ciudadano de Venezuela

$$\left.\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \end{array}\right\} \text{Premisas}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{p \quad \text{Conclusión}}$$

La tabla de verdad quedaría:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F

Este resultado hace inválido los razonamientos

F	V	V
F	F	V
Conclusión	Premisa	Premisa

Como se observa en la tabla de verdad, los recuadros resaltados en amarillo son los valores donde para ambas premisas (q y p → q) los valores de verdad son verdaderos y los valores resaltados en azul son los valores de verdad de la conclusión (p) donde deberían dar verdadero. Como hay un caso en la conclusión en que dio falso, la inferencia es inválida.

Ejemplo 2:

Demostrar que la inferencia es válida

$$\begin{array}{l} \neg q \\ \neg r \rightarrow q \\ \hline r \end{array}$$

r	q	¬q	¬r	¬r → q
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	F

En este caso, donde ambas premisas dieron verdadero, la conclusión también fue verdadera, por tanto, la inferencia es válida.

Ejemplo 3*:*

Determinar si la inferencia es válida o inválida

$X = 2 \vee X < 2$. $X = 3 \rightarrow X \neq 2$. $X = 3 \rightarrow X \nless 2$. Por tanto, $X \neq 3$

Se le asignan variables a cada proposición y se tiene que:

p : $X = 2$, q : $X < 2$, r : $X = 3$

Cuando se tengan fórmulas como en este ejemplo donde se tiene = y =, el signo tachado significa negación de la proposición.

Simbolizando las fórmulas, se tiene:

$$p \vee q$$

$$r \rightarrow \neg p$$

$$r \rightarrow \neg q$$

$$\overline{}$$

$$\neg r$$

Se realiza la tabla de verdad de las premisas y la conclusión y se tiene:

p	q	r	¬p	¬q	¬r	p v q	r → ¬p	r → ¬q
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V	V

En este caso, donde el resultado de las premisas es verdadero, la conclusión también fue verdadera, por tanto, la inferencia es válida.

4.2.1.3 Método 3

Utilizando este método, se considera una inferencia válida si al representar en una sola fórmula las premisas y la conclusión, y al elaborar su tabla de verdad, el resultado es una tautología.

1. Se formalizan las premisas y la conclusión como fórmulas de lógica proposicional.

⬇

2. Se construye una fórmula condicional teniendo como antecedente las premisas unidas con el conector conjuntivo y como consecuente la conclusión.

3. Se elabora la tabla de verdad de la fórmula lógica. Si el resultado es una tautología, la inferencia es válida; en cambio, si el resultado es una consistencia o una contradicción, la inferencia es inválida.

Ejemplo 1:

Determinar si el siguiente razonamiento es válido o inválido

Si es un elefante tiene pulmones. Tiene pulmones. Por tanto, es un elefante

Primero: Formalizar las premisas y la conclusión

p: Es un elefante

q: Tiene pulmones

Premisa 1: Si es un elefante tiene pulmones: $p \rightarrow q$

Premisa 2: Tiene pulmones: q

Conclusión: Es un elefante: p

Segundo: Se construye la fórmula condicional, quedando:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

Tercero: Se construye la tabla de verdad

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Resultado final

Como el resultado final es una consistencia, la inferencia es inválida.

Ejemplo 2:

X es sinónimo de Y, e Y es sinónimo de Z. Por lo tanto, X es sinónimo de Z.

Primero: se formalizan las premisas y la conclusión

p: X es sinónimo de Y

q: Y es sinónimo de Z

r: X es sinónimo de Z

Premisa 1: X es sinónimo de Y, e Y es sinónimo de Z: $p \wedge q$

Conclusión: X es sinónimo de Z: r

Segundo: Se construye la fórmula condicional, quedando:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Tercero: Se construye la tabla de verdad

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	F	F	V
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V

Por ser el resultado final una consistencia, la inferencia es inválida.

Ejemplo 3:

Si hay vida inteligente en Marte entonces, si tuviera una forma que se pudiera reconocer, ya se habría descubierto. Si no hemos descubierto vida inteligente en Marte, debe tener una forma que no podemos reconocer. No hemos descubierto forma de vida inteligente. Por tanto, no existe vida inteligente o existe pero no la reconocemos.

Primero: se formalizan las premisas y la conclusión

p: Hay vida inteligente en Marte

q: Hay forma de reconocer la vida en Marte

r: Se ha descubierto vida inteligente en Marte

Premisa 1: Si hay vida inteligente en Marte entonces, si tuviera una forma que se pudiera reconocer, ya se habría descubierto. $p \to q \to r$

Premisa 2: Si no hemos descubierto vida inteligente en Marte, debe tener una forma que no podemos reconocer. $\neg r \to \neg q$

Premisa 3: No hemos descubierto forma de vida inteligente. $\neg r$

Conclusión: No existe vida inteligente o existe pero no la reconocemos.

$\neg p \vee p \wedge \neg q$

Segundo: Se construye la fórmula condicional, quedando:

$$[(p \to q \to r) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge \neg r] \to (\neg p \vee p \wedge \neg q)$$

Tercero: Se construye la tabla de verdad

p	q	r	$p \to q$	$p \to q \to r$	$\neg r$	$\neg q$	$\neg r \to \neg q$	$(p \to q \to r) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge \neg r$	$\neg p$	$\neg p \vee p$	$\neg p \vee p \wedge \neg q$	$[(p \to q \to r) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge \neg r] \to (\neg p \vee p \wedge \neg q)$
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V

Por ser el resultado final una tautología, la inferencia es válida

4.3 Reglas de inferencia

En lógica, una regla de inferencia es un esquema para construir inferencias válidas. Estos esquemas establecen relaciones entre un conjunto de fórmulas llamadas premisas y la conclusión, que es considerado razonamiento formal.

Una deducción formal es una serie de proposiciones y pasos, donde cada paso es otra premisa obtenida de aplicar las reglas de inferencia hasta llegar a la conclusión. Las siguientes reglas se explican utilizando como referencia las variables "p" y "q". Estas reglas se aplican tanto si "p" y "q" son proposiciones atómicas como moleculares.

La eficiencia para resolver los ejercicios depende de la capacidad natural o estudiada de la persona que resuelve el ejercicio. Para realizar la deducción utilizando las reglas de inferencia se siguen los siguientes pasos.

1. Si el enunciado está en lenguaje natural, se identifica cada proposición y se le asigna a cada proposición una variable.

⬇

2. Se formalizan las premisas y la conclusión. La conclusión se coloca al inicio de la fórmula sin enumerarse y seguidamente se colocan las premisas que van enumeradas.

⬇

3. Se comienza a resolver utilizando las premisas que sean factibles de aplicarle determinada regla. El resultado se enumera y en el lado derecho se coloca la abreviatura de la regla junto con el número de las premisas que intervinieron.

También se tienen ejercicios donde se dan las premisas y se debe deducir la conclusión. A continuación se presentan las reglas de inferencia que utilizamos para hacer las deducciones.

4.3.1 Regla Modus Ponendo Ponens (PP)

El condicional es aquella operación que establece entre dos proposiciones una relación de causa-efecto. La regla en un condicional establece que, si el antecedente (primer término, en este caso "p") se afirma, necesariamente se afirma el consecuente (segundo término, en este caso "q"). Esta regla de inferencia es el método (modus), que afirma (Ponens) el consecuente, afirmando el (Ponendo) el antecedente.

Premisa 1:	$p \rightarrow q$
Premisa 2:	p
Conclusión 3:	q PP(1,2)

Ejemplo: En los siguientes casos, deducir la conclusión utilizando la regla de inferencia Modus Ponendo Ponens (PP).

Caso 1	**Caso 2**
1) Si estudio o recibo clases adicionales, aprobaré el examen. 2) Estudio o recibo clases adicionales. Se simbolizan las proposiciones: p: estudio q: recibo clases adicionales r: Aprobaré el examen Se representan las premisas en forma lógica: 1) p v q → r 2) p v q Se resuelve: La premisa 1 es una fórmula condicional, teniendo como antecedente "p v q" y como consecuente "r". En la segunda premisa se tiene el antecedente de la premisa 1, por tanto aplicando la regla Ponendo Ponens, se tiene como conclusión 'r'. En el resultado se debe indicar la regla que se utiliza y con qué premisas se obtuvo. Así, se tiene: 1) p v q → r 2) p v q 3) r (PP 1,2)	1) p → q L r 2) p En este caso, la premisa 1 tiene como antecedente "p" y en la premisa 2 se tiene como fórmula "p", por tanto la conclusión es el consecuente de la premisa 1. 1) p → q L r 2) p 3) q L r (PP 1,2)

En los siguientes casos, demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:	**Solución:**
¬t 1) r → ¬t 2) s → r 3) s	En este caso, se tienen 3 premisas numeradas y la conclusión es "¬t" que es lo que se quiere demostrar. Podemos ver que la premisa 3 es el antecedente de la premisa 2, por tanto, se aplica la regla Ponendo Ponens y se obtiene "r" como premisa 4. Seguidamente, esa premisa 4 es el antecedente de la premisa 1. Al volver a aplicar la regla Ponendo Ponens, se tiene como conclusión "¬t" que es lo que queremos demostrar. Así, tenemos: ¬t 1) r → ¬t 2) s → r 3) s 4) r (PP 2,3) 5) ¬t (PP 1,4)
Caso 2:	**Solución:**
m v n 1) ¬j → m v n 2) f v g → ¬j 3) f v g	m v n 1) ¬j → m v n 2) f v g → ¬j 3) f v g 4) ¬j (PP 2,3) 5) m v n (PP 1,4)

4.3.2 Regla Doble Negación (DN)

Es una regla que permite pasar de una premisa única a la conclusión. La regla establece que si una proposición está doblemente negada, equivaldría a la proposición afirmada. "p" doblemente negada equivale a "p".

