Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático

Jean-Pierre Alem

gedisa

Nuevos

Juegos

de ingenio y entretenimiento matemático

Jean - Pierre Alem

gedisa

Título del original en francés:
Nouveaux jeux de l'esprit et divertissements mathématiques
© by Editions du Seuil, 1981

Traducción: Alberto L. Bixio
Revisión técnica: Femando Komblit

1ª edición en Barcelona, abril de 1984
© by Editorial Gedisa S. A.
Barcelona-6, España
ISBN: 84-7432-202-2
Depósito legal: B. 15.789 - 1984
Impreso en Romanyá - Valls. - Barcelona
Impreso en España
Printed in Spain

historia de un círculo y de un cuadrado
a manera de introducción

En la página de un libro de geometría que había firmado Comberousse se encontraban un cuadrado y un círculo.

Como el libro era poco consultado, los dos se aburrían y generalmente disputaban.

—Yo soy más grande —decía el primero—. Pues un círculo es un cuadrado cuyos ángulos han sido recortados.

El círculo replicaba:

—Es todo lo contrario justamente, pues un círculo es un cuadrado en el cual se ha soplado y así se ha hinchado.

Como no podían ponerse acuerdo sobre la superficie, pasaron a hablar de la belleza.

—Yo soy el símbolo de la solidez —decía el cuadrado—. La igualdad de mis cuatro lados y sobre todo mis ángulos, mis ángulos de ochenta grados,[1] confieren a mi figura una armonía vigorosa y segura.

El círculo respondía:

—En la solidez que tanto alabas, no veo sino vulgaridad. Tu vigor primario no me seduce nada. Te considero como una medida de superficie y nada más. En cuanto a mí, de todas las curvas soy la que mejor está hecha. Los astros adoptaron mi contorno, los artistas siempre recurrieron a mi curvatura y los hombres andan alrededor de mí pues, como sabes muy bien, nada conmueve tanto su carne como el orgulloso hemisferio de un trasero o de un seno femenino. En lo que se refiere a la utilidad, si deseas que hablemos de eso, mi superioridad en este dominio es absolutamente segura. Soy la rueda y habría que ser loco, convendrás en ello, para no admitir que la rueda lo es todo.

—Si no es todo, es sin embargo mucho —reconoció el cuadrado— . Pero yo presto también algunos servicios; soy la base, créeme, de los edificios más durables.

El círculo se encogió de arco.

[1] Este cuadrado no era muy sabio.

—Tú eres estático y lo que no se mueve muere; así lo señalan las estadísticas. Yo soy movimiento y en ese terreno soy irreemplazable. Si las ruedas de las carretas fueran cuadradas, creo en verdad que sería difícil hacerlas avanzar.

Y así reñían durante días enteros. Nadie se atrevía a ponerlos de acuerdo. Habría sido un problema tan arduo y vano como el de la cuadratura del círculo.

Ahora bien, un día un niño que volvía las páginas del libro y al pasar hacía garabatos, dibujó rostros en una y la otra figura. El cuadrado quedó convertido en una cabeza austera y bigotuda. Al círculo le puso cabellos y pestañas en los ojos y le infundió un aire tan gracioso que era menester de toda evidencia pasarlo al género femenino y que por decencia se lo llamara una circunferencia.

Fácil es adivinar lo que ocurrió después. La curva y la rigidez que antes los había irritado durante tanto tiempo parecieron llenos de atractivos a sus sexos opuestos. Púberes, se miraron, luego se amaron y se casaron.

Al principio todo marchó bien. Es natural. La circunferencia se complacía en rodar sobre los lados de su cuadrado y experimentaba placer en demorarse en los ángulos duros que le cosquilleaban su curvatura.

Pero luego la circunferencia se cansó. Como era de cascos ligeros, no tardó en descubrir a polígonos menos monótonos en las cercanías de la página. Primero la sedujo el rectángulo por su silueta espigada. Mantuvo relaciones con él. Luego admiró la elegancia esbelta del rombo y el perfil aguzado del triángulo. También se solazó con el trapecio, y con el paralelogramo creyó que rendía el alma.

En su rincón, el cuadrado se aburría. Lo irritaba ser cornudo. Luego fastidiado se preguntó cómo podría reconquistar el amor y los favores de su voluble esposa.

Se puso a considerar a sus rivales y, como no era tonto, llegó a la conclusión de que era demasiado grueso.

“Demasiado grueso”, pensó “y ¿por qué no confesarlo?, demasiado cuadrado”. Habría querido transformarse pero, ¡ay!, sus ángulos, sus ángulos de ochenta grados, como él creía, habían sido determinados para toda la eternidad.

Como no podía deformarse, un día se le ocurrió la idea de plegarse. Lo hizo por su diagonal y, en virtud de una trivial maniobra, se redujo a la mitad con lo cual se convirtió sin más ni más en un triángulo isósceles y rectángulo.

La circunferencia, conquistada por ese audaz artificio, volvió a sentir gusto por su esposo.

De su hipotenusa la circunferencia se hizo un diámetro e hizo cuerdas de los lados que la estrechaban tensamente o bien se refugiaba en el hueco de sus bisectrices donde la abrazaba su tierno perímetro.

Pronto, sin por ello ser más o menos redonda, la circunferencia se encontró embarazada, pero no quisieron tener por hijo a una figura híbrida, ni siquiera a un pequeño polígono como aquellos grandes con los cuales ella no había tenido reparos en tratar. Hicieron el voto de que en su momento la circunferencia diera a luz un teorema.

Y fue, en efecto, un teorema el hijo que tuvieron, un hijo grande y fuerte. Lo llamaron Pitágoras.

notaciones

$\overline{abc}$ número escrito con las cifras representadas por a, b, c,
× multiplicado por
poco diferente de
$12 = M_o 3$ 12 es múltiplo de 3
$13 = M_o 3 + 1$ 13 es un múltiplo de 3 + 1 (notación elegida porque es más clara que la notación clásica $13 \equiv 1$ mod. 3)

	DIFICULTAD		CONOCIMIENTOS MATEMATICOS REQUERIDOS
☐	fácil	☐	ninguno o rudimentarios
☺	bastante fácil	⚀	elementales
😐	bastante difícil	⚁	bastante serios
☹	difícil	⚂	serios

Juegos

1
el arcabuz del presidente

😐▪

Alrededor del comienzo de su período de siete años de mandato, el señor Giscard d'Estaing, presidente de la República, se había detenido en uno de sus viajes en cierta ciudad de Francia. El alcalde le hizo visitar las excavaciones emprendidas en esa ciudad y en el emplazamiento de una antigua batalla; le obsequió un arcabuz encontrado entre los restos. Esa visita se había realizado el último día de un mes.

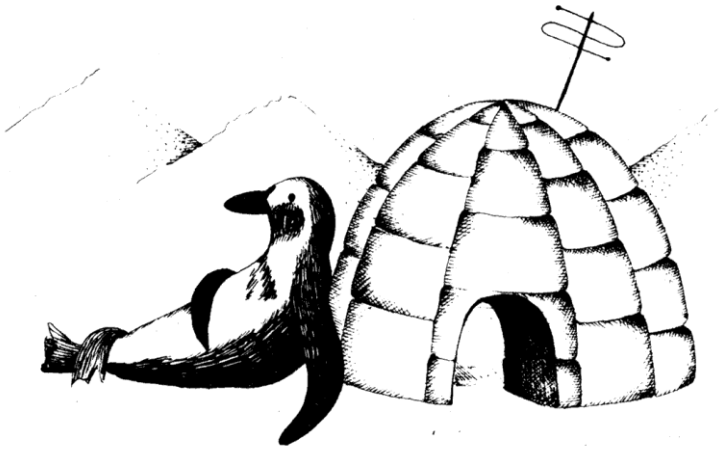
Sabiendo que el día del mes de la visita multiplicado por la diferencia entre la fecha de esta visita y la fecha de la antigua batalla, y multiplicado luego por la edad del duque que perdió la batalla, da 636.724, determinar la ciudad en la que se detuvo el presidente.

Solución

2
el pingüino sedentario

😐▪

Un explorador encuentra un pingüino. Después de intentar en vano entablar una conversación con este animal taciturno, le vuelve las espaldas y camina hacia el norte. Recorre diez kilómetros en línea recta, luego, estimando que el paisaje es monótono, cambia de dirección y hace diez kilómetros hacia el oeste y luego, por fin, diez kilómetros en dirección del sur. Al terminar esta marcha vuelve a encontrar al mismo pingüino que no se ha movido del lugar. ¿Dónde se encuentra pues ese pingüino?



Solución

3
el croquet y los dos universitarios

El señor Boussardon, profesor universitario jubilado, vive en una bonita calle y del lado elegante, el lado de los números pares en el que sólo hay casas individuales rodeadas de jardines. Su vecino de la derecha es el señor Arnolfe, profesor del liceo con el cual está muy ligado. Aquel domingo los dos universitarios mientras se pasean hablan de la jubilación.

—La ventaja de ser profesor de una facultad —dice Boussardon— consiste en que uno no se jubila antes de los 70 años.

—Bien tarde, por cierto —dice Arnolfe.

—¿Por qué? ¡Yo no soy ningún viejo chocho! Y vea usted a mi vecino de la izquierda. Corcoran, el exportador de semáforos, tiene 75 años y todavía dirige su negocio.

—Yo quisiera jubilarme a los 50 años —dice Arnolfe—. Así podría, una vez alcanzada esta edad, dedicarme enteramente al juego de croquet.

Como Boussardon se encoge de hombros, Arnolfe agrega:

—¿Sabe usted que para llegar a la clase internacional un jugador de croquet debe entrenarse de 5 a 6 horas por día?

—¡Internacional de croquet! —suspira Boussardon.

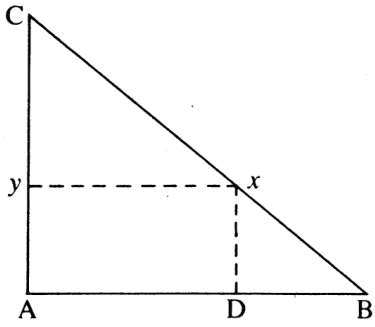
¡Qué ridículo!... Vea —agrega al llegar frente a su puerta—, acabo de observar que el producto de mi edad por el número de mi casa es igual al producto del número de la casa de usted por su edad.

¿Cuáles son los números de las casas de los dos profesores y cuál es la edad de cada uno?

Solución

4
batalla naval

☺•



Un buque de carga se encuentra en A y una fragata enemiga en B. El carguero lleva la dirección AC, perpendicular a AB.

1) Sabiendo que la velocidad de la fragata es dos veces mayor que la del buque de carga, ¿qué dirección deberá tomar la fragata para interceptar al carguero? Se supone que las dos naves avanzan en línea recta, es decir, si C es el punto del encuentro, ¿cuál es el ángulo $\widehat{ABC}$?

2) El alcance máximo de los cañones de la fragata es de 8,268 millas. AB= 10 millas.

¿A partir de qué punto X la fragata podrá abrir fuego con posibilidades de alcanzar al buque de carga? Dicho de otra manera, hay que calcular BX.

Solución

5
cómo un trocito de carbón plantea problemas

☺

A la señora Clytemnestre Clou se le metió un trocito de carbón en un ojo mientras atravesaba un túnel; el episodio la traumatizó y dio prematuramente a luz a Cléopâtre. Esta conservó de aquella aventura la fobia de los túneles. Ahora bien, un día Cléopâtre tenía que tomar un tren en Labegude, donde un largo túnel se abre justamente a la salida de la estación. Cléopâtre se preguntó con angustia en qué vagón debía viajar para estar el menor tiempo posible expuesta a los peligros de la vía subterránea.

—¡Ah! —suspiró —, si mi tío Clovis estuviera aquí me lo diría.

En ausencia de Clovis, ¿habría podido usted aconsejarla?

Solución

6
el tanque bígamo

Un tanque lleno de agua pesa seis veces más que cuando está vacío. Lleno con otro líquido, pesa 69 veces más que cuando está vacío. ¿Cuál es ese otro líquido?

Solución

7
vértigo aritmético

😐⚂

¿Cuál es el mayor número que puede escribirse con tres cifras idénticas? ¿Cuántas cifras (aproximadamente) tiene ese número?

Solución

origen de los signos y vocablos matemáticos

La aritmética es una ciencia muy antigua, puesto que los griegos Pitágoras, del siglo vi antes de nuestra era, y Diofante, del siglo IV de nuestra era, se cuentan entre sus representantes más brillantes. Pero el desarrollo de la aritmética y luego el de su hermana menor, el álgebra, se vio trabado hasta fines del Renacimiento por el hecho de que estas ciencias no poseían ni el lenguaje ni los símbolos que les eran necesarios. Para convencerse de esto basta con leer a los antiguos autores: el enunciado de las propiedades más bellas es de una complicación engorrosa. Por eso, a partir del siglo XV los matemáticos crearon signos que permitían una escritura clara y concisa. Esos esfuerzos continuaron hasta Descartes, quien los sintetizó y dio al álgebra notaciones más o menos definitivas en su *Geometría,* publicada en Leyden en 1637.

ARITMETICA

Del griego *arithmêtikê* derivada de la voz *arithmos*, número [2]

Los signos

+ y – en el origen de las abreviaturas comerciales se los encuentra en *Compendium arithmetica mercatorum,* de Eger, impreso en 1489 en Leipzig por J. Widmann. Antes, y aun después, los matemáticos empleaban o emplearon las palabras *et* o *additus*, *demptus* o *minus* (Fibonacci, 1202). *Ṗ* y *ṁ* (Nicolás Chuquet, 1484) *ṗ* y *ṁ* (Cardan, siglo XVI).

× signo de multiplicación; aparece en la obra del inglés William Oughtred *Clavis mathematica* (Oxford, 1631). Antes, Michel Stiffel había empleado el signo M (1545); Frangois Viéte, el fundador del álgebra moderna, escribía *ìn.*

[2] Cálculo proviene del latín *calculus,* piedrecilla, guijarro; en efecto, los guijarros fueron uno de los primeros instrumentos de cálculo.

•	nuevo signo de multiplicación introducido por el filósofo y matemático Leibniz en 1698.
:	este signo de la división se debe igualmente a Leibniz. Antes de él, en 1659 el inglés Rahn había usado el signo ÷, que aún se emplea a veces en los países anglosajones.
=	se encuentra en *The Wehstone of Witte* de Robert Recorde publicado en Londres en 1557. En el continente, hasta Leibniz, se continúa escribiendo el signo cartesiano α.
> <	mayor que y menor que, fueron signos imaginados por Thomas Harriott *(Arte Analytica praxis*, Londres, 1631).
( )	el paréntesis se debe al matemático francés Girard (principios del siglo XVII).
∞	símbolo del infinito se encuentra en *Arithmetica infinitorum*, 1655, de Wallis.
a ≡ b (mod c)	a = b módulo c, que significa que a es múltiplo de c más b, fue imaginado por Gauss en 1801.
!	el signo de la factorial (3! = 1 × 2 × 3) fue creado por Kramp en 1808.

Exponentes y radicales

a^3	la notación de las potencias por medio de exponentes se atribuye a Descartes quien escribía aa, a^3, a^4, a^5, etc. El empleo de aa por a^2 continuó durante mucho tiempo (el mismo número de signos tipográficos). Pero si Descartes generalizó el empleo de los exponentes, no fue él quien los inventó. Se los descubre en el *Triparty en la Science des nombres*, escrito en 1424 —y redescubierto en 1841— por el médico y matemático Nicolás Chuquet.
√, √√, √√√	la primera utilización de estos signos para designar la raíz cuadrada, la raíz cúbica, la raíz cuarta, se encuen-

tra en el matemático alemán Rudolph *(die Coss* Leipzig 1525); su compatriota Michel Stiffel los vulgarizó en *Arithmetica Universalis* (1544).

Las fracciones

Las fracciones ya eran conocidas por los egipcios (fracciones inversas 1 /a) y por los babilonios. Pero la barra de la fracción fue inventada por los árabes. En el siglo xix, A. de Morgan propuso la forma a/b.

Los términos «numerador» y «denominador» fueron creados por Nicolás Chuquet.

Los números decimales fueron introducidos en la aritmética por el belga Simón Stevin, llamado Simón de Brujas, en 1585. Entonces las fracciones decimales pudieron ser asimiladas en los cálculos a los enteros. Las notaciones variaron; pasaron por las diferentes fases siguientes:

643	(0) 3(1) 2(2) 4(3)	Stevin (1585)
643	0 324	Bürgi (1592)
643	ı 324	Viète (1598)
643	. 324	Neper (1605)
643	, 324	hoy.

ALGEBRA

Palabra formada por las dos primeras palabras del más célebre de los tratados árabes sobre este tema, *Al djabr w*' *almûkâbala* de Al-kwârismi, escrito en el siglo VIII. Ese término no siempre fue usado. A principios del siglo XV se prefería decir "arte maggiore'' y a fines del siglo XVI, Viéte empleaba la expresión "logística especiosa".

Las letras

El empleo de las letras fue introducido o, por lo menos generalizado, en álgebra por François Viète (en *Artem Analyticam*, Isagoge, 1591). Este autor utilizaba las consonantes para representar las cantidades conocidas y las vocales para representar las cantidades desconocidas. Descartes empleó las primeras letras del alfabeto para representar las cantidades conocidas y las últimas letras para representar las desconocidas, f (x), f ' (x) f " (x). En 1718, el suizo Johann Bernoulli empleó φ (x) para representar una función de la variable x.

A partir de 1797, Lagrange generalizó el empleo de f (x), así como el de f ' (x) y f " (x) para designar las derivadas primera y segunda de f (x).

Según parece el signo de la integración ∫ fue inventado por Leibniz.

Fue el alemán Stifel quien tuvo la idea de colocar todos los términos de una ecuación en un miembro y cero en el otro miembro.

Los números imaginarios

Fueron los matemáticos italianos Cardan (1545) y Bombelli (1560) quienes tuvieron la idea de tomar en consideración las raíces cuadradas de los números negativos, con lo cual crearon números que llamaron "sofísticos", y que después fueron calificados como "envueltos" (Girard, siglo XVII), "imaginarios" (Descartes) y "complejos" (Gauss).

Euler eligió como símbolo de los imaginarios $i = \sqrt{-1}$.

TRIGONOMETRIA

Medida de los triángulos. Esta palabra fue empleada por primera vez por Viète.

Unidades

Minuto (de ángulo) y segundo (de ángulo) son expresiones utilizadas para definir esas divisiones angulares en la Europa Occidental de la Edad Media: *pars minuta prima, pars minuta secunda.*

Las notaciones ’ y ” fueron imaginadas por los bizantinos.

Líneas

Seno. Cuando se introdujo la trigonometría en Europa, a fines de la Edad Media, se consideraba como función circular fundamental la longitud de la cuerda (en latín *inscripta:* línea inscrita). Pronto se advirtió que la función de uso más cómodo era la semicuerda, en latín *semi-inscripta* que se escribió con las abreviaturas *s.ins.* Esta abreviatura se transformó luego en *sinus* mediante la intercalación de una *u* fonética que daba además una terminación latina (de cualquier manera se ve que *sen* a = *s. ins.* 2a). Los árabes emplearon la palabra *jaib* (hendidura, raja).

Coseno. Palabra creada por el inglés Edmond Gunter en 1620; un siglo antes el astrónomo alemán Rheticus empleaba los términos *sinus complementi.* Los árabes decían *tajail.*

Tangente. La palabra *tangens* aparece por primera vez en las *Geométrica Rotundi* de Thomas Fincke (1583); en el siglo XIII, Ronert el Inglés decía *la sombra,* traducción de la palabra árabe *dhel* (los árabes también decían *momas,* que toca).

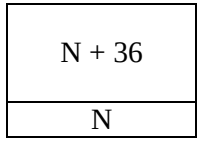
Cotangente (?); los matemáticos árabes decían *taman al momas.*

8
la cohorte beoda

😐•

La cohorte beocia estaba formada en cuadrado. Teniendo que llevar a cabo dos operaciones con una sola cohorte, un general la dividió en virtud de un solo movimiento en dos rectángulos, uno de los cuales tenía treinta y seis hombres más que el otro.

¿Cuáles eran los efectivos de la cohorte?



Solución

9
el marqués de Touchemoulin recluta hombres

☺•

El marqués de Touchemoulin se enfurece al comprobar que hombres de su viejo enemigo, el barón de Virepierre, entraron en su casa y cortaron el olivo que había traído de Tierra Santa y que producía frutos sin hueso. Touchemoulin jura arrasar los dominios de Virepierre y para hacerlo encarga a sus escuderos Réo y Mur que recluten una tropa de hombres dispuestos.

Unos días después se presenta en el anexo del castillo donde los escuderos reúnen a sus reclutas. El marqués comprueba con enojo que Réo sólo obtuvo los 7/20 del número total de hombres necesarios y Mur menos todavía: sólo los 2/5 del total reunido por Réo.

—Ha transcurrido una semana y todavía no habéis encontrado a 50 de estos bandidos —exclamad marqués—. ¡Si el lunes no tengo mis efectivos completos, os haré empalar! ¿Cuáles eran los efectivos deseados por este irascible aristócrata?

Solución

10
los Clou van a la feria

😐▪

Clodomir, Clotaire y Cléobule, tres primos Clou, van a la feria con sus mujeres. Una de esas señoras se llama Madeleine, otra Marthe y la tercera Martine. Cada una de estas seis personas compra uno o varios objetos y paga cada objeto tantos francos como objetos compró.

Clotaire compra 23 objetos más que Madeleine, Clodomir 11 más que Marthe. Cada hombre gastó 63 francos más que su mujer.

¿Cuál es la mujer de cada cual?

Solución

11
dramáticas permutaciones en la familia Clou

☺•

Al año siguiente de lo que se acaba de leer, Clodomir, Clotaire, Cléobule y sus tres mujeres vuelven a la feria; cada uno hace compras y cada objeto comprado cuesta tantos francos como objetos compró. En cada hogar, uno de los dos cónyuges gasta 325 francos más que el otro. Martine es la que más gasta, la sigue Clodomir. Cléobule compró 13 objetos más que Marthe.

¿Cuáles son las dramáticas permutaciones acaecidas en la familia Clou?

Solución

12
Clotaire es insaciable

Clotaire, ¡ay! era jugador y perdía a más no poder. Con frecuencia había recurrido a la generosidad de su tío Clovis Clou. Aquel día le escribió: “Vuelvo a apelar a usted. Por una suma inferior a 20.000 francos pero superior a 10.000 francos”. Y queriendo halagar la manía del matemático, agregaba: “El monto de esa suma en francos cuando se divide por once da 5, dividida por 12 da 7, por 13 da 8 y por 14 da 13”.

Clovis Clou respondió:

“Mi querido Clotaire, ¿cómo puedes ser tan torpe? Tu padre también jugaba pero por lo menos sabía hacer trampas. La suma que te enviaré —si a pesar de todo sabes calcular el monto, como no lo espero en absoluto— es inferior a 10.000 francos. Su monto en francos cuando se lo divide por cinco da 3, dividido por 7 da 4, por 13 da 10 y la suma de sus cifras es igual a 24.”

¿Cuál era la suma pedida por el sobrino y cuál la propuesta por el tío?

Solución

13
las velas sabáticas

☺⚂

La señora Bloch enciende un primer sábado una vela de su candelabro que mantiene encendida durante una hora, el segundo sábado mantiene encendidas dos velas durante el mismo tiempo, el tercer sábado tres velas y así sucesivamente. Cada vela tarda cuatro horas en consumirse enteramente.

¿Cuál debe ser el número *n* de velas para que en el *n*-ésimo sábado esta manera de proceder culmine en el consumo total de las velas?

Solución

14
En un camino de la Lozère

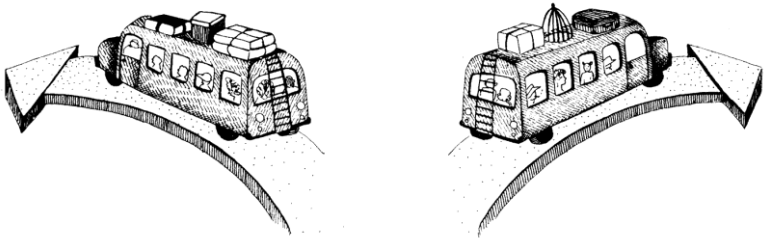
☺•

Dos ómnibus salen al mismo tiempo de Mende y de Ales, cada uno a una velocidad uniforme pero uno marcha más lentamente que el otro. Se cruzan a 28,8 kilómetros de aquella de las dos ciudades que se encuentra entonces más cercana.

Llegados a su destino los ómnibus estacionan una media hora para permitir el cambio de pasajeros, luego vuelven a partir en sentido inverso: el de Mende regresa a Mende y el de Alès a Alès. Se cruzan a 14,4 kilómetros de aquellas de las dos ciudades que está entonces más cercana.

¿Cuál es la distancia que hay entre las dos ciudades?

(El resultado puede obtenerse mediante dos operaciones elementales.)



Solución

15
las meriendas de la señora Minouflet

😐

Todos los miércoles la señora Minouflet reúne a sus nietos alrededor de una merienda; mujer fiel a sus costumbres, para esta ocasión compra un número invariable de pastelitos que distribuye siempre de manera igual entre los niños. Un miércoles, Arsène no acude a la reunión y cada chico recibe dos pastelitos de más. El miércoles siguiente, Arsène llega con un compañero y cada niño recibe un paste- lito de menos.

¿Cuántos nietos tiene la señora Minouflet?

Solución

16
Babou y sus babuinos

😐

Babou acaba de recibir el babuino correspondiente a su cumpleaños. Es ésa una costumbre de la familia: el día de su nacimiento le regalaron 1 y para cada cumpleaños le regalaban 1.

Pero Babou está un poco triste. Los 2/5 del número de babuinos que recibió hasta ese día y que se drogaban murieron a causa de una dosis excesiva, durante una desdichada partida verificada hace apenas unos meses... en octubre o en noviembre de 1979. Babou piensa que tendrá que esperar ocho años para reconstruir, si todo va bien, el equipo que debería tener hoy.

Sabiendo que este enunciado le permite a usted determinar la fecha exacta del cumpleaños de Babou, ¿qué edad tiene ésta?

Solución

17
un crédito singular

Clovis prestó a Cléobule una suma que le pidió que le devolviera en 10 años sin intereses y de la manera siguiente:

al terminar el primer año, Cléobule devolverá la mitad, al terminar el segundo año, devolverá la tercera parte de lo que todavía debe.

al terminar el tercer año, devolverá la cuarta parte de lo que todavía debe.

al terminar el cuarto año, devolverá la quinta parte de lo que todavía debe.

…

al terminar el noveno año, devolverá la décima parte de lo que todavía debe.

al terminar el décimo año devolverá el saldo, una bagatela de menos de 300 francos.

Todas estas operaciones se expresan en números enteros de francos.

¿Qué suma prestó Clovis?

Solución

18
la falla del tenedor de libros de la fábrica Clou

😐▪

El señor Balaquet, tenedor de libros en la fábrica C. Clou & Co., en cuarenta años nunca se equivocó en una suma. Pero esta mañana advierte consternado que su balance contable presenta una diferencia de 54 francos. Clovis Clou entra en el escritorio y viéndolo consternado le pregunta la causa de su emoción.

Balaquet le explica lo que le ocurre: busca el error pero no lo encuentra.

—¿Le faltan 54 francos? —pregunta Clovis y después de reflexionar un instante agrega—: Usted debe de haber invertido dos cifras en algún número.

El tenedor de libros toma a buscar el error partiendo de esta indicación y por fin lo encuentra.

¿Cómo pudo Clovis Clou prever la clase de error de su tenedor de libros?

Solución

19
Ardientes bailarinas

Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada una dama bailó con 7 caballeros, una segunda dama con 8, una tercera con 9, y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos los hombres.

¿Cuántas damas había en aquel baile?

Solución

20
desconcertante viaje a Londres

Tres parisinos, André, Baptiste y Charles, toman el avión para Londres. Uno está con su mujer, el otro con su hija y el último con su ahijada.

En Londres, aprovechando los precios ventajosos, cada cual compra según su sexo un traje o un vestido y cada compra cuesta el precio de un viaje de ida.

André y su mujer deciden quedarse en Londres. Los demás regresan a París por la misma vía y por el mismo precio que pagaron a la ida.

Nuestros viajeros gastaron un total de 2 400 francos en sus compras y en sus pasajes de avión (los cuales costaron la mitad a André y su mujer que sólo pagaron el pasaje de ida). A su regreso Charles se encuentra con un amigo que lo felicita por su traje.

—Lo compré en Londres —dice Charles—. ¡Nada caro! Doscientos cuarenta francos.

Teniendo en cuenta todo lo dicho, este precio parece sorprendente. Sin embargo, Charles no mintió. ¿Cómo se explica esto?

Solución

21
bombardas y pirámides

En la época en que los cañones lanzaban balas, éstas eran almacenadas en parques de artillería en forma de pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 15 balas.

¿Cuál era el número de balas por pirámide?