Premisa 1:	p	Premisa 1:	¬ ¬ p
Conclusión 2:	¬ ¬ p DN(1)	Conclusión 2:	p DN(1)

Ejemplo: En los siguientes casos, demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:	**Solución:**
¬¬t 1) s → t 2) s	En la medida en que vamos revisando las reglas, las podemos utilizar en conjunto. Para este ejemplo, utilizamos la regla Ponendo Ponens en las premisas 1 y 2, y luego aplicamos la doble negación. Así, tenemos: ¬¬t 1) s → t 2) s 3) t (PP 1,2) 4) ¬¬t (DN 3)
Caso 2:	**Solución:**
q 1)j → k L m 2) j 3) k L m → ¬¬q	En el ejercicio se parte de 3 premisas, la premisa 4 se obtiene aplicando la regla Ponendo Ponens en las premisas 1 y 2. La premisa 5 se obtiene de aplicar la regla Ponendo Ponens a las premisas 3 y 4. Finalmente, se aplica la regla doble negación sobre la premisa 5 para obtener la conclusión (la numerada con 6), que en este caso es "q". q 1) j → k L m 2) j 3) k L m → ¬¬q 4) k L m (PP 1,2) 5) ¬¬q (PP 3,4) 6) q (DN 5)

4.3.3 Regla Modus Tollendo Tollens (TT)

Se refiere a una propiedad inversa de los condicionales. Si de un condicional, aparece como premisa el consecuente negado, eso nos conduce a negar el antecedente, puesto que si un efecto no se da, su causa no ha podido darse.

La regla Tollendo Tollens sólo permite negar a partir del consecuente (segundo término del condicional); ambas consecuencias se derivan de que el condicional es una flecha que apunta en un único sentido, lo que hace que sólo se pueda afirmar a partir del antecedente y negar sólo a partir del consecuente.

Premisa 1:	p → q
Premisa 2:	¬q
Conclusión 3:	¬ p TT(1,2)

Ejemplo: En cada caso, deducir la conclusión utilizando el Modus Tollendo Tollens

Caso 1:	**Caso 2:**
1) p → q L r 2) ¬(q L r) Solución: Como la segunda premisa es la negación del consecuente de la premisa 1, podemos aplicar la regla Tollendo Tollens y quedaría: 1) p → q L r 2) ¬(q L r) 3) ¬p (TT 1,2)	1) q → ¬r 2) ¬¬r Solución: La negación del consecuente de la premisa 1 lo tenemos en la premisa 2 (¬¬R), por tanto, aplicando la regla Tollendo Tollens, tenemos 1) q → ¬r 2) ¬¬r 3) ¬q (TT 1,2)

Ejemplo: En cada caso, demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:	**Caso 2:**
¬s 1) s → ¬r 2) r Solución: Se aplica la regla de doble negación a la premisa 2 para luego poder aplicar la regla Tollendo Tollens ¬s 1) s → ¬r 2) r 3) ¬¬r (DN 2) 4) ¬s (TT 1,3)	c 1) ¬b 2) a → b 3) ¬a → c Solución: Se utiliza la regla Tollendo Tollens en las premisas 1 y 2 y se tiene "¬a". Luego, se utiliza la regla Ponendo Ponens. c 1) ¬b 2) a → b 3) ¬a → c 4) ¬a (TT 1,2) 5) c (PP 3,4)

4.3.4 Regla de Adjunción (A)

Si se tienen dos proposiciones como premisas separadas, mediante la conjunción, se pueden unir en una sola premisa utilizando el operador (Λ). Las premisas se pueden colocar en cualquier orden y no cambia el significado.

Premisa 1: p Premisa 2: q Conclusión 3: p ∧ q A(1,2)	Premisa 1: p Premisa 2: q Conclusión 3: q ∧ p A(1,2)

4.3.5 Regla de Simplificación (S)

Si se tienen dos premisas unidas por una conjunción, se puede obtener como conclusión cualquiera de las dos premisas.

Premisa 1: p ∧ q Conclusión 2: p S(1)	Premisa 1: p ∧ q Conclusión 2: q S(1)

Ejemplo: En cada caso, demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:	**Caso 2:**
¬s 1) ¬r L t 2) s → r Solución: Se puede aplicar la regla de simplificación en la premisa 1. Se toma la variable que necesitamos combinar con la premisa 2 para llegar a la conclusión. En este caso sería "¬r". Luego se aplica la regla Tollendo Tollens. ¬s 1) ¬r L t 2) s → r 3) ¬r (S,1) 4) ¬s (TT 2,3)	¬s L q 1) ¬s → q 2) ¬(t L r) 3) s → t L r Solución: En este caso, se aplica la regla Tollendo Tollens con las premisas 2 y 3. Ese resultado se combina con la premisa 1 y se aplica la regla Ponendo Ponens para finalmente aplicar la regla de adjunción. ¬s L q 1) ¬s → q 2) ¬(t L r) 3) s → t L r 4) ¬s (TT 2,3) 5) q (PP 1,4) 6) ¬s L q (A 4,5)

4.3.6 Regla Modus Tollendo Ponens (TP)

La disyunción representa una elección entre dos premisas. Si una de las premisas de una disyunción es negada, la otra premisa queda automáticamente afirmada, ya que uno de las premisas de la elección ha sido descartada.

Premisa 1:	$p \vee q$	Premisa 1:	$p \vee q$
Premisa 2:	$\neg q$	Premisa 2:	$\neg p$
Conclusión 3:	p TP(1,2)	Conclusión 3:	q TP(1,2)

Ejemplo: En cada caso, deducir la conclusión utilizando el modus Tollendo Ponens.

Caso 1:	**Caso 2:**
1) p V q 2) ¬q Solución: Como en la premisa 2 se niega "q", se tiene como conclusión "p". 1) p V q 2) ¬q 3) p (TP 1,2)	1) t V (p → q) 2) ¬t Solución: En la premisa 1 se tiene una disyunción y en la premisa 2 está la negación de una de las premisas de la disyunción, por tanto, se puede aplicar la regla. 1) t V (p → q) 2) ¬t 3) p → q (TP 1,2)

4.3.7 Regla de Adición (LA)

Si tenemos una proposición cualquiera y es cierta, es posible expresarlo como una disyunción acompañado por cualquier otra proposición. Hay que recordar que en lógica, la disyunción señala que si se tienen dos proposiciones unidas por una disyunción, basta con que una sea verdadera para que el resultado sea verdadero.

Premisa 1:	p
Conclusión 2:	$p \vee r$ LA(1)

4.3.8 Regla Silogismo Hipotético (HS)

Dados dos condicionales, de las cuales, el antecedente de una condicional coincide con el consecuente de la otra, se forma como conclusión una nueva condicional cuyo antecedente es el antecedente de una de las premisas y el consecuente es el consecuente de la otra premisa. Aun cuando los antecedentes y consecuentes sean proposiciones moleculares, se puede aplicar la regla.

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: $q \rightarrow r$

Conclusión 3: $p \rightarrow r$ HS(1,2)

En este caso "q" es el consecuente en la premisa 1 y el antecedente en la premisa 2. Se obtiene la nueva condicional, eliminando la proposición "q".

Ejemplo: En cada caso, deducir la conclusión utilizando la ley del silogismo hipotético.

Caso 1:	**Caso 2:**
1) q → ¬p 2) ¬p → r Solución: Podemos ver que "¬p" es el consecuente de la premisa 1 y el antecedente de la premisa 2. Utilizando la regla de silogismo hipotético, tenemos: 1) q → ¬p 2) ¬p → r 3) q → r (HS 1,2)	1) p → r L ¬s 2) r L ¬s → t Solución: En este caso tenemos como antecedente y consecuente una proposición molecular (r L ¬s) e igualmente utilizamos la ley del silogismo hipotético y obtenemos: 1) p → r L ¬s 2) r L ¬s → t 3) p → t (HS 1,2)

En cada caso, demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:

p
1) ¬r
2) ¬p → q
3) q → r

Solución:
Hay varias formas de resolver este ejercicio. Eso va a depender de la habilidad para visualizar las reglas que se pueden usar. En la premisa 1 se tiene la negación de la premisa 3, por tanto utilizamos la regla Tollendo Tollens y obtenemos la premisa 4. Se aplica la misma regla con las premisas 2 y 4, obteniendo la premisa 5 y luego se aplica la doble negación.

p
1) ¬r
2) ¬p → q
3) q → r
4) ¬q (TT 1,3)
5) ¬¬p (TT 2,4)
6) p (DN 5)

Otra forma de resolverlo sería aplicando la Ley del Silogismo Hipotético en las premisas 2 y 3, obteniendo la premisa 4. Luego se usa la regla Tollendo Tollens con las premisas 1 y 4.

p
1) ¬r
2) ¬p → q
3) q → r
4) ¬p → r(HS 2,3)
5) ¬¬p (TT 1,4)
6) p (DN 5)

Caso 2:
p 1) ¬r 2) ¬p → q 3) q → r Solución: Hay varias formas de resolver este ejercicio. Eso va a depender de la habilidad para visualizar las reglas que se pueden usar. En la premisa 1 se tiene la negación de la premisa 3, por tanto utilizamos la regla Tollendo Tollens y obtenemos la premisa 4. Se aplica la misma regla con las premisas 2 y 4, obteniendo la premisa 5 y luego se aplica la doble negación. p 1) ¬r 2) ¬p → q 3) q → r 4) ¬q (TT 1,3) 5) ¬¬p (TT 2,4) 6) p (DN 5) Otra forma de resolverlo sería aplicando la Ley del Silogismo Hipotético en las premisas 2 y 3, obteniendo la premisa 4. Luego se usa la regla Tollendo Tollens con las premisas 1 y 4. p 1) ¬r 2) ¬p → q 3) q → r 4) ¬p → r(HS 2,3) 5) ¬¬p (TT 1,4) 6) p (DN 5)

4.3.9 Regla de Silogismo Disyuntivo (DS)

Dadas tres premisas, dos de ellas condicionales, y la tercera una disyunción cuyos miembros sean los antecedentes de los condicionales, se puede concluir en una nueva premisa en forma de disyunción, cuyos miembros serían los consecuentes de las dos condicionales. Lógicamente, si se plantea una elección entre dos causas, se puede plantear una elección igualmente entre sus dos posibles efectos, que es el sentido de esta regla.

Premisa 1:	$p \lor q$
Premisa 2:	$p \rightarrow s$
Premisa 3:	$q \rightarrow r$
Conclusión 4:	$s \lor r$ DS(1,2,3) o $r \lor s$ DS(1,2,3)

4.3.10 Regla del Dilema Destructivo (DD)

Dadas tres premisas, dos de ellas condicionales, y la tercera una disyunción cuyos miembros sean la negación de los consecuentes de los condicionales, se puede concluir en una nueva premisa en forma de disyunción, cuyos miembros serían la negación de los antecedentes de las dos condicionales.

Premisa 1:	$\neg s \lor \neg r$
Premisa 2:	$p \rightarrow s$
Premisa 3:	$q \rightarrow r$
Conclusión 4:	$\neg p \lor \neg q$ DD(1,2,3) o $\neg q \lor \neg p$ DD(1,2,3)

4.3.11 Regla de Simplificación Disyuntiva (DP)

Si se tiene una disyunción con la misma variable, puede simplificarse dejando una sola variable.

Premisa 1:	$p \lor p$
Conclusión 2:	p DP(1)

Ejemplo: Deducir la conclusión utilizando la regla del Silogismo Disyuntivo y la Simplificación Disyuntiva o el Dilema Destructivo.

Caso 1:	**Caso 2:**
1) ¬p V q 2) ¬p → ¬r 3) q → s Solución: Los antecedentes de las premisas 2 y 3 forman la disyunción de la premisa 1, por tanto, se puede usar la regla del silogismo disyuntivo, obteniendo: 1) ¬p V q 2) ¬p → ¬r 3) q → s 4) ¬r V s DS(1,2,3)	1) ¬r → s 2) q V ¬r 3) q → s Solución: Usamos la regla del silogismo disyuntivo en las premisas 1, 2 y 3, obteniendo la premisa 4. Luego, se usa la regla de simplificación disyuntiva. 1) ¬r → s 2) q V ¬r 3) q → s 4) s V s DS(1,2,3) 5) s DP(4)

4.3.12 Ley Conmutativa (CL)

Esta regla es válida para la conjunción y la disyunción. Una conjunción es afirmar que se dan dos cosas a la vez, de modo que el orden de sus elementos no cambia este hecho. Igualmente, una disyunción es presentar una elección entre dos cosas, sin importar en qué orden se presente esta elección.

Premisa 1:	p V q	Premisa 1:	p ∧ q
Conclusión 2:	q V p CL(1)	Conclusión 2:	q ∧ p CL(1)

Ejemplo: Demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:
s L r 1) (r L s) v p 2) q → ¬p 3) t → ¬p 4) q V t Solución: Se aplica la Regla de Silogismo Disyuntivo en las premisas 2, 3 y 4 y se obtiene la premisa 5. Luego, se usa la regla de Simplificación Disyuntiva. Después, con las premisas 1 y 6 se utiliza la regla Tollendo Ponens y finalmente la Ley Conmutativa para que quede como la conclusión que se quiere demostrar. s L r 1) (r L s) v p 2) q → ¬p 3) t → ¬p 4) q V t 5) ¬p V ¬p DS(2,3,4) 6) ¬p DP(5) 7) r L s TP(1,6) 8) s L r CL(7)
Caso 2:
s L q 1) p V t 2) ¬t 3) p → q L s Solución: Con las premisas 1 y 2 se aplica la regla Tollendo Ponens y se tiene “p” en la premisa 4; luego se usa la regla Ponendo Ponens y finalmente la Ley Conmutativa. s L q 1) p V t 2) ¬t 3) p → q L s 4) p TP(1,2) 5) q L s PP(4,3) 6) s L q

4.3.13 Leyes de Morgan (DL)

Esta ley permite transformar una disyunción en una conjunción o, una conjunción en una disyunción.

Premisa 1: ¬p V ¬q	Premisa 1: ¬p Λ ¬q
Conclusión 2: ¬ (p Λ q) DL(1)	Conclusión 2: ¬(p V q) DL(1)
Premisa 1: ¬(p V q)	Premisa 1: ¬(p Λ q)
Conclusión 2: ¬p Λ ¬q DL(1)	Conclusión 2: ¬p V ¬q DL(1)
Premisa 1: ¬(p V ¬q)	Premisa 1: ¬(p Λ ¬´q)
Conclusión 2: ¬ p Λ q DL(1)	Conclusión 2: ¬p V q DL(1)

Ejemplo*:* Demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Caso 1:
¬(a L b) 1) c V d 2) c → ¬a 3) d → ¬b Solución: Se aplica la ley del Silogismo Disyuntivo en las premisas 1, 2 y 3 y luego se aplica la Ley de Morgan, quedando: ¬(a L b) 1) c V d 2) c → ¬a 3) d → ¬b 4) ¬a V ¬b DS(1,2,3) 5) ¬(a L b) DL(4)

Caso 2:

r L q
1) ¬s → ¬(p V ¬t)
2) t → q L r
3) ¬s

Solución:
Se utiliza la regla Ponendo Ponens en las premisas 1 y 3 y se tiene como premisa 4 "¬(p V ¬t)". En la premisa 4 se aplica la Ley de Morgan y se consigue "¬p L t". Se simplifica la premisa 5 y luego se vuelve a aplicar la regla Ponendo Ponens en las premisas 2 y 6. Finalmente se usa la Ley Conmutativa.

r L q
1) ¬s → ¬(p V ¬t)
2) t → q L r
3) ¬s
4) ¬(p V ¬t) PP(1,3)
5) ¬p L t DL(4)
6) t S(5)
7) q L r PP(2,6)
8) r L q

4.3.14 Leyes de Proposiciones Bicondicionales (LB)

Esta ley permite transformar una bicondicional en una condicional o una condicional en una bicondicional.

Premisa 1: $p \leftrightarrow q$

Conclusión 2: $(p \rightarrow q)$ LB(1)

Premisa 1: $p \leftrightarrow q$

Conclusión 2: $(q \rightarrow p)$ LB(1)

Premisa 1: $p \leftrightarrow q$

Conclusión 2: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (LB)1)

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: $q \rightarrow p$

Conclusión 3: $p \leftrightarrow q$ LB(1,2)

Ejemplo: Deducir la conclusión a partir de las premisas.