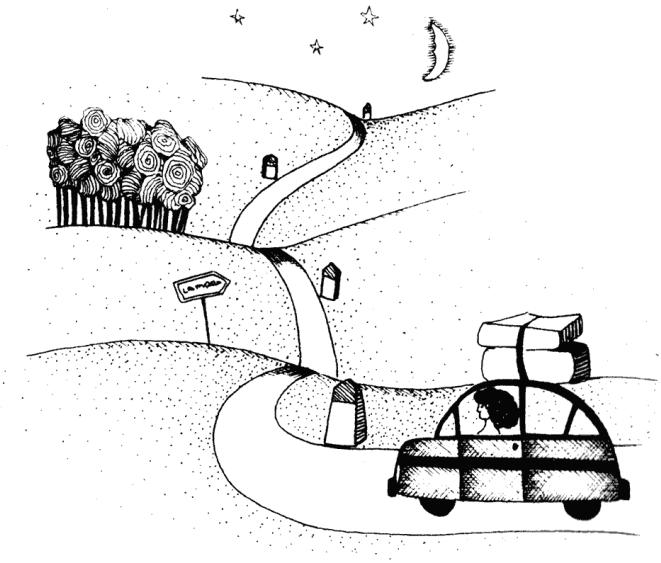
Solución

22
el bólido y los tres mojones

□•

Un automóvil pasa frente a un mojón que lleva el número kilométrico $\overline{AB}$. Una hora después el automóvil pasa frente al mojón $\overline{BA}$, una hora después frente al mojón $\overline{A0B}$.

¿Qué números tienen los mojones y cuál es la velocidad (constante) del automóvil?



Solución

23
cuidado con las ovejas

☹•

Dos hermanos heredaron un hato de ovejas que deciden vender para repartirse por partes iguales la suma obtenida. Cada oveja vale tantos francos como ovejas hay. El precio de venta está constituido por monedas de 10 francos, más un pico en francos, inferior a 10 francos.

El reparto se hace de esta manera: el hermano mayor toma una moneda de 10 francos, el hermano menor toma una a su vez y así sucesivamente hasta la última moneda de diez francos que le toca al mayor, en tanto que el hermano menor recoge el pico.

—Esto no es muy justo —dice el hermano menor—, he recibido menos que tú.

—Es cierto —responde el hermano mayor que saca de su bolsillo algunas monedas de un franco que entrega a su hermano.

Las partes son ahora iguales.

¿Cuántas monedas sacó de su bolsillo el hermano mayor? *(Este problema es interesante porque la mayor parte de las personas a quienes se les planteó terminaron en una indeterminación. Sin embargo el problema tiene todos los datos necesarios para hallar su solución.)*

Solución

24
victoria de Zenobia

Dos caravanas se ponen en marcha en el mismo momento. Una va de Palmira a Petra, la otra de Petra a Palmira. Cuando se cruzan, los palmirenses recorrieron 1/5 más que los nabateos (de Petra) de la distancia que hay entre las dos ciudades.

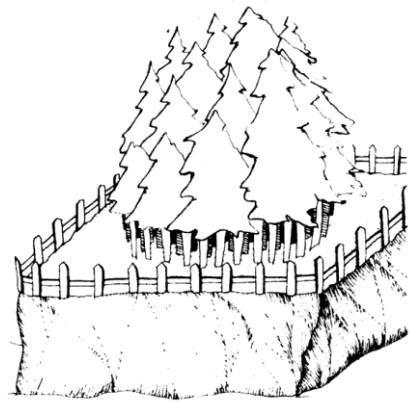
A partir de ese punto del encuentro los palmirenses tardan 8 días para llegar a Petra.

¿Cuántos días de viaje más que los palmirenses tardarán los nabateos en llegar a su destino sabiendo que las velocidades de las caravanas son constantes?

Solución

25
un cuadrado de abetos en número redondo

☺



Paul París, de Allarmont, en los Vosgos, posee un terreno de una hectárea dentro del cual formó un abetal. Los árboles están plantados regularmente a un metro unos de otros y forman un cuadrado.

Paul París se encuentra con Alain Cuny, maestro de escuela de Bionville.

—¿Sabes? —le dice—. He ampliado mi cuadrado de abetos. En el nuevo cuadrado tengo 1.351 árboles más.

—¡Diablos! —exclama Alain Cuny.

—¿Por qué lo dices?

—Porque ese cuadrado de abetos te hace un número redondo.

¿Cuál es la significación de la frase sibilina del sabio maestro de escuela. El lector lo sabrá si calcula el nuevo número de abetos que posee Paul París.

Y, en realidad, ¿cuál es la forma de su terreno?

Solución

las antiguas máquinas de calcular

El cálculo es una operación ingrata y está sujeta a errores. Por eso, desde la antigüedad, los hombres procuraron crear instrumentos o máquinas capaces de efectuar las operaciones clásicas o por lo menos capaces de ayudarlos en esa tarea...

Al principio se valieron de instrumentos, es decir, aparatos que no comprendían ningún mecanismo como resortes, levas o engranajes. En ese dominio, como en muchos otros, los chinos fueron precursores puesto que imaginaron los *ábacos*, hoy desaparecidos, y las *bolas (suan pan)*, aún ampliamente utilizadas. Ellas permiten a operadores adiestrados calcular a una velocidad desconcertante para el profano.

Los occidentales trataron de perfeccionar este artefacto sustituyendo las bolas ensartadas en ejes rígidos por guías o correderas con cifras. Estos nuevos instrumentos, el primero de los cuales fue construido por Troncet, recibieron el nombre de *aritmógrafos*. Los aritmógrafos eran máquinas de sumar. Para llevar a cabo las multiplicaciones, Jean Neper, el inventor de los logaritmos, tuvo la idea de hacer móviles las columnas de que se compone la tabla de Pitágoras. En su *Rabdologie*, publicada en Edimburgo en 1617, este autor dio el esquema de un aparato multiplicador fundado en ese principio: se lo llamó *bastón de Neper*.

Numerosos perfeccionamientos del aritmógrafo y del bastón de Neper dieron nacimiento a muchos instrumentos de los cuales los más conocidos son las *regletas de Grenaille*, imaginadas por un ingeniero de ferrocarriles, y el *calculador de León Bol lee*, el futuro constructor de automóviles.

En general, estos auxiliares del cálculo fueron poco empleados. Terminaron por desaparecer y sólo constituyen curiosidades con la excepción del ábaco de bolas y de la clásica regla de calcular.

Este último instrumento se funda en un principio totalmente diferente; como escribe con mucha razón Edouard Lucas, es una "tabla de logaritmo dispuesta en barra". Se atribuye su invención a Edmond Gunther, en 1624. Es curioso que este notable instrumento, más cómodo y más eficaz que todos sus competidores se haya empleado poco y haya sido poco conocido hasta comienzos

de nuestro siglo; tal vez ello se deba a que sólo da resultados aproximados. Muy diferente fue la trayectoria —la prodigiosa trayectoria— de las máquinas de calcular. Durante mucho tiempo se atribuyó el invento de la máquina de calcular a Blaise Pascal. Hoy sabemos que tuvo un precursor, Wilhelm Schickard de Wurtemberg, célebre a la vez como orientalista, matemático, astrónomo, cartógrafo y grabador. La razón de la oscuridad que envolvió durante tanto tiempo el *reloj de cálculo — Rechenuhr*— es la de que a comienzos del siglo XVII en la Alemania meridional la inquisición y los gremios eran instituciones temidas; Schickard temía que su invento le valiera los rayos de la una y de los otros: de la primera porque su máquina podía considerarse diabólica, de los segundos porque podían acusarlo de haber violado el monopolio de los relojeros. Por eso sólo comunicó su creación a su amigo Kepler en una carta del 20 de septiembre de 1623 que, con otros documentos, sólo se publicó en 1718.

Muy ilustre y excelente maestro Kepler:

...Lo que tú has realizado en el plano algebraico intenté yo últimamente hacerlo en forma mecánica: concebí una máquina compuesta de once ruedas completas y de seis ruedas mutiladas; calcula de manera instantánea y automática partiendo de números dados pues suma, resta, multiplica y divide. Te divertiría mucho ver por ti mismo cómo esta máquina acumula y transporta simultáneamente hacia las filas de la izquierda una decena o una centena y cómo, en cambio, deduce lo que uno se lleva cuando se trata de una resta.

El 25 de febrero de 1624, Schickard comunicaba a su amigo la destrucción de su máquina:

...Te había hecho construir un ejemplar de mi máquina pero hace tres días quedó destruida en un incendio nocturno que estalló de improviso. Esta pérdida me es tanto más cruel por cuanto no tengo tiempo para volver a construir otra en breve plazo.

En efecto, Schickard, absorbido por múltiples trabajos, no pensó más en su máquina y su invento se habría perdido si no hu-

biera enviado a Kepler croquis muy precisos destinados a su mecánico Pfister. De conformidad con esos croquis se construyó un modelo que fue presentado el 25 de enero de 1959 en el Seminario de Historia de las Ciencias de Berlín.

De manera que el descubrimiento de Pascal es posterior al de Schickard, aunque totalmente independiente. Ese descubrimiento no fue inspirado tan sólo por la curiosidad científica, sino también por razones prácticas: el padre del matemático, Etienne, había sido enviado a Rúan en 1639 para reorganizar las finanzas de la Baja Normandía. Tenía que realizar cálculos de impuestos que resultaban muy trabajosos a causa de la multiplicidad y la incoherencia de las unidades de medida. Para ayudar a su padre, Blaise concibió la idea de construir una máquina de calcular. Hizo los planos del mecanismo que en 1642 confió aun relojero de Rúan: el relojero construyó la máquina, que empero no funcionó. Pascal volvió a estudiar el problema y en 1645 —tenía entonces 20 años— logró presentar un modelo que funcionaba. Se construyeron unas quince de estas máquinas de Pascal que fueron puestas en venta en la casa de Messire Roberval, profesor en el Colegio de Francia por la suma de 100 libras (alrededor de 4.000 francos).

Diez de esas máquinas se conservaron en nuestros museos o en colecciones.

Veinticinco años después, el gran matemático Leibniz hizo construir en París su máquina de calcular. No conocía la de Schickard ni se inspiró en la de Pascal, de manera que su creación es enteramente original; por lo demás, esta máquina presenta dispositivos muy ingeniosos, en particular piñones cuyos dientes tienen longitudes en progresión geométrica. Leibniz destinaba su máquina a cálculos astronómicos. La presentó en 1673 a la Sociedad Real de Londres y luego a la Academia de Ciencias de París. Se construyeron dos ejemplares, uno de los cuales se encuentra hoy en la biblioteca de Hannover. Reconocer el mediocre funcionamiento de estos artefactos no significa disminuir el mérito de los geniales inventores de la máquina de calcular; esas máquinas eran máquinas de sumar y las multiplicaciones sólo se realizaban mediante adiciones sucesivas del multiplicando, operaciones facilita-

das por algunos dispositivos ingeniosos, especialmente en la máquina de Leibniz, que exigían empero numerosas vueltas de manivela.

El modelo de *reloj de cálculo* que se reconstituyó en 1959 tenía un funcionamiento muy trabajoso; las dos máquinas de Leibniz nunca fueron usadas en la práctica; sólo la *Pascaline* fue utilizada, pero era muy lenta. La multiplicación de 3872 × 675 tardaba de treinta a cuarenta segundos, que es aproximadamente el tiempo que se necesita para realizar la operación a "mano". La máquina de Schickard nunca fue imitada; la *Pascaline* inspiró algo a Léon Bollée, doscientos cincuenta años después; en cambio, la máquina de Leibniz tuvo una multitud de descendientes hasta época reciente.

En el curso de siglo y medio que siguió se realizaron numerosos progresos del detalle, pero sólo en 1820 un financista de Colmar, Thomas, presentó una máquina verdaderamente nueva, el *aritmómetro* que fue realizada industrialmente en gran número de ejemplares. Entre otras ventajas, el aritmómetro permitía llevar a cabo las multiplicaciones con un número de vueltas de manivela, no ya igual al multiplicador, sino a la suma de sus cifras solamente.

La *Grande Encyclopédie* indica con admiración que la máquina puede efectuar la multiplicación de un número compuesto entre 9 y 28 segundos y agrega: *...un caso en que la máquina produce resultados realmente maravillosos es aquel en que se la aplica al cálculo de tablas de descuento, el establecimiento de cuentas corrientes...*

El aritmómetro cuyo precio variaba entre 150 y 500 francos, según los modelos, fue ampliamente empleado por las compañías de seguros y de ferrocarriles, por los bancos, por el ejército y por la marina. Tuvo por sucesores el *aritmaurel* (1849) —la máquina más rápida del siglo XIX, obra maestra de relojería que era desgraciadamente demasiado costosa y demasiado delicada por lo que sólo se construyó un ejemplar de ella—, la *máquina de Ichebicher* (1882), la *máquina Unitas*, etc.

Sólo a fines del siglo XIX apareció la verdadera máquina de multiplicar que fue construida por un joven de 18 años, Léon Bollée, y presentada por primera vez en la Exposición Universal de 1889. El invento de Bollée fue perfeccionado por el ingeniero Otto

Steiger que lanzó al mercado la *Millonaria*. La Millonaria, según anunciaba su fabricante Hans Egli de Zurich, "es la máquina de calcular más eficaz del mundo. Sólo exige una vuelta de manivela por cada cifra del multiplicador".

A fin de siglo aparecieron aun otras tres innovaciones importantes, un dispositivo impresor, realizado sobre el *aritmotipo Erinks;* la utilización de la electricidad por Selling, que en 1894 construyó una máquina multiplicadora que funcionaba mediante electroimanes y, por fin (lo más importante), la aparición de las máquinas aritmológicas.

Disponiendo de aparatos capaces de efectuar las cuatro operaciones clásicas de la aritmética, los matemáticos trataron de crear nuevas máquinas capaces de realizar una serie de operaciones sin intervención de un operador humano. Este problema fue encarado y resuelto por el inglés Charles Babbage a partir de 1834. Pero después de haber hecho fabricar todas las piezas de su máquina Babbage murió antes de haber efectuado el montaje; aquellas piezas se conservaron en una vitrina del South Kensington Museum de Londres, donde todavía puede vérselas. En 1889 el hijo del matemático publicó *Calculating Engines*, libro en el cual reunió todos los documentos dejados por su padre. De manera que sólo a fines del siglo vino a revelarse el invento.

La máquina de Babbage era doble: estaba compuesta de un *analytical engine* en el que los números, almacenados en un depósito, eran sometidos en el *molino* a una serie de operaciones reguladas por la segunda máquina, la *calculadora*, programada mediante tarjetas de cartón caladas. En realidad, nos encontramos aquí ante el gran descubrimiento de los tiempos modernos.

El problema resuelto en parte por Babbage fue abordado con otros medios por el gran mecánico español Torres Quevedo que ya había realizado un extraordinario jugador de ajedrez autómata [3].

En una comunicación presentada en 1901 a la Academia de Ciencias, Torres Quevedo demostró la posibilidad de traducir mecánicamente una relación analítica o hasta un sistema de relaciones

[3] Conviene tener en cuenta que ese autómata sólo jugaba finales de partidas extremadamente simples (*La Nature*, 13 de junio 1914, pág. 56).

analíticas simultáneas *cualesquiera*. Utilizando electroimanes, Torres Quevedo construyó un primer *aritmóforo logarítmico* que resolvía las ecuaciones $x^9 + ax^5 = b$ y $x^9 + ax^7 = b$.