Caso 1:
1) p ↔ q 2) q → p ↔ r 3) ¬r V s Solución: Lo primero que debe hacerse en eliminar los bicondicionales para luego aplicar las reglas vistas. Por tanto, en las premisas 1 y 2 se aplica la ley bicondicional y se convierten en condicionales. Como necesitamos "q → p", al convertir la premisa 1 cambiamos el orden del condicional. Se aplica Ponendo Ponens con las premisas 4 y 5, luego la doble negación y finalmente la regla Tollendo Ponens. 1) p ↔ q 2) q → p ↔ r 3) ¬r V s 4) q → p LB(1) 5) q → p → r LB(2) 6) r PP(4,5) 7) ¬¬r DN(6) 8) s TP(3,7)
Caso 2:
1) p ↔ q 2) r ↔ t 3) p V t Solución: Se aplica la Ley Bicondicional a las premisas 1 y 2. En la premisa 2 se cambian los términos de la condicional para que se pueda aplicar después la Ley del Silogismo Disyuntivo. 1) p ↔ q 2) r ↔ t 3) p V t 4) p → q LB(1) 5) t → r LB(2) 6) q V r DS(3,4,5)

Resumiendo se tiene a continuación una tabla resumen con las reglas de inferencia que vamos a trabajar:

Tabla 4.1. Reglas de Inferencia

REGLA MODUS PONENDO PONENS (PP) 1) p → q 2) p 3) q (PP1,2)	**REGLA DOBLE NEGACIÓN (DN)** 1) p 1) ¬¬p 2) ¬¬p (DN1) 2) p (DN1)
REGLA MODUS TOLLENDO TOLLENS (TT) 1) p → q 2) ¬q 3) ¬p (TT 1,2)	**REGLA DE ADJUNCIÓN (A)** 1) p 1) p 2) q 2) q 3) p L q (A 1,2) 3) q L p (A 1,2)
REGLA DE SIMPLIFICACIÓN (S) 1) p L q 1) p L q 2) p (S1) 2) q (S1)	**REGLA MODUS TOLLENDO PONENS (TP)** 1) p V q 1) p V q 2) ¬p 2) ¬q 3) q (TP 1,2) 3) p (TP 1,2)
LEY DE ADICIÓN (LA) 1) q 2) q V r (LA1)	**LEY DE SILOGISMO HIPOTÉTICO (HS)** 1) p → q 2) q → r 3) p → r (HS 1, 2)
LEY DE SILOGISMO DISYUNTIVO (DS) 1) p V q 2) p → r 3) q → s 4) r V s (DS 1,2,3) o S V R (DS1,2,3)	**LEY DE SIMPLIFICACIÓN DISYUNTIVA (DP)** 1) p V p 2) p (DP1)
REGLA DEL DILEMA DESTRUCTIVO (DD) 1) ¬r V ¬s 2) p → r 3) q → s 4) ¬p V ¬q (DD 1,2,3) o ¬q V ¬p (DD 1,2,3)	**LEYES CONMUTATIVAS (CL)** 1) p V q 1) p L q q V p (CL1) 2) q L p (CL1)

LEYES DE PROPOSICIONES BICONDICIONALES (LB)	LEYES DE MORGAN (DL)
1) p ↔ q 2) p → q (LB1) 1) p ↔ q 2) q → p (LB1) 1) p ↔ q 2) (p → q) L (q → p)(LB1) 1) p → q 2) q → p 3) p ↔ q (LB 1,2)	1) ¬p V ¬q 1) ¬p L¬q 2) ¬(p L q) (DL1) 2) ¬(p V q) (DL1) 1) ¬(p V q) 1) ¬(p L q) 2) ¬p L ¬q (DL1) 2) ¬p V ¬q (DL1) 1) ¬(p V ¬q) 1) p L q 2) ¬p L q (DL1) 2) ¬(¬p V ¬q) (DL1)

Fuente: la autora (2015)

Ejercicios propuestos

1. Deducir la conclusión a partir de las premisas

1) T 2) T → ¬Q 3) ¬Q → ¬S
1) P ↔ Q 2) Q → P ↔ R 3) ¬R V S
1) P ↔ Q 2) R ↔ T 3) P V T
1) (¬P V ¬T) → (S V R) 2) ¬S L ¬R
1) P → Q 2) R V S 3) S → ¬Q 4) ¬R

1) P L ¬Q 2) ¬R → ¬Q 3) ¬(¬R) V S 4) S L P → T
1) (¬P V R) V Q 2) ¬R 3) ¬Q
1) (¬P V ¬T) → S 2) ¬(P LT)
1) R → ¬P 2) (R L S) V T 3) T → (Q V B) 4) ¬Q L ¬B
1) T → (P L S) 2) Q → ¬P 3) R → ¬S 4) R V Q
1) C L¬D 2) C → ¬A 3) D V ¬B
1) ¬S → ¬(P V ¬T) 2) T → Q LR 3) ¬S

2. Demostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

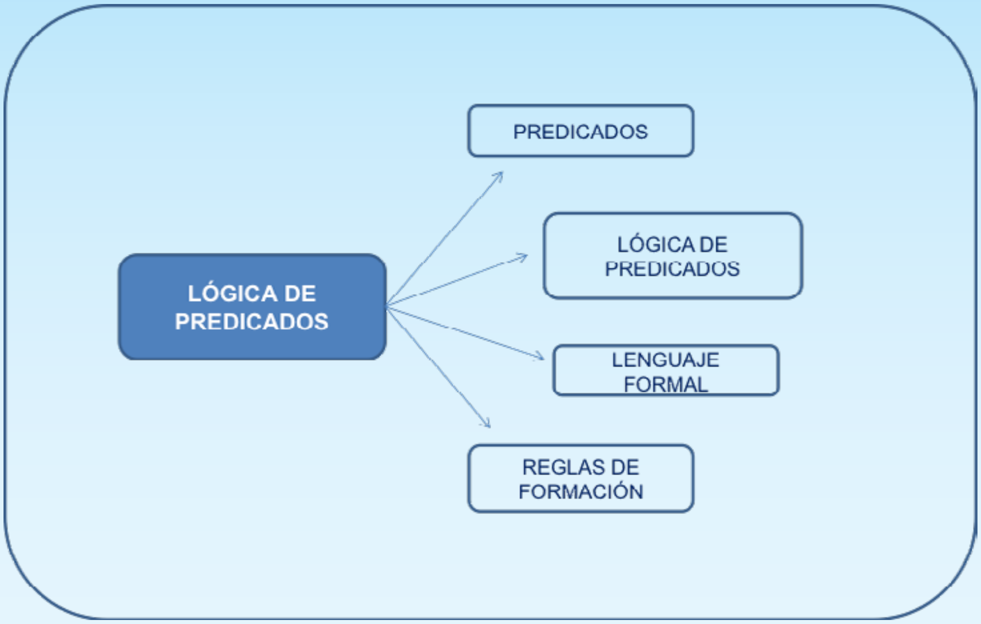
¬(R L ¬T) 1) P ↔ Q 2) P L S 3) Q → T
¬R 1) P → Q 2) ¬Q 3) R → P

T 1)P 2) P → Q 3) R V S 4) S → ¬Q 5) ¬T → ¬(RLP)
¬P 1)P → R 2) R → S 3) T V ¬S 4) ¬T V Q 5) ¬Q
T → R 1)P → (Q → R) 2) P V S 3) T → Q 4) ¬S
S L T 1) ¬(P V ¬R) 2) Q V P 3) R → S 4) (Q LS) → (T L S)
¬S L Q 1) ¬S → Q 2) ¬(T L R) 3) S → T L R
¬R 1)P 2) P → ¬Q 3) ¬Q → ¬R
¬(P L Q) 1) R → ¬P 2) T ↔ ¬P 3) (S V B) → T 4) (R → T) → S

R L Q 1) P V Q 2) S → Q L R 3) P → S 4) Q → S
D 1) ¬A → B 2) C → B 3) C V ¬A 4) ¬B V D
A 1) B V A 2) B → C 3) C → D L E 4) A → D L E 5) E L D → F V G 6) B → ¬ (G V F)

Capítulo 5

Lógica de Predicados



OBJETIVO Y COMPETENCIAS DEL CAPÍTULO

Comprender la lógica de predicados y conocer los símbolos que permiten elaborar y resolver fórmulas predicativas.

INTRODUCCIÓN

Algunas proposiciones o razonamientos no pueden representarse únicamente con las herramientas de la lógica de proposiciones, ya que con ella sólo se analiza la validez de los argumentos sin precisar la estructura interna de las variables.

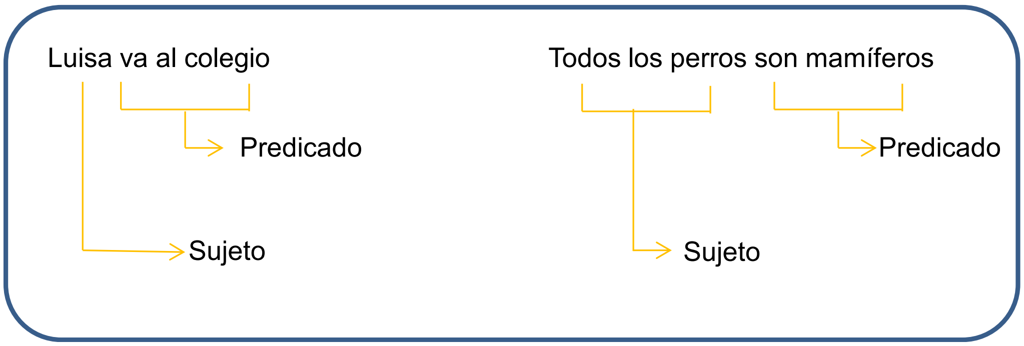
En este capítulo se trabaja con la lógica de predicados que resuelve los razonamientos que no se pueden con la lógica de proposiciones; permite razonar y establecer relaciones entre los objetos de las proposiciones.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

5.1 Predicado

Las proposiciones están compuestas por el sujeto y el predicado.

Ejemplos:



El predicado hace referencia a una propiedad que posee el sujeto. También se define como una proposición en la que se afirma o se niega algo de uno o varios objetos que son los sujetos del predicado. González (2005) lo define como una afirmación que expresa una propiedad de un objeto o una relación entre objetos. Estas afirmaciones se hacen verdaderas o falsas cuando se sustituyen las variables por valores específicos

El sujeto se refiere a objetos o individuos en la proposición; el predicado es el que expresa algo sobre el sujeto. En lógica, al sujeto se le llama término y se define según Suppes y Hill (1988) como "una expresión con la que se nombre o se designa un único objeto, o es una variable que puede ser sustituida por una expresión que nombre o designe un objeto único". La clasificación de los términos se presenta en la siguiente figura.

Figura 5.1 Tipos de Términos

TÉRMINOS

Según la cantidad de sujetos

Singulares: hacen referencia a un individuo en particular. Ejemplo: Carlos juega

Universales: el sujeto es una totalidad de individuos. Ejemplo: Todos los perros son caninos

Particulares: el sujeto es una parcialidad de individuos. Ejemplo: Algunos perros son pitbull

Según la referencia del sujeto

Constante: cuando el objeto es algo alguien. Ejemplo: La casa es azul

Variable: cuando no se especifica el objeto. Ejemplo: El sale los sábados

Función: cuando el objeto referenciado está en función de otro objeto. Ejemplo: Luis juega con Pedro

Fuente: Adaptado de García (2003), González (2005)

Cuando se tienen proposiciones con un término se denominan predicados simples y expresan una propiedad y se llaman predicados dobles cuando tienen dos términos y expresan relaciones.

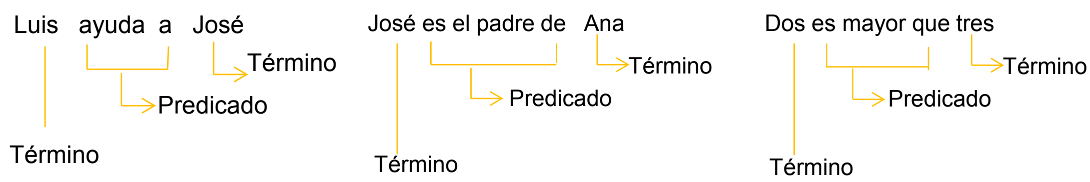
Ejemplos de Predicados Simples:

Juan es alto
Predicado
Término

Jaime es jugador de pelota
Predicado
Término

Tres es número primo
Predicado
Término

Ejemplos de Predicados Dobles:



Al representar las proposiciones en el lenguaje de lógica de predicado, el predicado se sustituye por letras mayúsculas y los términos por letras minúsculas.

Ejemplos:

Proposición: tres es un número impar

- El predicado: es un número impar

Lo representamos con: **Q**

El término constante: tres lo representamos con la letra: **a**

Quedando: **Qa**

Proposición: Él está en clases

- El predicado: está en clases

Se representa por la letra: **R**

En este caso, el **tér**mino está indeterminado y se representa por una variable: **x**

Quedando: **Rx**

Proposición: El Vicerrector nombró como Jefe de Programa a Luisa

En este ejemplo tenemos una proposición con dos términos.

El predicado es: Nombró como Jefe de Programa a

Se sustituye por la letra mayúscula: **P**

Los términos son: El Vicerrector y Luisa

Se sustituyen por letras minúsculas: **a** **b**

Quedando: **Pab**

Proposición: Ella está sentada entre José y Carlos

En esta proposición se tienen tres términos.

- El predicado es: está sentada entre … y

  Se sustituye por: **P**

- Los términos son: Ella, José y Carlos; dos términos constantes y uno variable.

  Sustituimos el pronombre Ella por la variable: **x**
  El término José se sustituye por: **j**
  El término Carlos se sustituye por: **c**

- Representando la proposición en forma lógica:

  Pxjc

Ejercicios propuestos

1. Señalar el término y el predicado en las siguientes proposiciones:

   a) Este trabajo es complicado

   b) Venezuela tiene muchos recursos naturales

   c) La temporada de beisbol comienza en octubre

   d) $2 + 4 = 3 + 3$

   e) Gabriel García Márquez es el autor de cien años de soledad

   f) $\sqrt{36} = 6$

   g) Dos por cuatro es mayor que tres por dos

   h) El que está entrando es el nuevo profesor

2. Simbolizar las siguientes proposiciones, utilizando letra mayúscula para el predicado y letras minúsculas para los términos.

   a) El salón está desordenado

   b) Ella tiene el cabello largo

   c) José y Luisa van a la universidad

   d) Manuel es médico cardiólogo

   e) Barinas está ubicada entre Portuguesa y Táchira

   f) Ana aprobará el examen si y solo si estudia todos los días

   g) $Y = 2 + 1$ o $Y > 2 + 1$

   h) Si Juan prepara la sopa entonces su mamá y sus hermanos la comerán

5.2 Lógica de Predicados

La lógica de predicados se utiliza para representar proposiciones que no pueden comprobarse con la lógica proposicional. Se tiene por ejemplo lo siguiente:

Todos los perros son mamíferos
Brandi es un perro
Por tanto, Brandi es mamífero

Al tratar de representarlo con la lógica de proposiciones se tiene:

Los perros son mamíferos: p
Brandi es un perro: q
Brandi es mamífero: r

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1)\ \ p \\ 2)\ \ q \end{array}\right\} \textbf{Premisas} \\ \hline 3)\ \ r \qquad \textbf{Conclusión} \end{array}$$

Aun cuando es evidente que de las premisas se puede llegar a la conclusión (se tiene un argumento correcto), no se puede comprobar con las herramientas de la lógica de proposiciones. Igualmente, se tienen proposiciones con enunciados como por ejemplo 'Todos los A's son B's' o 'Algunos A's son B's'. Estos enunciados que incluyen Todos y Algunos son distintos a los atómicos o los moleculares. Como ejemplo se tiene:

Todos los Barineses son Venezolanos

Todos los Bariniteños son de Barinas

Por tanto, todos los Bariniteños son venezolanos

Asignando variables a las premisas y a la conclusión, se tiene:

$$\begin{array}{l} 1)\ p \\ 2)\ q \\ \hline \quad r \end{array}$$

Al revisar el contenido del enunciado se puede afirmar que la inferencia es válida. Pero, al simbolizarla con la lógica de proposiciones, se tiene que la inferencia es inválida ya que las proposiciones “p” y “q” pueden hacerse verdadera y la conclusión falsa. Se puede determinar que la validez no sólo depende de las relaciones existentes entre sus proposiciones, sino también de las relaciones existentes entre los elementos de esas proposiciones. Para este tipo de proposiciones se utiliza la lógica de predicados.

García (2003) la define como la parte de la lógica que trata con proposiciones cuantificadas. En la lógica de predicados se incorporan los cuantificadores, símbolos para las relaciones y símbolos para las funciones. La inclusión de cuantificadores amplía la fuerza expresiva de las proposiciones que se pueden construir y, permite elaborar principios lógicos que explican el razonamiento seguido en casi todas las demostraciones matemáticas. Casi todos los razonamientos matemáticos incluyen cuantificadores, predicados y conectores lógicos.

5.3 Lenguaje Formal de la Lógica de Predicado

La lógica de predicado está formada por los siguientes elementos:

A) Símbolos de la Lógica de Predicados

Las Variables Individuales: son los términos indeterminados, esto es, cuando no se tiene definido el sujeto. Se representan utilizando las letras minúsculas como: x, y, z, entre otras. Ejemplo: Él ha estudiado mucho. Con el pronombre ‘él’ no se puede saber a quién se refiere. Esta proposición puede sustituirse por “x” ha estudiado mucho. En este caso el término está representado por una variable.

Las Constantes Individuales: son los términos determinados y se representan con las primeras letras del alfabeto en minúsculas: a, b, c, etc.

Las Variables Predicativas: para representar los predicados se utilizan letras mayúsculas: P, Q, M, R, etc.