Otros investigadores trabajaron en el camino abierto por Babbage y Torres Quevedo. Sus máquinas aritmológicas permitieron tratar en tiempo cada vez más breve problemas tales como la solución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de dos variables o la demostración del carácter primario de un número. Cuando se realizó la exposición del centenario del aritmómetro de Thomas en 1820, el comandante Carisson presentó su *máquina de congruencias* que estableció en 15 segundos que el número $2^{31} - 1$ (o sea 2.147.483.647) era primo.

Los progresos de las máquinas de calcular continuaron hasta que se produjo su mutación al terminar la última guerra. Esta mutación nació de los progresos de la electrónica y de la idea que tuvieron los ingenieros de emplear un lenguaje propuesto por Leibniz casi tres siglos antes, el lenguaje binario que se adaptaba perfectamente a la electrónica, puesto que traduce la alternativa básica: la corriente pasa o la corriente no pasa. De esta asociación nació la máquina que marcó tan profundamente a nuestra civilización: la computadora.

La primera computadora —*Eniac*— fue puesta en servicio en 1946 en la Universidad de Pensilvania, Filadelfia. Tenía una memoria de veinte palabras de diez dígitos. En el momento de escribir estas líneas, la computadora más poderosa del mundo es la Cray Number One, utilizada en la investigación nuclear y la meteorología; efectúa un millón de operaciones por segundo.

BIBLIOGRAFIA

Taton, R., *Le calcul mécanique*, París, P.U.F. (Que sais-je?), 1963.

Lucas, Edouard, *Récréations mathématiques*, París, Gauthier- Villars, 1882, reeditado por A. Blanchard en 1975, t. III, pág. 59 a 86.

Ocagne, Maurice d', *Vue d'ensamble sur les machines à calculer*, París, Gauthier-Villars.

Ocagne, Maurice d', *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, París, Gauthier-Villars, 1894.
Couffignal, Louis, *Les Machines à calculer,* París, Gauthier-Villars, 1933.
Fiad, J.-P., *Les Trois Premières Machines à calculer,* París, Ed. du Palais de la découverte, 1963.
Joly, J., *Biographie de Thomas de Colmar*, Estrasburgo, Imprimerie des dernières nouvelles de Estrasburgo, 1931. Torres, M.L., *Machines à calculer,* comunicaciones presentadas a la Academia de Ciencias, Tomo XXXII.
Lanoge, Louis, *Description d'une machine arithmétique jusqu'ici inconnue*, Lyon, 1661 (la regla de cálculo).

26
¿quién hizo mas camino, Li o Alí?

El chino Li y el musulmán Alí, pastores de Kuang-Si, parten hacia el norte en busca de nuevos campos de pastoreo. Caminan tres días pero no al mismo paso. Al primer día, el camino recorrido por Alí es los 9/11 del recorrido por Li, el segundo día los 11/9 y el tercero los 33/31.

Por otra parte, los hombres se fatigan de manera que la suma de los trayectos que cubren el tercer día es un 20% inferior a la del segundo día y ésta inferior en un 20% a la del primer día.

En tales condiciones, ¿quién fue más lejos Li o Alí?

Solución

27
el pentágono de Sin Pan

Sin Pan pidió al emperador de la China un terreno para fundar allí una academia de geometría; tenía que ser un terreno vasto, pues en aquella época ya se había inventado en China lo que hoy es el *campus* universitario. Queriendo asegurarse de que se encontraba en presencia de un verdadero geómetra, el emperador dijo a Sin Pan:

—Dispongo de un terreno en forma de pentágono. Hice marcar con cinco mojones los puntos medios de sus lados. Traza los límites de ese pentágono y es tuyo.

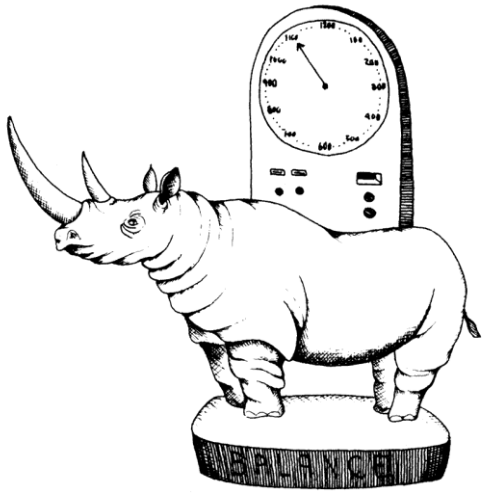
¿Cómo procedió Sin Pan?

Solución

28
el comercio fraudulento del señor Yang

😐•

El señor Yang, comerciante de asta de rinoceronte, vende su producto con un margen de un 50% en relación con el precio que paga a su proveedor, lo cual es mucho, y además el hombre no es muy honesto: uno de los brazos del astil de su balanza es más corto que el otro de manera que el proveedor, cuando le lleva su mercancía, debe colocar 1100 gramos en el platillo para equilibrar el kilo que coloca el señor Yang en el otro platillo. En cambio, cuando se presenta un comprador, no tiene en su platillo los 1000 gramos que deberían equilibrar el kilo que el señor Yang coloca en el otro platillo. En la última entrega que recibió, el señor Yang obtuvo así un súper-beneficio fraudulento de 63 dólares. ¿Cuánto había pagado el señor Yang por esa partida? ¿Y por qué esta verídica historia es inverosímil?



Solución

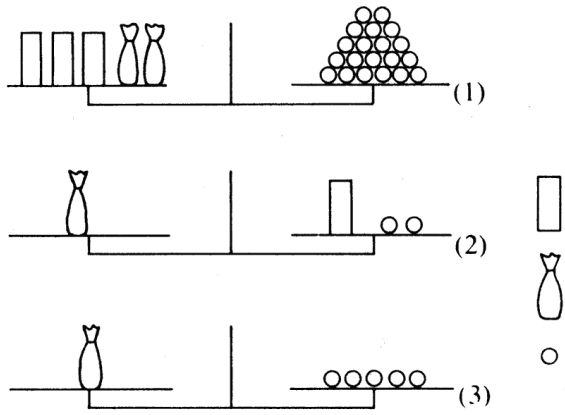
29
escándalo en Macao

☺•

Cuando un individuo turbio se introduce en una comunidad, por honesta que ella sea, no tarda en corromperla.

El señor Ming, que en Macao estaba entregado al mismo negocio que el señor Yang, no tardó en advertir que su deshonesto competidor había amañado su balanza. Primero se indignó. Luego al comprobar que gracias a su fraude Yang había podido bajar los precios y le quitaba sus clientes, se resignó a emplear el mismo procedimiento.

A continuación se dan tres pesadas realizadas por el señor Ming. ¿Puede usted decir quién de los dos, Yang o Ming, era más ladrón?



Solución

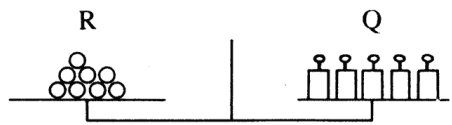
30
quousque tandem abutere, Sinensis...

☺•

¡Ay! el señor Tong, comerciante de especias en Macao, no tardó en reparar en las maniobras fraudulentas de sus competidores Yang y Ming. También él se ve obligado a renegar de su tradicional probidad. Sólo que se le va la mano. Juzgue el lector por sí mismo observando las dos pesadas siguientes.

¿Puede usted decir cuánto gana fraudulentamente cada uno de los tres comerciantes en la venta de una onza de cuerno de rinoceronte cuyo precio de venta es de 180 dólares de Macao la onza? (suponiendo que no hayan engañado a su proveedor en la compra).

1



2

Solución

31
objetada del gobernador de Macao

Como consecuencia del escándalo que había estallado en la corporación de los mercaderes de especias a causa de las maniobras de los señores Yang, Ming y Tang, y no disponiendo de un servicio de verificación de pesas y medidas, el gobernador de Macao decretó que las especias vendidas fueran pesadas dos veces, una vez en el platillo de la derecha de la balanza y una vez en el platillo de la izquierda y que el peso facturado al cliente sería el promedio de los dos pesos obtenidos.

Persuadido de haber tomado una sabia medida, el gobernador se sorprendió mucho al recibir la protesta del presidente de la corporación que le reprochó favorecer a los comerciantes deshonestos con sus balanzas preparadas. ¿Tenía fundamento esa protesta?

Solución

32
el mal caballo de Sun Yat Sen

El ejército del general Pu marchaba con paso tranquilo y se extendía en diez kilómetros de longitud. Pu se sentía menos tranquilo que sus hombres pues debía pasar por un desfiladero en el que había perdido sus tres ejércitos anteriores. Por eso había encomendado al oficial de retaguardia que le enviara un mensaje apenas hubiera salido del desfiladero el último hombre.

Esta vez todo marchó bien y el oficial confió el mensaje tranquilizador al jinete que se encontraba junto a él y que era justamente el joven Sun Yat Sen.

—Ve y entrega esta misiva al general Pu que se encuentra al frente del ejército y regresa enseguida. ¡Apresúrate!

Sun Yat Sen cumplió su misión. Cuando se reunió con los hombres de la retaguardia éstos se encontraban en el lugar por el cual había pasado la vanguardia del ejército cuando el joven partió.

—En verdad no tienes un caballo de carrera —le dijo el oficial.

¿Qué trayecto recorrió Sun Yat Sen?

(Por cierto que la velocidad del ejército y la velocidad de Sun Yat Sen eran constantes.)

Solución

33
la triste historia de Pu, Lu y Yu

El general Pu hace acampar su ejército, pues se ha enterado de que su adversario Chu dispone de 30.000 hombres, y Pu no ataca si no posee la superioridad numérica. Un día, Lu, señor del lugar vecino, le envía un destacamento de refuerzo compuesto de cierto número de secciones iguales y mandado por un capitán.

—Sólo admito a oficiales que yo mismo haya nombrado —dijo Pu al capitán—. Entra en las filas; para mí no eres más que un soldado como los demás.

Al cabo de un rato continúa diciendo:

—Todos parecen bravos guerreros. Pero no los puedo aceptar; vuestras secciones tienen un hombre más que las mías. Por otra parte, no sois suficientemente numerosos para que yo agregue a uno de vosotros a cada una de mis secciones. Y quiero absolutamente que mi ejército esté dividido en secciones y que todas ellas tengan un mismo número de hombres.

—Tal vez habría una solución —dice Yu, el jefe de estado mayor—. Consistiría en reducir en una unidad los efectivos de nuestras secciones así adoptaríamos el mismo número de las secciones de nuestros visitantes. De esta manera todos los soldados (los nuestros y los que nos envía Lu) podrían tal vez repartirse exactamente entre esas nuevas secciones.

—Eres verdaderamente estúpido —dice el general—. Me llegan nuevos soldados y tú quieres que yo reduzca mis secciones. Además, el número de efectivos por sección que tú sugieres es un número que trae mala suerte. Un prisionero franco así me lo dijo. Y tenía razón, pues ése fue el número de sablazos que tuvo que darle mi verdugo (no muy eficaz aquel día) para cortarle la cabeza.

—Entonces —propone Yu—, probemos lo contrario: secciones con un hombre más.

—Me parece bien —dice el general —. Eso hará maniobrar mejor a mi ejército.

Desgraciadamente los soldados de Pu se encontraron repartidos totalmente entre las nuevas secciones y los hombres de Lu aún sobraban.

—¡Probemos todavía con un hombre de más!

El resultado fue exactamente el mismo.

—Continuemos —dice Yu con obstinación—. Aumentemos todavía las secciones en una unidad.

—¡Ah! no —exclama el general agotada su paciencia—. Ya perdí demasiado tiempo a causa de estos bribones que ni siquiera representan la centésima parte de mi ejército. ¡Que les corten la cabeza!

Los hombres de Lu no tuvieron suerte. En efecto, si Pu hubiera sido menos supersticioso o si hubiera sido más paciente y hubiera intentado una operación más, se habrían salvado.

¿Cuántos soldados tenía Pu y cuántas cabezas cayeron?

Solución

34
magia en cajas

☺

Tres cajas contienen: una dos bolas blancas, otra dos bolas negras y la tercera una bola blanca y una bola negra. Los contenidos están indicados en etiquetas BB, NN, BN que han sido equivocadamente pegadas, de suerte que ninguna de las cajas lleva la etiqueta que le conviene.

Para restituir a cada caja la etiqueta que le corresponde se le permite a uno entreabrir una caja, sólo el tiempo necesario para ver una bola.

¿Cómo proceder?

Solución

35
molesta promiscuidad en un autocar de Auvernia

☺☐

En el autocar que une Ambert e Issoire viajan seis personas: el señor Dupont, el señor Martin y el señor Chalus, notabilidades del departamento, y tres malos muchachos, un ladrón, un estafador y un falsificador cuyos nombres son homónimos de los de los tres honorables viajeros antes mencionados (sólo que nos dispensaremos de llamarlos señores).

El señor Chalus vive en Issoire, el estafador vive a mitad de camino entre Ambert e Issoire. El señor Martin tiene cinco hijos. El ciudadano que vive más cerca del estafador tiene tres veces más hijos que éste.

El homónimo del estafador está radicado en Ambert y Dupont gana un partido de billar al ladrón.

¿Cuáles son los nombres del ladrón, del estafador y del falsificador?

Solución

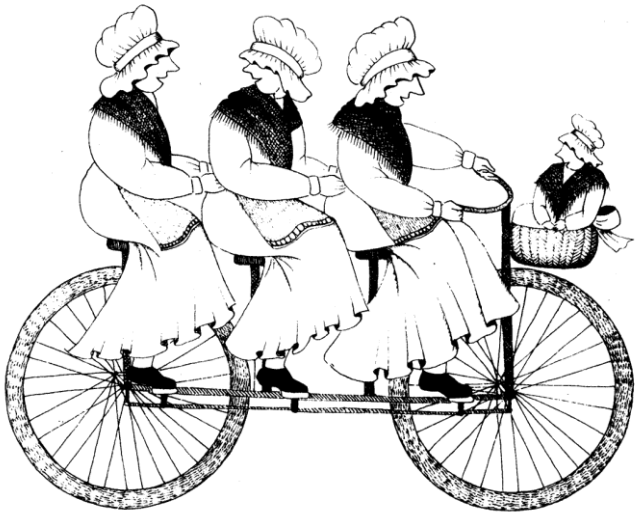
36
una familia alsaciana

—Tengo tantos hermanos como hermanas.

La hermana de la persona que acaba de hablar declara:

—Tengo dos veces más hermanos que hermanas. ¿Cuántos hermanos son?

(La escena ocurre en Ribeauvillé.)



Solución

37
en el hotel del Conejo Rojo

😐▪

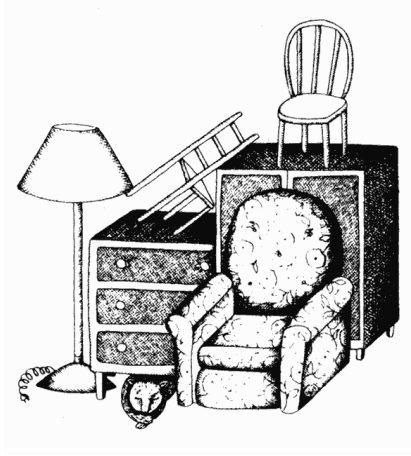
Ese año Clovis Clou participaba en el célebre seminario de matemática de Pontarlier. Estaba alojado en el hotel del Conejo Rojo, establecimiento del cual Clovis no apreciaba mucho su numerosa clientela.