Los Conectores Lógicos: se utilizan los mismos conectores que en la lógica de proposiciones: Negación (¬), conjunción (Λ), disyunción (V), condicional (→) y bicondicional (↔)

Los Cuantificadores: son usados para indicar el número de casos que existen en una situación determinada. Su valor de verdad depende del dominio de la variable. Hacen referencia a la totalidad o a una parte de los miembros de un conjunto. Pueden ser: universales y existenciales.

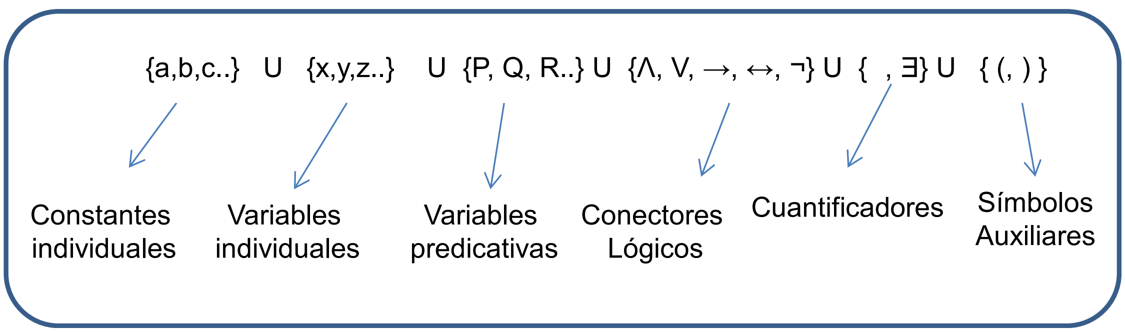
El **Cuantificador Universal** se simboliza ∀. Se llama cuantificador universal porque afirma que cada cosa en el universo tiene una cierta propiedad. El universo es el conjunto al cual pertenecen los valores que puedan tomar las variables. En los enunciados aparece como: Todo … es …, Ninguno … es …, Cada, Para cada …, Para todo …, Cualquiera …, Nada …, Nadie …, No …, Para ningún ….

El **Cuantificador Existencial** se simboliza ∃. Es cuando el término no se refiere a todos los objetos del universo. En los enunciados aparece como: Algún … es …, Algún … no es …, Existe, Unos, Tiene.

Los Símbolos Auxiliares: se utilizan los paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves {} cuando se requieran.

Resumiendo se tiene:

Figura 5.2 Sintaxis de la Lógica de Predicado



Fuente: La Autora (2015)

B) REGLAS DE FORMACIÓN

Una proposición atómica está formada por una variable predicativa seguida de una o más constantes individuales. Ejemplo:

Barinas es un estado llanero

Predicado representado por la letra P

Término representado por la letra b

Proposición Atómica

Pb

- Una proposición molecular se forma combinando proposiciones atómicas con conectores lógicos.

Ejemplo:

Juan va a clases y José al cine

Proposición1: Juan va a clases

Predicado: P

Término: a

Proposición2: José va al cine

Predicado: Q

Término: b

Conector lógico: y representado por $\wedge$

Proposición Molecular: $Pa \wedge Qb$

- Una función proposicional atómica se forma con variables predicativas seguida de una o más variables individuales. Se llama función proposicional ya que sus términos están representados por variables que representan individuos indeterminados y no se pueden calificar como verdaderas o falsas.

Ejemplo:

x es un estado costero

Predicado representado por la letra P

Término representado por la letra x

Función Proposicional Atómica

Px

- Al combinar funciones proposicionales atómicas con conectores lógicos, se forman funciones proposicionales moleculares.
  Ejemplo:

  x va a clases y z al cine

  Proposición1: x va a clases
  - Predicado: P
  - Término: x

  Proposición2: z va al cine
  - Predicado: Q
  - Término: z

  Conector lógico: y representado por $\wedge$

  Función Proposicional Molecular: $Px \wedge Qz$

- Se llaman variables libres las que no están afectadas por un cuantificador.
  Ejemplos:

Px $Px \rightarrow Qx \vee Rz$	En estos ejemplos las variables x y z son libres ya que no están afectadas por cuantificadores

- Se llaman variables ligadas las que están afectadas por un cuantificador.
  Ejemplos:

$(\exists x)Px$ $(\ \ x)(\ \ z)(Px \rightarrow Qx \vee Rz)$	En estos ejemplos las variables x y z son ligadas porque están afectadas por cuantificadores

- Las fórmulas cerradas son las que no contienen variables libres.

Ejemplos:

(∃x)Px (x)(z)(Px → Qx V Rz)	Como no tienen variables libres se llaman fórmulas cerradas.

- Las fórmulas abiertas son las que contienen variables libres.

  Ejemplos:

Px	En este ejemplo x es una variable libre, por tanto, la fórmula es abierta.
My ↔(x)(z)(Px → Qx V Rz)	En este caso, la variable 'y' es libre, por tanto, la fórmula es abierta

- Si se le agregan cuantificadores a las variables libres de una función proposicional, ésta se convierte en una proposición.

  Ejemplos:

x es alto

representado
como función proposicional

Px

Al incluir cuantificadores, pasa de función proposicional a proposición

Proposición

(x)(Px)

Otro ejemplo:

Px → Qx V Rz

(x) (z)(Px → Qx V Rz)

- Al sustituir las variables libres de una función proposicional por constantes individuales, se obtiene una proposición.

  Ejemplos:

Función Proposicional		Proposición
Px	Al sustituir las variables individuales por constantes, pasa de función proposicional a proposición	Pa
Px → Qx V Rz		Pa → Qa V Rb

5.3.1 Formalización de las Lógica de Predicados

Cuando se emplean variables junto con los predicados, estas variables definen conjuntos de objetos o individuos. Una función proposicional representa una proposición individual. Para ampliarla se utilizan los cuantificadores.

(∀x)(Px), significa que todos los elementos tienen la propiedad P. Se puede escribir 'Para todo x, x tiene la propiedad P'

(∀x)(¬Px), significa que ningún elemento tiene la propiedad P. Se puede escribir 'Para todo x, x no tiene la propiedad P'

(∃x)(Px), significa que existe algún elemento que tiene la propiedad P. Se puede escribir 'Para algún x, x tiene la propiedad P'

(∃x)(¬Px), significa que no todos los elementos tienen la propiedad P. Se puede escribir 'Para algún x, x no tiene la propiedad P'.

Ejemplo 1:

x es un buen estudiante

Predicado: P

Quedando en forma lógica

Px

Para ampliar su alcance se utilizan los cuantificadores

(x)Px Todos los x son buenos estudiantes

o

(∃x)Px Algunos x son buenos estudiantes

La variable asociada al cuantificador es la que se quiere cuantificar, que en este ejemplo es x, pero se le puede asignar otro valor como y, z, entre otras.

Ejemplo 2:

Si Px es una función proposicional cuya variable es x

Entonces, la afirmación:

"Para todo x, Px"

Es una proposición en la cual se dice que la variable x está universalmente cuantificada.

Ejemplo 3: Se tiene la función proposicional: **x es grande**

Hasta el momento no se puede decir si es cierto o falso ya que la variable x puede ser sustituida por cualquier valor. En el momento en que se le asigna un valor a x es cuando se puede establecer si es verdadero o falso. En lógica de predicado, esa proposición se puede cuantificar universalmente y quedaría expresada:

Para cada x, x es grande
o
Para todo x, x es grande.

Ejemplo 4: x = 0, en forma lógica quedaría:

Para cada x, x = 0

Y en este caso, es falso porque si se cambia x por 3 daría falso, por tanto, no para todos los casos se cumple la condición.

Ejemplo 5: Se tiene la proposición “todo número es estrictamente menor que el siguiente”

Puede escribirse en la forma: **$(\forall x)$, $x < x + 1$.**

La proposición es verdadera ya que para cualquier valor de x se cumple.

5.3.2 Dominio de Referencia

En la mayoría de los casos no interesan todas las cosas del universo, sino un conjunto definido de cosas. El conjunto de cosas que se consideran en una situación se llama dominio de referencia. Por tanto, el dominio se refiere a un conjunto en particular y el cuantificador universal se refiere a cada elemento de ese conjunto.

Una proposición con cuantificadores se puede expresar mediante las proposiciones que se obtienen asignando valores a las variables de los predicados que ocurren en la afirmación. Si el universo es finito puede hacerse explícita.

Ejemplos: En estos ejemplos se restringen el dominio a un conjunto del universo.