—¡Esta gente es ruidosa y vulgar! -dice Clovis a su viejo enemigo Gaétan d'Upont—. Habría que fusilar a la mitad.

—¡Exagera usted!

—¡De ninguna manera! Precisamente la mitad, contándonos a nosotros dos.

En los intervalos de las sesiones del seminario, ocioso, Clovis Clou juega al billar o hace estadísticas.



Entre los clientes del Conejo Rojo, 3/5 están en pensión completa, los demás en media pensión y entre estos últimos 2/3 cenan y los otros almuerzan.

Los 2/3 de pensión completa, los 3/4 de los que están con media pensión y la mitad de los que almuerzan beben vino. En cada una de las tres categorías, los 4/5 de los bebedores consumen vino tinto del Ródano a 11 francos el litro o beaujolais, cuyo precio (un número entero de francos) es ligeramente inferior al doble del precio del vino del Ródano.

El hotel sirve 1/4 litro de vino por persona en el almuerzo y 1/2 litro en la cena. Por este servicio en la caja del hotel entran 1.390 francos por día.

Después de haber obtenido todas estas informaciones, Clovis se frota las manos.

—Ahora — se dice— podría, si ya no los hubiera contado, calcular el número de clientes de este hotel.

¿Cuántos son, pues, esos clientes (comprendidos Clovis y Gaétan)? ¿Y qué cantidad de beaujolais consumen por día?

Solución

38
Los electores de Pontarlier

😐⚂

El joven alcalde de Pontarlier, que había querido presidir la comida de clausura del seminario de matemática organizado en su ciudad, propuso a los postres el problema siguiente a sus sabios convidados:

"El número de mis electores tiene cuatro cifras diferentes. Si se agregan todos los números que es posible formar con esas cuatro cifras tomadas de tres en tres, se obtiene un total igual al cuadrado de la suma de esas cuatro cifras multiplicado por mi edad e igual al número de mis electores multiplicado por 36/13. ¿Qué edad tengo y cuántos son mis electores?".

Al cabo de dos minutos Clovis Clou dio las respuestas a esas preguntas. Usted tardará sin duda un poco más para llegar a darlas.

Solución

39
recorrido de cinco bandas

☺•

En un billar de 160 centímetros de ancho, está colocada una bola en la parte inferior derecha, a 60 centímetros de cada uno de los bordes.

Esa bola es lanzada sin efecto hacia la parte superior izquierda con el taco en un ángulo de 45° con el lado mayor del billar.

Después de haber tocado cinco bandas, la bola vuelve a su punto de partida.

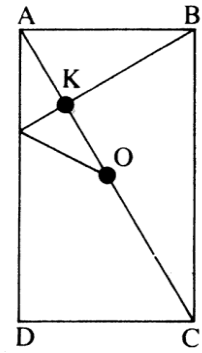
¿Cuál es el largo del billar?

Solución

40
percusiones de Clou sobre un billar de troneras

😐⚀

En un billar inglés A, B, C, D, la bola O se encuentra en el centro y la bola K al pie de la perpendicular trazada de B sobre AC. Lanzando la bola O sobre la bola K, por intermedio de la banda AD, la bola K es enviada a la tronera B. ¿Cuál es la relación de los lados BC y AB del billar?



Solución

41
reflexiones de Clou sobre un billar sin troneras

☺▪

¿En qué dirección hay que lanzar sin efecto una bola para que, después de haber tocado las cuatro bandas del billar, pase por su punto de partida?

¿Cuál será la longitud del circuito recorrido?

Solución

42
Clovis juega al billar

Una bola M está colocada en la parte superior derecha del billar. Una bola M’ está colocada en la parte inferior de manera que M M’ es paralela al lado mayor del billar. Se impulsa a M hacia arriba, paralelamente a una de las diagonales. Simultáneamente se impulsa a M’ con la misma fuerza hacia abajo, paralelamente a la otra diagonal.

A los pocos instantes de esta doble operación se producirá el mismo acontecimiento en la vida de las dos bolas.

¿Qué es y dónde se produce?

Solución

43
el billar circular

☹⚀

Una bola está colocada en un billar circular. ¿En qué dirección habrá que lanzarla para que después de dos reflexiones pase por la posición inicial?

Este problema fue planteado y resuelto por primera vez por Ibn-al Haytham al Hazin, célebre matemático nacido en Basora en 965.

Se pide una solución *puramente geométrica*.

Solución

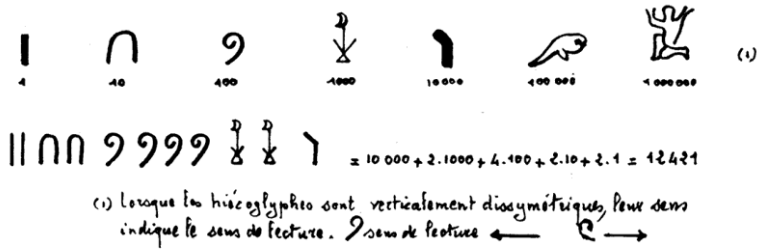
historia de los sistemas de numeración y de las cifras

Para contar son necesarias las cifras, pero también hay que tener en cuenta la manera de servirse de ellas. Esa manera está constituida por los sistemas de numeración. Hay tantas maneras de servirse de las cifras como sistemas de numeración, es decir, dos o, más exactamente, dos grupos. En efecto, existen numeraciones aditivas y numeraciones de posición.

1. En las numeraciones aditivas, cada cifra tiene un valor intrínseco que no depende de su lugar; esas cifras se agregan para formar un número.

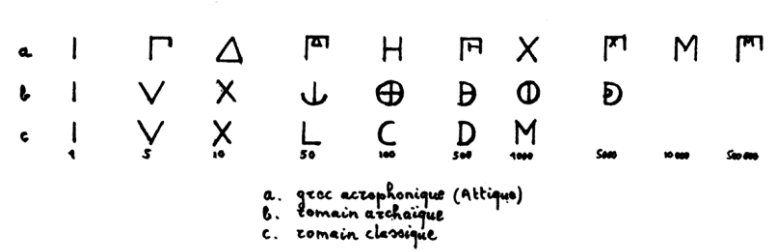
Ejemplo: 133 o 313 o 331 = 1 + 3 + 3

La simplicidad de este sistema tiene como contraparte la dificultad de escribir grandes números, los cuales exigen la yuxtaposición de símbolos en considerable cantidad. Para paliar ese inconveniente las numeraciones aditivas comprenden hitos constituidos por signos que representan un cierto número (la base del sistema) y las diversas potencias de ese número. Si la base es m, esos signos representarán los números m, m^2, m^3, etc. Un ejemplo de este sistema es el que nos ofrece la numeración jeroglífica egipcia, empleada desde las primeras dinastías (segundo milenio) hasta el siglo n antes de nuestra era, y que tenía por base 10.



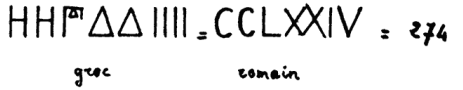
En algunas numeraciones, el sistema está perfeccionado por el empleo de una sub-base, p, que es divisor de la base m, y por la creación de signos (o cifras) que valen p, m, pm, m^2, pm^2, m^3, pm^3, etc.

La numeración griega de Herodio (acrofónica) y la numeración romana, la primera usada a partir del siglo VI antes de nuestra era y la segunda antes del siglo I, son ejemplos de ese sistema. En los dos casos $m = 10$ y $p = 5$.

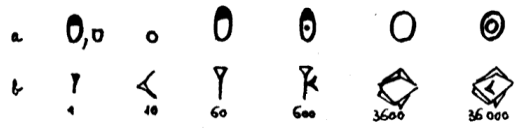


a. grec acrophonique (Attique)
b. romain archaïque
c. romain classique

El sistema romano comprende una complicación (tardía) que determina que esta numeración no sea completamente aditiva: un signo colocado delante de otro de mayor valor se resta.

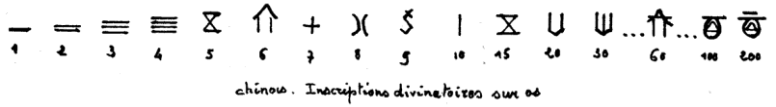


En el sistema sumerio (desde comienzos del tercer milenio, en el siglo XXVII a.C.) la base era 60 y la sub-base 10.

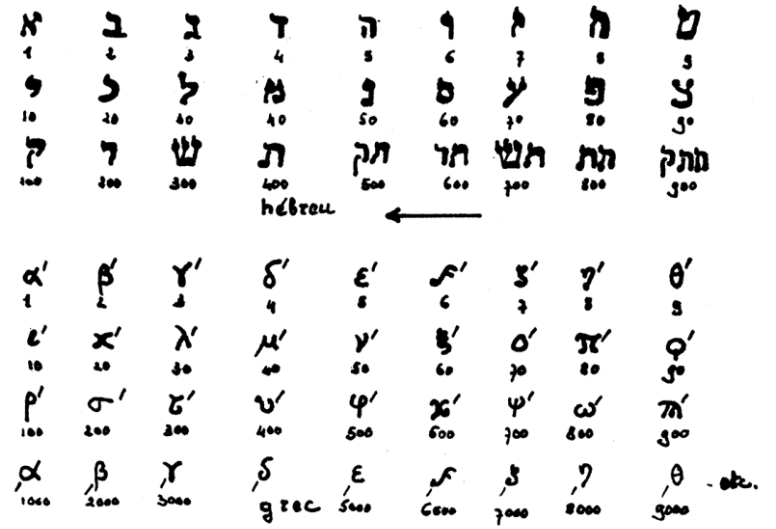


Sumérien a. écriture des roseaux
b. cunéiforme

Un nuevo perfeccionamiento fue la elección de cifras fundamentales, 1, 2, 3, ... ($m = 1$) y de cifras básicas: m, m^2, m^3. Se encuentran ejemplos de este sistema en las numeraciones indias de grutas (siglo II a siglo I antes de nuestra era), en la numeración china de la época Chang empleada en las inscripciones adivinatorias sobre huesos (siglo XIV a siglo XI antes de nuestra era):



y en las numeraciones alfabéticas, imaginadas por los fenicios y adoptadas por los hebreos, los griegos y los árabes.

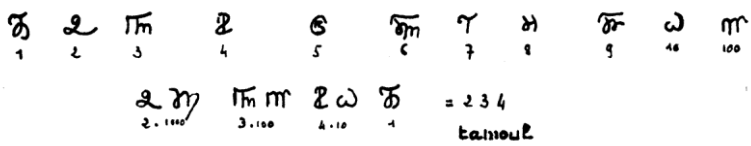


El alfabeto griego jónico sólo contaba con veinticuatro letras y para evitar los dobletes o tripletes del hebreo se le agregaron tres letras semíticas: digama (6), koppa (90) y sampi (900).

La continua preocupación por disminuir el número de signos condujo a un abandono parcial del sistema aditivo y entonces la yuxtaposición de dos cifras correspondía a veces a su producto.

Ejemplos: la numeración china del comercio, la numeración tamul (sur de la India [4]), la numeración maya de las estelas.

[4] Atestiguada en el siglo I de nuestra era por inscripciones en objetos de alfarería.



2. Este proceso condujo a la *numeración de posición* que hoy es la nuestra y que fue imaginada por los babilonios más de veinte siglos antes de nuestra era.

En esta numeración si la base es *m* una cifra *a* significa según su posición *a*, *a.m*, $a.m^2$, $a.m^3$, etc. En las numeraciones de posición el número de cifras se reduce a m: l, 2, 3, ... (m-1) y cero.

Un nuevo número, el cero, es en efecto indispensable para indicar los órdenes de unidad ausentes. Por no haber imaginado el cero la mayor parte de los pueblos estuvo largo tiempo privada de las inmensas ventajas de la numeración de posición.

En su numeración científica los babilonios utilizaban la base 60 que se adaptaba bien a los cálculos astronómicos pero cuya amplitud entrañaba algunas complicaciones prácticas. Por eso, esta numeración fue mal entendida hasta por los griegos, y desapareció.

Fue en el siglo V [5] de nuestra era cuando la numeración de posición reapareció en la India, esta vez con una base decimal; no se conocen exactamente las condiciones de esta resurrección, pero es probable que se haya debido a un resurgimiento de la tradición babilónica.

De la India, este sistema pasó al mundo árabe, donde fue descubierto gracias a la traducción de un tratado de astronomía; el gran matemático Muhammad al-Kwarizmi la hizo conocer en una obra célebre. Traducida al latín a comienzos del siglo XII por Adelardo de Bath con el título de *Algorismus*, esta obra permitió introducir en Occidente la numeración de posición. A pesar de su evidente simplicidad, el nuevo sistema no fue aceptado sin reticencias; en el siglo XIV aún no había triunfado universalmente.

[5] Es una simple hipótesis. La numeración de posición india está realmente atestiguada sólo a partir de 876, fecha de la inscripción de Gwalior.

Sólo en el siglo XVII los tribunales de cuentas abandonaron las cifras romanas que todavía empleamos en nuestras inscripciones lapidarias o en nuestros relojes.

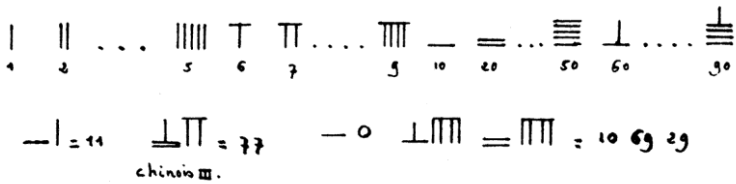
La ciencia matemática nació y se desarrolló principalmente (aunque no únicamente) en el mundo indosemítico europeo.

En América Central, un pueblo del que sólo poseemos información seria a partir de su establecimiento en el Yucatán (a comienzos del siglo VI), había adoptado una numeración original, primero aditiva, luego de posición. La particularidad —y la debilidad— de la numeración maya consistía en su doble base, 20 en el primer orden, 18×20^n luego [6], el número a b c d que se escribía

a
b
c
d

y significaba $d + c \times 20 + b \times 18 \times 20 + a \times 18 \times 20^2$.

En la otra costa del Pacífico los chinos adoptaron la mayor base conocida, 100, pero completada con la subbase 10. Numeración erudita china:



La base 20 de los pueblos de América Central fue también usada en la misma Francia, entre los celtas, y en el francés se han conservado algunos vestigios de esa base: *quatre-vingts* (80), *six-vingts* (empleado antes por 120), el Hópital des Quinze-Vingts. También encontramos rastros del sistema vigesimal en danés: *(fyrretyve, tresindstyve firsindstyve)* y en albanés.

Con el correr del tiempo se propuso varias veces sustituir nuestro sistema decimal por otros sistemas de los cuales se hacían notar

[6] Conviene observar que $18 \times 20 = 360$, número de múltiples divisores.

sus ventajas. En 1687, Weigel publicó una "aritmética tetráctica" (de base 4).

En su *Historia de Carlos X*, Voltaire nos dice que este rey quería introducir en Suecia un sistema que tenía por base 64, número que es a la vez cuadrado y cubo ($8^2 = 4^3 = 64$). El rey había encomendado el estudio de esta cuestión a Emmanuel Swedenborg. En 1718 éste escribió un tratado cuya conclusión preconizaba el empleo de la base 8 antes que el de la base 64. El asunto no pasó a mayores.

Desde la Edad Media diferentes matemáticos habían observado que el sistema binario, es decir, de base 2 permite la solución fácil de ciertos problemas. En sus *Memorias de Berlín*, Leibniz da las reglas del cálculo en sistema binario. En nuestros días, este sistema tiene una aplicación importante en la informática, donde se lo adoptó porque es el sistema más apto para representar los dos términos de la alternativa a que se limita la computadora: la corriente pasa o no pasa.

En este sistema sólo hay dos cifras: 1 y 0. Dos se escribe 10, cuatro o dos al cuadrado se escribe 100, ocho o dos al cubo se escribe 1000, etc.

Pero el sistema duodecimal, de base 12, es el que tuvo y el que conserva partidarios más numerosos. Este sistema permite una enumeración simple de los meses del año, de las horas del día, de los grados de la circunferencia. Además, 12 tiene cuatro divisores —en tanto que 10 sólo tiene dos— lo cual permitiría, si doce fuera la base, expresar mediante números enteros su mitad, su cuarta parte y su sexta parte.

Este sistema había sido propuesto a comienzos del siglo XVIII, por primera vez según parece, por Simón Stevin. Auguste Comte retomó esta idea: observando que los cuatro dedos opuestos al pulgar cuentan doce falanges, Comte imaginó un procedimiento que por oposición de los pulgares sobre las falanges permitía contar hasta trece veces doce. De manera que se podría contar mucho más con las falanges de base doce que con los dedos de base diez.

Este sistema duodecimal fue empleado en ciertos campos comerciales y aún hoy se lo aplica en el de los huevos que se cuentan, no por decenas y centenares, sino por docenas y gruesas ($144 = 12^2$). Asimismo se lo utiliza en tipografía (1 cícero = 12 puntos).

Sentido de lectura de los números

jeroglífico egipcio	⇆
hierático egipcio sumerio hebreo árabe literal	←
maya chino antiguo	↓
chino erudito chino moderno	↓→
todas las demás numeraciones	→

Hay que tener en cuenta que, especialmente en las escrituras glíficas (egipcia, maya), una preocupación estética hizo que a menudo los escribas y grabadores adoptaran para representar las cifras disposiciones muy variadas que no guardan relación con los esquemas que hemos indicado.

Las cifras

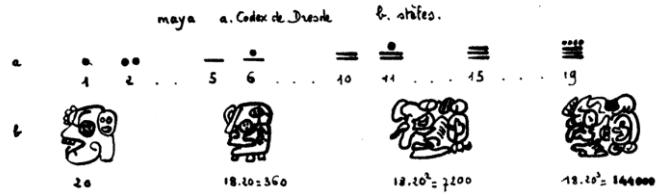
Naturalmente hube de emplear muchas cifras en la breve historia de los sistemas de numeración que se acaba de leer. Ahora quisiera hablar de las cifras mismas, de esas figuras familiares y sin embargo mal conocidas que sufrieron muchas transformaciones antes de alcanzar el estado en el que hoy las vemos.

La etimología de la palabra “cifra” es la voz árabe “sifr” ( ) que significa “vacío” y que dio *zephirum* en latín, *zefiro* en italiano, cifra, *ziffra* luego *ziffer* en alemán, *cipher* en inglés, *cyfra*, *cyfre* y *chiffre* en francés.

Lógicamente este vocablo fue primero empleado para designar el cero. Cuando cambió de sentido, se reservó para designar el cero la forma italiana *zefiro*.

En lo que concierne a las formas de las cifras, muchas de las cuales ya hemos trazado, me limitaré aquí a reproducir las cifras mayas y aztecas, algunas de las cuales son curiosas, las representaciones de la cifra clave de las numeraciones de posición, el cero, y por fin un cuadro que muestra la serie de transformaciones que desde los indios y a través de los árabes, conducen a nuestras actuales cifras.

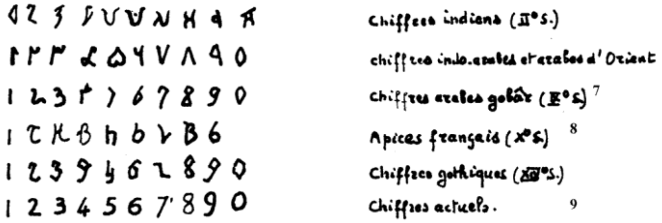
Cifras mayas



Cifras aztecas

Las representaciones del cero

De las cifras indias a nuestras cifras



[7] Cifras de los árabes occidentales. *Gobar* significa polvo. Estas cifras eran utilizadas por mercaderes que las trazaban en la arena.

[8] Los ápices, cuyo origen fue largo tiempo controvertido y falsamente atribuido a Pitágoras, no comprendían el cero que fue introducido en Europa sólo en el siglo XII.

[9] Este cuadro es la reproducción del que figura en *L'Histoire du calcul* de René

BIBLIOGRAFIA

Beziau Pierre, *Origine des chiffres,* Angers, 1938.
Taton René, *L'Histoire du calcul,* París, 1946.
Ifrah Georges, *Le Chiffre à travers les âges et les civilisations*, París, 1976.
Y sobre todo la obra maestra de Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, París, 1975, con una abundante bibliografía.

Taton.

44
la base de los siete candeleras rosados

😐⚂

La secta de los siete candeleras rosados fue prohibida. Habiéndose enterado la policía de que la secta acaba de ofrecer un espectáculo clandestino, organiza una intervención en su base. Al llegar al lugar, los espectadores ya se han marchado, pero la policía encuentra un documento contable:

26 entradas a 202 francos: 5.555 francos.

Los policías quedan muy intrigados por esta aritmética. Por fin, el comisario que los dirige se da un golpe en la frente y exclama:

—¡Estos clientes no tienen nada como los demás! ¡Ni siquiera su base es la misma!

¿Qué quiso decir el sagaz comisario?

Solución

45
las hijas de Mnemosina y el divisor obstinado

En un sistema de numeración que tenga cualquier base superior a 5 o sea igual a 5, el número que se escribe 40.301 tiene un divisor que se escribe siempre de la misma manera.

¿Cuál es ese divisor?

Si se toma como base el número de las hijas de Mnemosina, el cociente de 40.301 por el divisor antes nombrado se escribe 181.

¿Cuántas eran pues esas hermosas doncellas?

Solución

46
el gallo del corral

😐▪

Aunque ya casi no vuela, el gallo, base del gallinero, tiene x_1 alas

$x_1 = 10$ A

El x_2 es, según se dice, número a evitar

$x_2 = 15$ B

Son x_3 si es para el fútbol

$x_3 = 12$ C

Los x_4 puntos cardinales

$x_4 = 100$ D

x_5 es un cubo pequeño

$x_5 = 11$ E

Las x_6 musas

$x_6 = 14$ F

Nuestros x_7 colores primarios

$x_7 = 11$ G

Los x_8 dedos de la mano

$x_8 = 12$ H

Terminado el tiempo o para x_9 comienza la tarde

$x_9 = 30$ I

Los x_{10} pecados capitales

$x_{10} = 13$ J

Es x_{11}, y muy sobresaliente

$x_{11} = 12$ K

Muy amado puede haber sido, pero seguramente era loco aquel Charles x_{12} de Francia

$x_{12} = 10$ L

$$D = G \qquad B = K \qquad C - F = J \qquad L = 2\,H$$

$$I \times E = n \times A$$

¿Cuál es el valor de n?

Solución

47
vacaciones de Zabulón y Coucoulina

Zabulón: Vayamos a pasar las vacaciones a Karaounie.
Coucoulina: ¡A tu edad!
Zabulón: ¡Y qué, mujer! Tengo sólo tres veces tu edad.
Coucoulina: Y yo, siete veces la edad de mi hermanito.
Zabulón: ¿por qué me dices eso?
Coucoulina: Porque puede servir.
Zabulón: Vayamos a Karaounie. No voy a esperar a ser centenario para emprender ese viaje.
Coucoulina: ¿Qué interés le encuentras a ese país remoto?
Zabulón: Su sistema de numeración que hace que mi edad, así como la tuya se escriban con las mismas cifras que aquí pero en el orden inverso.
Coucoulina: ¿Realmente? ¡Eso es prodigioso!
Zabulón: Ya lo ves, Coucoulina. Hay que ir a Karaounie.
Coucoulina: Iré allí contigo, Zabulón.

Esta conversación revela las edades de Zabulón y de su esposa Coucoulina.

¿Qué edad tiene cada cónyuge?

Solución

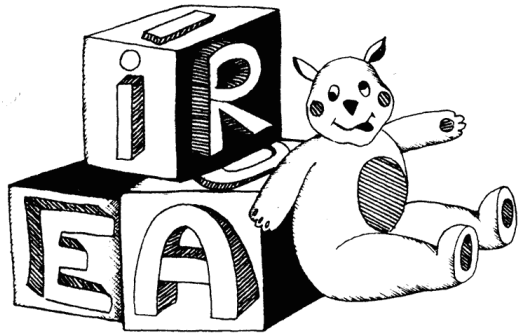
48
algún día diré vuestros nacimientos latentes

☹•

Completar las siguientes series con su primer término que falta y que está marcado por un punto.

. – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 –
. – 5 – 5 – 5 – 5 – 10 – 11 – 12 – 101
. – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 21 – 100 – 1001
.–16 –17 – 21 – 23 – 30 – 33 –120 –1111
. – 23 – 25 – 30 – 33 – 41 – 111 – 210 – 10 101

Los números hallados evocan ciertos elementos.
¿Cómo se llama el conjunto de esos elementos?



Solución

carta de Flaubert a su hermana Caroline

"Puesto que estudias geometría y trigonometría voy a proponerte un problema: Un barco navega en el océano. Salió de Boston con un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas. Se dirige, hacia Le Havre. El palo mayor se quebró; el camarero de las cabinas está en el puente; a » bordo hay doce pasajeros. El viento sopla en la dirección ENE. El reloj marca las 3 y cuarto. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?"

49
el cumpleaños de Claudine

Una noche que comía con Claudine, su sobrina preferida, Clovis Clou le preguntó:

—A decir verdad, querida mía, ¿cuál es la fecha de tu cumpleaños?

—Anteayer —dijo Claudine— yo tenía 19 años y el año próximo tendré 22.

A Clovis Clou le encantó tanto esta respuesta que regaló a su sobrina un diamante.

¿Cuál era el cumpleaños de Claudine?

Solución

50
Clodomir se vuelve a casar

😐•

El inestable Clodomir, después de haberse divorciado una vez más, se enamoró de una joven catedrática de matemáticas. Antes de contraer un nuevo matrimonio consultó a su tío Clovis cuya sabiduría apreciaba.

—Lo único que me molesta —dijo Clodomir— es el hecho de que ella tenga tres hijos.

—¿De qué edad son esos hijos?

—No ha querido decírmelo.

—Vayamos a visitarla —dijo Clovis. Y la señora, en efecto, los recibió muy bien.

—Señor —dijo la profesora a Clovis —, sé que usted es un hábil matemático, de manera que tan sólo le diré que el producto de las edades de mis hijos expresado en números de años es 36 y que su suma es igual al número de tabaqueras que hay sobre esta mesa.

Clovis reflexionó un instante y luego dijo:

—Pero, señora, aquí hay una ambigüedad.

—Es cierto. El mayor de mis hijos está nadando en la piscina.

Entonces Clovis, volviéndose hacia su sobrino, le preguntó:

—¿Ya estás enterado?

—Por cierto que no —dijo Clodomir.

—No eres muy inteligente —suspiró Clovis.

¿Está usted mejor dotado que Clodomir?

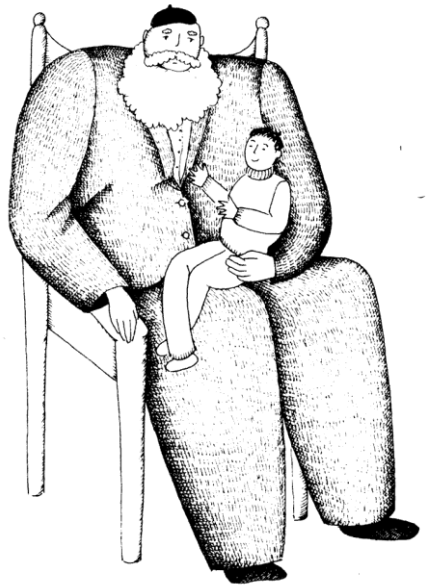
Solución

51
Evariste y su abuelo

😐•

El abuelo de Evariste, que no es centenario, tiene 63 años más que Evariste que es mayor de edad.

Si la suma de las edades del abuelo y de Evariste es igual a la suma de las cifras de sus edades multiplicada por un cierto número entero *n* y si la diferencia de sus edades es igual a ese mismo número *n* multiplicado por la diferencia entre la suma de las cifras de la edad del abuelo y la suma de las cifras de la edad de Evariste, ¿qué edad tiene Evariste y qué edad tiene su abuelo?



Solución

52
el secreto de la familia Béduche

Los Béduche (el señor Béduche, la señora Béduche y su hijo) consideran sus edades como un secreto de familia. Un día en que Clovis Clou tuvo la indiscreción de hacer una pregunta al hijo sobre ese tema, el padre intervino. Creyendo poner en apuros al viejo matemático, le dijo: — La suma de nuestras tres edades es inferior a 70. Yo tengo cinco veces la edad de mi hijo y, dentro de algunos años, la relación de mi edad con la de mi hijo será un número entero igual a la relación de la suma de las tres edades que tendremos entonces en la familia con la suma de las tres edades que tenemos hoy. Todo en números enteros para facilitarle a usted la tarea.

Clovis se marchó encogiéndose de hombros. Y como no era hombre discreto, todo el edificio vino a saber bien pronto por qué los Béduche mantenían tanto secreto en torno de sus edades.

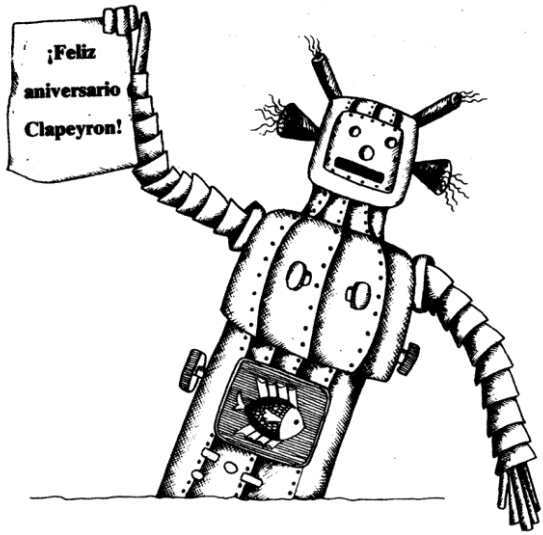
¿Por qué, pues, tanto secreto?