1. Se tiene la proposición: **$(\forall x)Px$** y los valores que puede tomar la variable x son: 1, 2, 3 y 4, entonces la proposición equivaldría a:

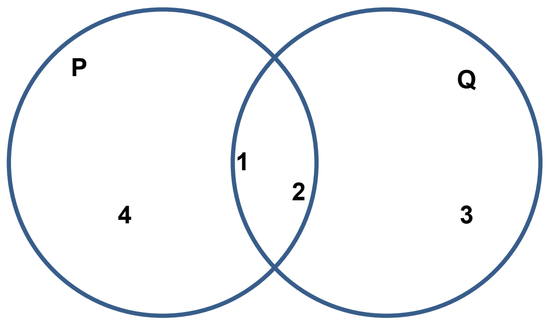
$$P(1) \land P(2) \land P(3) \land P4)$$

Si la proposición fuese (∃x)Px sería equivalente a

P(1) V P(2) V P(3) V P(4)

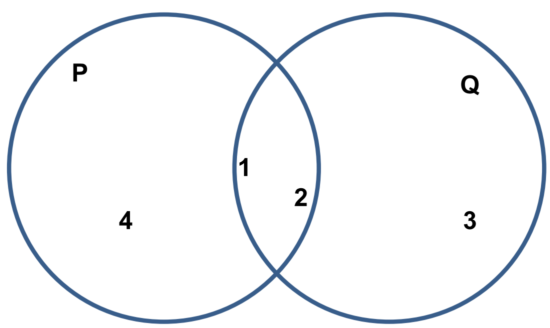
2. Si el universo es: {1,2,3,4}, P es: {1,2,4} y Q es: {1,2,3},

(∀x)(Px Λ Qx) significa para todo x, x tiene la propiedad P y la propiedad Q. Representándolo como conjunto, se tiene:



Podemos ver que el resultado es falso, ya que el 3 está en Q pero no en P y el 4 está en P y no en Q. El enunciado dice que todos los que tienen la propiedad P deben tener también la propiedad Q.

(∀x)(Px V Qx) significa para todo x, x tiene la propiedad P o la propiedad Q o ambas.



En este caso es verdadero porque están presentes todos los elementos del universo y el operador es una disyunción.

En los siguientes ejemplos, no se restringe el dominio, sino que se deja que el cuantificador cubra todos los objetos del universo.

Ejemplos:

1. Ningún niño va a la escuela

En este ejemplo Ningún tiene doble significado: como cuantificador universal y como negación. Representando el ejemplo en fórmula lógica se tiene:

Para todo x, x no va a la escuela

⬇

$(\forall x)$ (x no va la escuela)

Bx equivale a x va a la escuela y se simboliza:

$$(\forall x)\ (\neg Bx)$$

Se pueden tener proposiciones con dos predicados.

2. Cada hombre es un animal

Se tiene el predicado es un hombre y el predicado es un animal. En estos casos, su traducción queda:

Para todo x, si x es un hombre, entonces x es un animal

⬇

Px equivale a x es un hombre

Qx equivale a x es un animal

⬇

En forma lógica

$$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$$

3. Ningún hombre es inmortal

Para todo x, si x es un hombre, entonces x no es inmortal

Rx equivale a x es un hombre
Sx equivale a x es inmortal

En forma lógica

$$(\forall x)\ (Rx \rightarrow \neg Sx)$$

4. No toda mujer tiene carro

Para ningún x, si x es mujer entonces x tiene carro

Rx equivale a x es mujer
Sx equivale a x tiene carro

En forma lógica

$$\neg(\forall x)\ (Rx \rightarrow Sx)$$

Ejercicios propuestos

1. Simbolizar los siguientes enunciados:

   a) Toda grama es verde

   b) Sólo los hombres son pensantes

   c) Para todo x, si x > 2 entonces x > 1

   d) Ningún pájaro tiene cuatro patas

   e) Ningún hombre es a la vez loco y cuerdo

   f) Sólo los números positivos son mayores que cero

2. Se tiene el siguiente universo: {1,2,3,4}, los valores de P: {1,2} y los valores de

Q: {1,2,3}. ¿Qué resultado se obtiene en cada uno de los siguientes casos?.

a) $(\exists x)(Px \land \neg Qx)$

b) $(\exists x) \neg(Px \land Qx)$

c) $(\exists x)(Px \lor Qx)$

3. En cada una de las expresiones simbólicas siguientes, decir qué variables están ligadas y cuáles están libres.

a) $(\forall x)[Px \land (\exists y)(Rxy \land Sx)]$

b) $(\exists x)[Px \land (\exists y)(Qxy \lor Rz)]$

c) $(\exists x)[Px \land (\exists y)(Qxy) \lor Ry]$

5.4 Regla de especificación universal

Hay inferencias que tienen cuantificadores universales, para poder aplicar las reglas de inferencia se deben suprimir los cuantificadores. Para resolver ejercicios de ese tipo se cumplen los siguientes pasos:

Se simbolizan las premisas

↓

Se especifican los objetos para eliminar los cuantificadores

↓

Se aplican los métodos de inferencia vistos en la lógica de proposiciones para deducir la conclusión.

Ejemplo: Se tiene el siguiente enunciado:

Cada ciudadano de Barinas es ciudadano de Venezuela
Pedro es ciudadano de Barinas
Por tanto, Pedro es ciudadano de Venezuela

Para cada x, si x es ciudadano de Barinas, entonces x es ciudadano de Venezuela

Se simbolizan las premisas

Bx equivale a x es ciudadano de Barinas
Vx equivale a x es ciudadano de Venezuela

En forma lógica:

$(\;\; x)(Bx \rightarrow Vx)$

Se especifican los objetos para eliminar el cuantificador universal

p: Pedro, sustituyendo a x por p se tiene Vp y Bp

Se aplican los métodos de inferencia. En este caso, se aplica la regla modus Ponendo Ponens

Vp
1) $(Bp \rightarrow Vp)$
2) Bp
3) Vp PP(1,2)

5.4.1 Dos o más Cuantificadores

Todo lo que se ha visto hasta el momento es aplicable también al caso de proposiciones donde se tengan más de un cuantificador universal. Cada cuantificador se trabaja con una variable y a cada una de las variables se les aplica la especificación universal y se hace la deducción completa.

Ejemplo 1:
Para cada x y z, si x es menor que z, entonces z es mayor que x.
Uno es menor que dos.
Por tanto, dos es mayor que uno.

Se simbolizan las premisas:

Pxz equivale a x es menor que z
Qzx equivale a z es mayor que x

En forma lógica:

(x) (z)(Pxz → Qzx)

Se eliminan los cuantificadores haciendo referencia a valores particulares.
En este caso, 1 para x y 2 para z.

Q21
1) (P12→ Q21)
2) P12

Se aplican las reglas de inferencia obteniendo

3) Q21 PP(1,2) que era la conclusión que se quería obtener

Ejemplo 2:

Para cada x y z, si x es igual a z, entonces z es igual a x.
Uno más uno es igual a dos.
Por tanto, dos es igual a uno más uno.

Se simboliza la premisa:

Pxz equivale a x es igual a z
Qzx equivale a z es igual a x

En forma lógica:
1) (x)(z)(Pxz → Qzx)

Para este caso , el valor de x = 1 + 1 y el de z = 2.
Sustituyendo los valores y aplicando las reglas de inferencia se tiene:
Q2, 1 + 1
1) P1+1,2 → Q2,1+1
2) P1 +1,2
3) Q2,1+1 PP(1.2) que era la conclusión que se quería obtener

Ejercicios propuestos

1. Simbolizar las siguientes premisas y conclusiones y dar una deducción completa de inferencia válida.

   a) Cada número par es divisible por dos.
   Diez es un número par.
   Ocho es un número par.
   Por tanto, ocho y diez es divisible por dos.

   b) Ningún número es mayor que el mismo.
   Tres es un número.
   Por tanto, tres no es mayor que tres.

   c) Para cada x, si x es un número, entonces x más uno es mayor que x.
   Cuatro es un número.
   Por tanto, cuatro más uno es mayor que cuatro.

   d) Ninguna fracción es un entero.
   Cuatro es un entero.
   Por tanto, cuatro no es una fracción.

   e) Todos los gatos son felinos.
   Todos los felinos son vertebrados.
   Max es un gato.
   Por tanto, Max es un vertebrado.

   f) Todos los presidentes de Venezuela son venezolanos por nacimiento.
   Caldera fue presidente de Venezuela.
   Por tanto, caldera es venezolano por nacimiento.

5.4.2 Equivalencia Lógica

Dos fórmulas predicativas son equivalentes si para cualquier universo y para cualquier valor de las variables en el mismo universo, las fórmulas tienen los mismos valores de verdad.

Se pueden intercambiar los cuantificadores, cambiando el signo de la función predicativa y del cuantificador. Estas equivalencias se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5.1 Equivalencias entre Cuantificadores

(∀x)Px Todos son buenos	Es equivalente a	¬(∃x))¬Px Es falso que algunos no son buenos
(∀x)¬Px Ninguno es bueno	Es equivalente a	¬(∃x)Px Es falso que algunos son buenos
(∃x)Px Algunos son buenos	Es equivalente a	¬(∀x)¬Px Es falso que ningunos sean buenos
(∃x)¬Px Algunos no son buenos	Es equivalente a	¬(∀x)Px Es falso que todos sean buenos

Fuente: González (2005)

Ejercicios propuestos

1. Simbolizar las siguientes proposiciones, asignando una letra mayúscula al predicado, letras minúsculas para los términos y los símbolos correspondientes de los conectores lógicos.

   a) Se desborda el río Santo Domingo

   b) Juan sale

   c) Ana y Amanda no son hombres

   d) Había mucha gente en la tienda

   e) Luisa ganará la carrera si y solo si entrena todos los días

   f) María estudia

   g) Él está dormido

   h) Héctor es comerciante

   i) El budismo es una religión que se originó en la India, pero tuvo más difusión en la China.

   j) El doble de 35 es igual a 70

   k) Sen(x) es un número menor que 1

l) El peso de helio es menor que el del aire o el aire no empujará el globo hacia arriba.