Solución

53
Clapeyron en el año 2000

☺•

¿Qué edad tendrá Clapeyron en el año 2000 sabiendo que esa edad será igual a la suma de las tres cifras de su año de nacimiento?



Solución

54
la edad del juicio

😐

El pequeño Pierre está orgulloso por haber cumplido un año más. En un negocio compra figuritas de colores que representan la cifra de su edad y con esas figuritas recubre las paredes de su habitación. Una vez terminado ese trabajo a Pierre le quedan cinco figuritas. Con las tres primeras escribe su edad y la de su abuelo. Luego, habiendo hecho cierta observación, advierte que puede también escribir la edad de su bisabuelo con las dos últimas figuritas. En ese momento entra en la habitación la madre de Pierre que se indigna al ver el empapelado que ha hecho su hijo. — Mi pequeño Pierre, ¿cuándo llegarás a ser juicioso? Fundándose usted en la creencia popular, ¿podría responder a esa madre inquieta?

Solución

algunas paradojas

Una paradoja, según dicen los diccionarios, es una opinión contraria a la opinión común. Cuando uno entra en el dominio de la lógica y de la matemática es menester precisar y ampliar esta definición; una paradoja es una aserción contraria, no sólo a la opinión común sino también a la evidencia: la flecha que vuela está inmóvil o bien 1 = 2.

Una paradoja es también una proposición que lleva en sí misma su contradicción, como la proposición: yo soy un mentiroso. Una paradoja, por fin, es la demostración de varias proposiciones contradictorias: a > b y a < b.

Desde la antigüedad hasta hoy, filósofos y matemáticos enunciaron innumerables paradojas, algunas de las cuales son célebres. A veces lo hicieron por juego, más frecuentemente para desembarazar a las definiciones de ambigüedades o de contradicciones internas, o para profundizar ciertas nociones o para hacer nacer concepciones nuevas.

*

Entre las paradojas más antiguas y más célebres figuran las que enunció el filósofo griego Zenón de Elea en el siglo v antes de nuestra era; en primer lugar la paradoja de la flecha inmóvil, a la que ya nos referimos: la divisibilidad infinita del espacio prueba la imposibilidad del movimiento; pues para ir de A a B, un punto habrá debido recorrer la mitad de AB, lo que implica que habrá recorrido la mitad de la mitad de AB y antes, la mitad de ese intervalo, y así sucesivamente; la suma de un número infinito de intervalos sólo puede recorrerse en un tiempo infinito. Tampoco Aquiles, a pesar de su rapidez en la carrera, podrá alcanzar alguna vez a la tortuga; supongamos que Aquiles esté a cien metros detrás de la tortuga y que avanza diez veces más rápido que ésta: cuando Aquiles haya recorrido 100 metros la tortuga habrá avanzado 10 metros y cuando él haya recorrido esos diez metros, la tortuga halará avanzado un metro, etc. Zenón no concebía que una infinidad de términos pudiera tener una suma finita o, dicho de otra manera,

que existiesen series convergentes. En el caso de Aquiles y la tortuga, se trata de una progresión geométrica de razón 1/10, y el encuentro tendrá lugar en $\frac{100}{1-\frac{1}{10}}$ M del punto de partida de Aquiles.

Paradojas aritméticas y algebraicas

a> b, a = b

Supongamos que haya que demostrar que *a*, mayor que *b*, es igual a *b*.

Pongamos $a = b + c$

Multipliquemos los dos términos por $a - b$.

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a\,(a - b - c) = b\,(a - b - c)$$

y dividamos por $a - b - c$; entonces tenemos

$$a = b$$

1 = –1

Propongámonos demostrar que 1 = –1

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

$$1 = -1$$

1 = 2

Supongamos que haya que demostrar que 1 = 2
Se sabe que, cualquiera que fuere *x*, $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ luego:

$$(\cos^2 x)^{3/2} = (1 - \text{sen}^2 x)^{3/2}$$

$$\cos^3 x = (1 - \text{sen}^2 x)^{3/2}$$

agreguemos 3 a los 2 miembros de la identidad

$$\cos^3 x + 3 = (1 - \text{sen}^2 x)^2 + 3$$

demos a *x* el valor π; tenemos entonces cos *x* = –1, sen *x* = 0

$$2 = 4$$

$$1 = 2$$

Paradojas sobre las series alternadas

Designemos con A la suma, si existe, de la serie alternada:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = A$$

pero también podemos escribir

$$A = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + ... = 0$$

podemos escribir

$$A = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) ... = 1$$

o también

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - A$$

por lo tanto,

$$2A = 1A = 1/2$$

podemos encontrar otros valores de A con la condición de que sepamos hacer divisiones algebraicas, tales como:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = 1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + \cdots$$

etc.

hagamos x = 1 en estas identidades; los segundos miembros dan toda la serie alternada 1 – 1 + 1... = A. Los primeros miembros se convierten en 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, etc.

De manera que para A hemos encontrado los valores 0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, etc.

Los dos primeros resultados 1 y 0 ya se había observado en el siglo XVII y un matemático tan eminente como Leibniz se preocupó por el fenómeno; de él extrajo una proposición que nos parece sorprendente hoy: puesto que 1 y 0 son valores igualmente probables del límite de la serie, el valor exacto es el promedio

Serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = K$$

separemos los términos negativos de los términos positivos

$$K = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \cdots - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \cdots\right) \quad (1)$$

por otro lado, tenemos evidentemente

$$0 = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \cdots\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \cdots\right) \quad (2)$$

sumemos miembro por miembro (1) y (2)

$$K = \left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots\right)\right]$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots\right)$$

$$K = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

$$K = 0$$

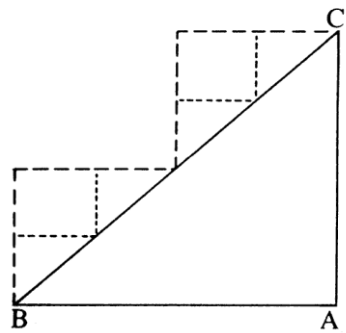
Mediante otras disposiciones de los términos de la serie se podrían encontrar otros valores de K. En realidad, cualquier valor. La serie armónica alternada que puede disociarse en dos series divergentes afectadas por signos contrarios se llama "semiconvergente". Ahora bien, el matemático alemán Riemann demostró en 1854 este notable teorema: "Los términos de una serie semiconvergente pueden combinarse de manera tal que el límite de esa serie sea cualquier número, positivo o negativo, finito o infinito".

Paradojas geométricas

Se sabe que la longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos en esa circunferencia cuando el número de sus lados aumenta indefinidamente. Por lo demás, esta propiedad fue lo que permitió realizar un primer cálculo del número π.

Se puede buscar una propiedad análoga en el triángulo. Consideremos un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen el valor 1. La hipotenusa de este triángulo es

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$



Construyamos de B a C una línea quebrada en forma de escalera y designemos con L su longitud. Podemos adoptar como altura

de los peldaños 1/2, 1/4, 1/8, etc. Si uno dobla indefinidamente el número de peldaños la línea quebrada tenderá a confundirse con la hipotenusa y su longitud, L, tenderá, según parece, a $\sqrt{2}$.

Pero ese resultado es falso. L es siempre igual a BA + AC = 2.

Paradojas de la cuerda

Supongamos que una cuerda muy larga rodee toda la Tierra, considerada ésta como una esfera perfecta cuyos meridianos miden exactamente 40.000.000 de metros.

Se alarga la cuerda un metro y se la levanta por encima del suelo uniformemente de manera que la cuerda continúe formando una circunferencia completa. ¿A qué altura del suelo estará la cuerda alargada?

Si R es el radio de la circunferencia primitiva que describe la cuerda de longitud de L,

$$L = 2\pi R$$

Si se da a L un incremento dL, resultará para R un incremento de dR:

$$dL = 2\pi dR$$

$$dR = dL / 2\pi$$

Si dL = 1 metro, $dR = 1 / 2\pi =$ 0,16 m aproximadamente.

La cuerda alargada en un metro estará a 16 centímetros del suelo. Este resultado parece asombroso. Además resulta notable que dR no dependa de R.

El resultado sería el mismo si se rodeara con la cuerda un plato o una moneda y, como caso límite, un punto. En el último caso, el incremento de radio sería el radio r de la circunferencia formada por la cuerda alrededor del punto.

$$1 = 2\pi r$$

$$r = 1 / 2\pi = 0{,}16 \text{ m aproximadamente.}$$

Se puede enfocar la cuestión de una manera algún tanto diferente pero igualmente desconcertante:

Consideramos un plato de 10 centímetros de radio y un meridiano terrestre que tenga por radio 40.000 / 2π = 6.366 kilómetros.

Aumentemos en un metro el radio del plato y el del meridiano. ¿Cuándo aumentará la circunferencia en cada uno de los casos? El caso del plato. En metros el aumento es:

$$2\pi \times 1{,}10 - 2\pi \times 0{,}10 = 2\pi = 6{,}911 \text{ m}$$

El caso del meridiano terrestre (en metros):

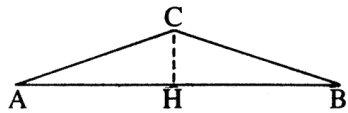
$$2\pi \times 6.366.001 - 2\pi \times 6.366.000 = 2\pi = 6{,}911 \text{ m}$$

El aumento de la circunferencia es el mismo en los dos casos.

*

Supongamos ahora que se tienda una cuerda entre los puntos A y B distantes 100 metros uno del otro.

Tomemos una cuerda 1 metro más larga y mantengámosla perpendicularmente al centro de AB, en HC, de manera que esté tensa. ¿Cuál es el valor de HC?



$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 50{,}5^2 - 50^2 = 50{,}25$$

$$HC = 7{,}089 \text{ m}$$

El hecho de que una variación de un metro de la cuerda entrañe una sagita tan importante —¡más de siete metros!— es inesperado.

Pero hay algo aún más curioso. Supongamos que la distancia AB no sea más que de diez metros. A un alargamiento igual de la cuerda —1 metro— no corresponderá más que una sagita de 2,292 metros.

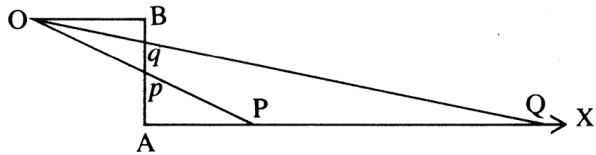
Así, paradójicamente, a un mismo alargamiento de la cuerda corresponden flechas inversamente proporcionales a los alargamientos relativos:

7,089 m en 1/100 2,292 m en 1/10

Paradojas sobre los conjuntos

Las paradojas del infinito, que hemos entrevisto a través de las cogitaciones de Zenón de Elea y las incoherencias de las series semiconvergentes, se manifiestan ampliamente en la teoría de los conjuntos. La más desconcertante de esas paradojas es tal vez ésta: "Hay un mismo número de puntos en un segmento de recta (por pequeño que sea el segmento), en una semirrecta, en un cuadrado, en un plano, en un cubo, en todo el espacio". Para "demostrar" esta paradoja es evidentemente necesario apoyarse en un lema.

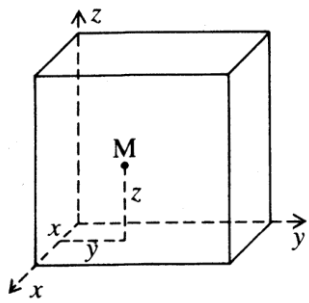
Consideremos dos colecciones de puntos. Si a todo punto de la primera colección se puede hacer corresponder un punto de la segunda y si, recíprocamente, a todo punto de la segunda colección se puede hacer corresponder un punto de la primera —dicho de otra manera, si se puede establecer una relación biunívoca entre los puntos de las dos colecciones—, entonces hay el mismo número de puntos en cada colección.



Tomemos, pues, en el caso de la primera colección los puntos del segmento AB y en el caso de la segunda colección los puntos de la semirrecta AX. La figura muestra que una correspondencia biunívoca puede establecerse entre las dos; a p corresponde P, a Q corresponde q.

Luego, hay el mismo número de puntos en AB y en AX.

Demostremos ahora la correspondencia biunívoca entre los puntos de un cubo de arista 1 y los de un segmento de longitud 1. Un punto M cualquiera del cubo tiene por coordenadas:



$X = 0, x_1x_2x_3 \ldots$

$Y = 0, y_1y_2y_3 ...$
$Z = 0, z_1z_2z_3 ...$

A ese punto M del cubo podemos hacer corresponder un punto m de un segmento que tenga por abscisa $x = 0, x_1y_1z, x_2y_2z_2x_3y_3z$ ... Recíprocamente, a todo punto p del segmento que tiene como abscisa $x=a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3...$ podemos hacer corresponder un punto P del cubo que tenga por coordenadas

$X = 0, a_1b_1c_1 ...$
$Y = 0, a_2b_2c_2...$
$Z = 0, a_3b_3c_3...$

Hay, pues, el mismo número de puntos en el segmento y en el cubo.

Sería fácil pasar a la recta y a todo el espacio.

Cuando Cantor, fundador de la teoría de los conjuntos, hubo demostrado la propiedad que acabamos de enunciar, se quedó muy turbado. Dudando de su juicio se dirigió en dos oportunidades, en junio de 1877, al matemático Dedekind para recabar su opinión sobre esta extraordinaria proposición. En su segunda carta, con fecha 29 de junio, Cantor dice:

"Tenga usted a bien excusar mi celo por esta cuestión y el hecho de que vuelva a apelar a su bondad: lo que le comuniqué recientemente es tan nuevo, tan inesperado, tan extraordinario, que no podré recuperar la tranquilidad de mi espíritu antes de haber recibido el juicio de usted, muy respetado amigo, sobre su exactitud. Mientras usted no me haya aprobado no podré dejar de decirme: lo veo pero no lo creo."

Dedekind respondió el 2 de julio:

"Examiné aún una vez más su demostración y no encontré en ella ninguna laguna... Pero se ve usted obligado a introducir en la correspondencia una discontinuidad que produce vértigos, una discontinuidad que lo reduce todo a átomos... esta carta no tiene otro objeto que el de rogarle que no entable públicamente polémicas contra los artículos de fe admitidos hasta ahora de la teoría de las

multiplicidades antes de haber sometido mi objeción a un profundo examen".[10]

Hoy los razonamientos sobre los conjuntos forman parte de nuestros hábitos intelectuales y la paradoja del continuo nos turba menos que a su inventor.