2. Si P es un predicado simple, Q es un predicado doble y R es un predicado triple, indicar en cada caso si son o no fórmulas atómicas.

   a) Pe

   b) ¬Qxy

   c) Rxyz ↔

   d) Px V S

   e) →

   f) Qxy V Pz

3. Representar las siguientes proposiciones en forma de lógica de predicados.

   a) La Unellez tiene cuatro Vicerrectorados

   b) El triángulo tiene tres lados

   c) Si hoy es miércoles, entonces mañana será jueves

   d) El cuadrado es un paralelogramo

   e) El estacionamiento es pequeño

   f) El petróleo es un producto nacional

   g) La demanda es alta pero la oferta es muy poca

   h) El examen de lógica estaba difícil o mal redactado

   i) Si Luis es Ingeniero civil, entonces diseña puentes.

4. Representar cada enunciado en fórmula lógica incluyendo el cuantificador universal.

   a) x es un maestro

b) z es un número par

c) y está en el centro comercial

d) x es miembro del club

e) x estudia lógica

5. Hacer la traducción completa utilizando la simbología de la lógica de predicado.

   a) Todo tiene su espacio

   b) Para cada x, x se encuentra entre barinas y protuguesa

   c) Todas las cosas tienen valor

   d) A nadie le gusta perder

   e) Para todo x, $x > x + 3$

   f) Todos merecen una oportunidad

   g) Todo el mundo no es zurdo

   h) Nadie llegó a la hora indicada

   i) Casa cosa tiene un lugar

6. Simbolizar las proposiciones

   a) Ningún limón es dulce

   b) Cada millonario tiene riquezas

   c) Todo hielo es frío

   d) Todos los pájaros y peces son animales

   e) Todos los estudiantes son escolares

   f) Aquel libro es una biografía

   g) X no está en esta sección

h Z es el gobernador de este estado

i) Para todo x, x es igual a x y x no es mayor que x

j) Ningún número es a la vez par e impar

k) Sólo los números positivos son mayores que cero

l) A todos los niños les gusta el circo

m) Rosa es presidente y Luis es tesorero

n) Dos es la raíz cúbica de ocho

7. En cada uno de los siguientes casos, deducir la conclusión de las premisas dadas, utilizando la forma típica para las demostraciones.

Pb 1) $(\forall x)(Px \land Rx)$	$Ft \land Fr$ 1) $(\forall x)(Gy \land Fy)$
Ga 1) $(\forall x)(Hx \rightarrow Gx)$ 2) Ha	$3 > 0 \land 4 > 0$ 1) $3 > 1$ 2) $(\forall y)(y > 1 \rightarrow y > 0)$ 3) $4 > 1$
Hx 1) $(\forall x)(Gx \rightarrow Jx \land Hx)$ 2) Gx	$\neg Hf$ 1) $(\forall x)(Hx \rightarrow Rx)$ 2) $\neg Rf$
$\neg N4$ 1) $(\forall x)(x > 0 \leftrightarrow Px)$ 2) $(\forall x)(Px \rightarrow \neg Nx)$ 3) $4 > 0$	$5 - 5 = 0$ 1) $(\forall x)(\neg Px \rightarrow (\neg Nx \rightarrow x = 0))$ 2) $\neg N(5 - 5)$ 3) $(\forall x)(x > 0 \leftrightarrow Px)$ 4) $5 - 5 > 0$
$-3 < 5$ 1) $(\forall x)(x < 4 \land 4 < 5 \rightarrow x < 5)$ 2) $(\forall x)(- 4 < - z \leftrightarrow x < 4)$ 3) $4 < 5$ 4) $- 4 < - 3$	$2 + 0 > 1$ 1) $(\forall x)(x = 2 \rightarrow x = 1 + 1$ 2) $(\forall x)(x = 1 + 1 \rightarrow x > 1)$ 3) $2 + 0 = 2$
$12 = 4 * 3$ 1) $(\forall x)(12 = v * 3 \leftrightarrow 3 + 1 = v)$ 2) $(\forall x)(v + 1 = 4 \leftrightarrow 8 - v = 5)$ 3) $8 - 3 = 5$	$E4$ 1) $(\forall x)(x > 0 \rightarrow Ex \lor Ox)$ 2) $(\forall x)(Px \rightarrow x > 0)$ 3) $P4$ 4) $\neg O4$

Bibliografía

Celani, S. (2003). Apuntes de Lógica Matemática. Notas de clases. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de las Provincias de Buenos Aires

Copi I. (2000). Lógica Simbólica. Editorial Continental. México.

Fernández, S. (s/f). Lógica. Tomado de la dirección electrónica: mimosa.pntic.mec.es/~sferna18/materiales/LA_LOGICA.pdf

García, O. (2003). Introducción a la Lógica. Fondo Editorial de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Perú. Tomado de la dirección electrónica: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/libros/filosofia/intro_logica/contenido.htm. Consulta:

Garrido (2010). Apuntes de lógica. Tomado de la dirección electrónica: https://antesdelascenizas.files.wordpress.com/2010/03/apuntes-de-logica-e28093-1c2ba-bachiller.pdf

González, F. (2005). Apuntes de Lógica Matemática. Universidad de Cádiz. Tomado de la dirección electrónica: http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1710040/Apuntes/Leccion2.pdf

González, G. (2008). Lógica Matemática. Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD). Bogotá. Tomado de la dirección electrónica: https://edumatematicas.files.wordpress.com/2012/05/modulo-logica-matematicas-unad.pdf

Hortalá T., Martí, N., Palomino, M., Rodríguez, M. y Del Vado, R. (2008). Lógica Matemática para Informáticos. Prentice Hall. España.

Julián, P. (2006). Lógica Simbólica para Informáticos. Editorial Alfaomega RA-MA. México.

Maritain, J. (2014). Obras breves de Jacques Maritain: Introducción a la Lógica. Tomado de la dirección electrónica: http://www.jacquesmaritain.com/

Molina, J. (2007). Lógica Clásica. Editado por la Universidad del Valle de Atemajac. Disponible en: http://www.if.edu.mx/avisos/4A9BFC07.pdf

Moret, V. (2014). Representación del Conocimiento y Razonamiento Automático. Universidad de la Coruña. Tomado de la dirección electrónica: http://www.lidiagroup.org/images/descargas/varios/011_rcra.pdf

Muñoz, C. (s/f). Introducción a la Lógica. Facultad de Psicología. Universidad Complutense de Madrid.

Rojas (2007). Compendio de filosofía y lógica: teoría-práctica. Lima

Sarrión, E. y Hernández, I. (2012). Extensiones de la lógica clásica. Introducción a la lógica modal. Sevilla. Disponible en: http://grupo.us.es/ghum609/php/system/files/Introd.L.NoCL_.%20y%20L.Modal_.pdf

Suppes, P. y Hill, S. (1988). Introducción a la lógica Matemática. Editorial Reverté. Colombia.

Uzcátegui (2011). Lógica, Conjunto y Números. Tomado de la dirección electrónica: webdelprofesor.ula.ve/ciencias/uzca/Libros/LoConNu_marzo2011.pdf

Zepeda, L. (2011). Desarrollo de habilidades del pensamiento lógico. Notas de clases. Universidad Tecnológica de la Selva. México. Tomado de la dirección electrónica:

Conceptos básicos de lógica

La lógica es un tema presente en la vida diaria y en todos los campos especializados del conocimiento, ya que en muchas de nuestras actividades, hacemos uso de ella para plantear soluciones a diferentes tipos de problemas. Entre las áreas de conocimiento donde se aplica se pueden mencionar: en matemática para demostrar teoremas y axiomas, en las ciencias puras y naturales para aplicar el método científico y en el área filosófica, por mencionar algunos.

El libro Conceptos Básicos de Lógica como lo indica el título, trata los temas considerados de relevancia para un primer acercamiento formal a la lógica. Está elaborado para apoyar la enseñanza de la lógica que se incluye en los pensa de estudios de las carreras de informática. Fundamentalmente, está orientado al contenido programático que se dicta en las carreras Técnico Superior Universitario en Informática e Ingeniería en Informática de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora (UNELLEZ). El material expuesto está pensado para los estudiantes de informática, pero también puede ser útil para estudiantes de matemáticas o de otras carreras.

ISBN: 978-980-248-276-4