La razón de este resultado aparentemente absurdo es la de que los conjuntos de puntos considerados no son *enumerables*. Decir "hay tantos puntos" no tiene sentido en este caso. El enunciado correcto es: los conjuntos de los puntos de un segmento de recta, de una semirrecta, de un plano, de un cubo, de un espacio tridimensional ilimitado son conjuntos equivalentes que tienen la misma potencia.

*

Paradoja de Russel

Esta paradoja se basa en la consideración del conjunto 0 de todos los conjuntos que se contienen ellos mismos como elementos y del conjunto N de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Parece seguro que un conjunto pertenece a 0 o a N. Ahora bien, se comprueba que N no puede estar comprendido ni en 0 ni en N sin violar una de nuestras definiciones.

Ejemplos clásicos tienen relación con esta *paradoja de Russel*. El más antiguo se remonta al siglo VI antes de nuestra era, puesto que se lo atribuye al poeta Epiménides que había dicho: "Todos los cretenses son mentirosos". Si se tiene en cuenta que Epiménides era cretense, se comprueba que esta declaración contiene una contradicción interna y que ella no nos permite saber si los cretenses son mentirosos o si no lo son.

Otro ejemplo clásico es el del barbero que debe afeitar a todos los hombres de su aldea que no se afeitan ellos mismos y solamente a esos hombres. Es imposible decidir si el barbero se afeitará o no.

[10] Extractos traducidos de *Briefwechsel Cantor Dedekind*, Ed. E. Noetter y J. Cavailles, Göttinga, París.

La paradoja de Russel y sus prolongaciones llevaron a excluir la noción de "conjunto de todos los conjuntos".

Paradojas sobre las probabilidades

Arrojemos tres monedas. ¿Qué probabilidad hay de que caigan las tres del mismo lado?

Se puede resolver esta cuestión de dos maneras. La primera comprueba que, de las tres monedas, dos caen siempre del mismo lado. La probabilidad de que la tercera moneda caiga también de ese lado es 1/2. La respuesta es pues 1/2.

También se puede considerar que las posibilidades de que una moneda, dos monedas, tres monedas caigan del lado cara son

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

La probabilidad de que las tres monedas caigan del lado cruz es asimismo 1/8.

La probabilidad buscada es pues: 1/8 + 1/8 = 1/4.

Tenemos pues 1/2 o 1/4. ¿Cuál es la respuesta correcta? Es 1/4.

Paradoja de la caja de Bertrand

El matemático Bertrand propone en su *Cálculo de las probabilidades* (1899) la siguiente cuestión: 3 cajas de apariencia idéntica contienen, una 2 monedas de oro, otra 2 monedas de plata y la tercera 1 moneda de cada clase. Se toma una caja al azar; ¿qué probabilidad hay de que ésa sea la caja que contiene monedas diferentes?

La primera respuesta, que parece evidente, es 1/3. Pero otro razonamiento conduce a un resultado diferente. Veamos: de la caja elegida sacamos una moneda; poco importa la naturaleza de ésta puesto que el oro y la plata desempeñan el mismo papel en este asunto; hay una posibilidad, entre dos, de que la moneda restante sea de oro y una posibilidad, entre dos, de que sea de plata, luego una posibilidad entre dos, de que sea diferente de la que ha sido

sacada de la caja. La respuesta a la cuestión planteada es pues 1/2. Pero la respuesta correcta es 1/3.

Paradoja de Lewis Carroll

Lewis Carroll apeló al arte del prestidigitador para poder presentar como razonable una respuesta absurda a una cuestión simple: en un saquito hay dos fichas de las que sólo se sabe que son o blancas o negras. ¿Cómo saber el color de esas fichas sin abrir el saquito?

Carroll razona así: si un saco contiene tres fichas, dos negras y una blanca, la probabilidad de sacar una negra es 2/3 y ninguna otra combinación puede dar esta probabilidad. En el saquito objeto del problema son posibles cuatro combinaciones: las dos fichas son negras (NN), la primera es negra y la segunda blanca (NB), la primera es blanca y la segunda negra (BN), las dos son blancas (BB). Estas cuatro combinaciones son igualmente probables, de modo que la probabilidad de cada una es 1/4. Si se agrega una ficha negra las cuatro combinaciones, siempre igualmente probables, son NNN, NNB, NBN, NBB. Si se realiza la primera combinación la probabilidad de sacar una ficha negra del saquito es 1; si se realiza la segunda combinación, 2/3; si se realiza la tercera, 2/3; si se realiza la cuarta, 1/3. La probabilidad global de sacar una ficha negra es pues:

$$1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

Ahora bien, hemos establecido que a la probabilidad 2/3 correspondía obligatoriamente la combinación dos negras y una blanca. Luego, antes de agregar una ficha negra en el saco, éste contenía una negra y una blanca.

El dos no existe

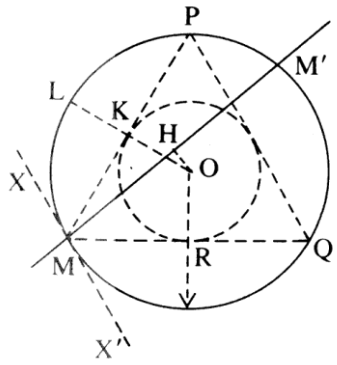
La siguiente paradoja conduce a un resultado igualmente absurdo; se funda en la petición de principio: un caso que tiene la

probabilidad 0 de realizarse no existe. Sabemos que hay una infinidad de números primos. Entre ellos sólo uno es par. De manera que si elegimos un número primo al azar, la probabilidad de obtener un número primo par es $1/\infty = 0$. No hay pues número primo par; 2 no existe.

Una verdadera paradoja

Estas seudodemostraciones sólo tienen un interés anecdótico y se las podría calificar de pueriles si, en una época o en otra, no hubieran preocupado a algunos filósofos. Quisiera terminar con una paradoja mucho más desconcertante. Se funda en la cuestión siguiente: tenemos un círculo dado; al azar trazamos una recta que corte ese círculo; ¿qué probabilidad hay de que el segmento interceptado por el círculo sobre la recta sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?

Sea MM' la recta trazada al azar y sea MPQ el triángulo equilátero inscrito que tiene un vértice en M. Si MM' es interior al ángulo $\widehat{PMQ} = \frac{\pi}{3}$, MM' es mayor que el lado del triángulo. Si MM' es interior a los ángulos $\widehat{XMP}$ o $\widehat{X'MQ}$, cuya suma es $2\pi/3$, MM' es menor que el lado del triángulo. La probabilidad buscada es pues



$$\frac{\frac{\pi}{3}\ (\text{casos favorables})}{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\ (\text{total de casos})} = \frac{1}{3}$$

Consideremos ahora el punto H, punto medio de MM'. El segmento interceptado será mayor que el lado del triángulo si $OH \leq OK$ y menor en el caso contrario. Como OH varía de O a R y como $OK = R/2$, la probabilidad buscada es 1/2.

Consideremos, por fin, el círculo inscrito en el triángulo que tiene por radio OK = R/2 y cuya superficie es, por lo tanto, la cuarta parte de la superficie del círculo dado. El segmento interceptado será mayor que el lado del triángulo equilátero si su punto medio K está en el interior del círculo inscrito y menor en el caso contrario. Como el círculo inscrito es 4 veces menos extenso que el círculo dado, la probabilidad de que K sea interior a él es 1/4. De manera que la probabilidad buscada es 1/4.

Probabilidad paradójica que, evaluada por métodos igualmente correctos e indiscutibles es... ¡1/3, 1/2 o 1/4!

los cuadrados mágicos

No conozco nada más hermoso en la aritmética que esos números que algunos llaman planetarios *y otros* mágicos.
(Carta de Fermat al padre Mersenne,
1º de abril de 1640)

Después de haber propuesto un problema sobre los cuadrados mágicos en la revista de una gran escuela hace unos años, me quedé sorprendido por el abundante correo que recibí poco después. Quienes me escribían no sólo eran numerosos sino que revelaban a menudo una gran competencia. Posteriormente descubrí una vasta literatura, antigua pero también actual, sobre los cuadrados mágicos. Por eso sólo dedicaré unas pocas páginas a esta fantasía aritmética por temor a aburrir a los lectores que pudieran poseer un conocimiento profundo de la cuestión. Me limitaré a señalar varias curiosidades que me parecieron particularmente atrayentes y algunas de las cuales son, según creo, inéditas.

De cualquier manera debo definir el cuadrado mágico: es un casillero cuadrado en el cual están inscritos números elegidos y dispuestos de manera tal que su suma es la misma, ya se los sume por línea, ya se los sume por columna o siguiendo las diagonales:

Ejemplo:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

La suma común, aquí 15, es el *número mágico* o la suma del cuadrado; se dice que este cuadrado es de orden 3, o de módulo 3, porque su lado comprende tres números.

Los cuadrados mágicos son muy antiguos puesto que ya los conocían los chinos y los indios antes de nuestra era. Los árabes los tomaron de los indios y los llevaron a occidente donde un monje griego, Moschopoúlos, los reveló a los cristianos en el siglo XIV.

En todo momento fueron atribuidas propiedades mágicas a estos seres matemáticos y esto explica su nombre; y tal creencia supersticiosa no desapareció en nuestra época puesto que, hace algunos años, las mujeres camboyanas trazaban cuadrados de este género en los pañuelos con que se cubrían la cabeza para protegerse de los bombardeos.

Estudiosos astutos se ingeniaron para aumentar las dificultades agregando a la "magia" de los cuadrados condiciones suplementarias. He aquí algunos ejemplos de esas curiosas creaciones:

00	13	21	09	17
06	19	02	10	23
12	20	08	16	04
18	01	14	22	05
24	07	15	03	11

(A)

00	31	12	90	71
60	91	20	01	32
21	02	80	61	40
81	10	41	22	50
42	70	51	30	11

(B)

Trocando los números del cuadrado mágico (A) se obtiene un nuevo cuadrado mágico (B).

En su libro *Superior Mathematical Puzzle* (1968), el ingeniero norteamericano Howard Dinesman indica el cuadrado mágico siguiente; dejo al lector el placer de descubrir (sin cálculos) su singular particularidad:

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

Sin duda el lector conoce el difícil problema de ajedrez que consiste en desplazar un caballo de tal manera que pase una vez y sólo una vez por cada una de las 64 casillas. Estudiosos exigentes han agregado la condición de que numerando de 1 a 64 las casillas sucesivamente ocupadas por el caballo se obtenga en el tablero un cuadrado mágico. Frost resolvió el problema en 1866. El doctor Jules Regnault publicó una de las soluciones posibles.[11]

Los artistas, que encontraron en la matemática algunas de sus reglas —el "número de oro" — y de sus inspiraciones, apelaron al cuadrado mágico no sólo introduciéndolo en sus composiciones — como hizo Alberto Durero en su célebre grabado *Melancolía* (1514)—, sino utilizando también sus estructuras como hizo el arquitecto neoyorquino Claude Bragdon.

Los cuadrados *panmágicos* que, desde Edouard Lucas, se llaman en general *diabólicos*, presentan propiedades extraordinarias: la suma de los elementos tomados en diagonales parciales en número igual al módulo del cuadrado es también ella igual al número mágico. Además si se corta el cuadrado según una línea o una columna y se lo reconstituye disponiendo los trozos de manera diferente —pero sin invertir líneas y columnas-, el cuadrado continúa siendo mágico.

El siguiente es un ejemplo de semejante cuadrado de módulo 4.

2	15	5	16
9	12	6	11
14	3	17	4
13	8	10	7

Más extraordinarios aún son los cuadrados bimágicos (o satánicos) y trimágicos (o cabalísticos) que representan verdaderas proezas aritméticas. Los primeros continúan siendo mágicos si se

[11] Dr. Jules Regnault, "Marche du cavalier bouclant la boucle aux échecs tout en inscrivant un carré semi-magique". Tolón, 1941.

reemplazan sus elementos por sus cuadrados, los segundos continúan siendo mágicos si se reemplazan sus elementos por sus cuadrados o sus cubos.

El primer cuadrado bimágico fue indicado por Pfefferman en 1890. Posteriormente se construyeron muchos otros. Véase un ejemplo:

38	43	61	52	26	23	l	16
10	7	17	32	54	59	45	36
47	34	56	57	19	30	12	5
3	14	28	21	63	50	40	41
24	25	15	2	44	37	51	62
60	53	35	46	8	9	31	18
29	20	6	ll	33	48	58	55
49	64	42	39	13	4	22	27

Que yo sepa, el primer cuadrado trimágico fue señalado por G. Tarry; tenía de lado 128.

En este dominio la dificultad está en realizar un cuadrado lo más pequeño posible.

Eutrope Cazalas dio uno de lado 64 en el apéndice de su libro sobre los cuadrados mágicos. Según *Scientific American,* un tal capitán Benson habría construido un cuadrado de lado 32 en 1949. Este *record* —si existe— fue igualado por el señor Charles Devimeux, que recientemente hizo conocer un cuadrado de 32 cuyas sumas son: en el primer grado, 16.400; en el segundo grado, 11.201.200; en el tercer grado, 8.606.720.000.

BIBLIOGRAFIA

Fermat, Pierre de, *La Plus Grand Quadruple, carré magique du Pierre Fermat, pour la première fois édité sans fautes d'impression par Basile de Sidoratsky,* París, 1904.

La Hire, Philippe de, *Nouvelles Constructions et considérations sur les quarrés magiques*, París, 1706.
Bessy, Frénicle de, *Des quarrés ou tables magiques,* París, 1729.
Lucas, Edouard, *Les Carrés magiques de Fermat et de Frénicle,* París, Delagrave, 1887.
Kraitchik, Maurice, *Traité des carrés magiques,* París, Gauthier-Villars, 1930.
Cazalas, Eutrope, *Carrés magiques au degré n,* París, Hermann, 1934.
Portier, B. *Le Carré diabolique de* 9, Argel, 1902.
Portier, B. *Le Carré cabalistique de 9,* Argel, 1902.

55
la bruja está en el centro

😐•

10	5	6
3	7	11
8	9	4

(1)

8	3	10
9	*x*	5
4	11	6

(2)

Primera pregunta: ¿Cuál es la cifra *x* (en 2)?

7	2	9
8	6	4
3	10	5

(1)

5	10	3
a	*y*	*b*
9	*c*	*d*

(2)

4	*e*	*f*
11	*z*	*8*
h	*i*	10

(3)

Segunda pregunta: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *y*, *z* representan *cifras*, ¿cuáles son las cifras *y* y z?

Solución

56
los magos de Amberes

☹•

Construir un cuadrado de módulo 5 con números consecutivos de manera tal que ese cuadrado continúe siendo mágico si, en lugar de leer los números de izquierda a derecha, se los lee de derecha a izquierda. (Si algunos números tienen una cifra menos que los otros se los completará colocando un cero a la izquierda.)

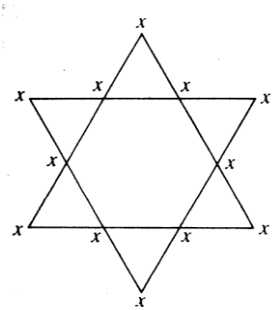
Solución

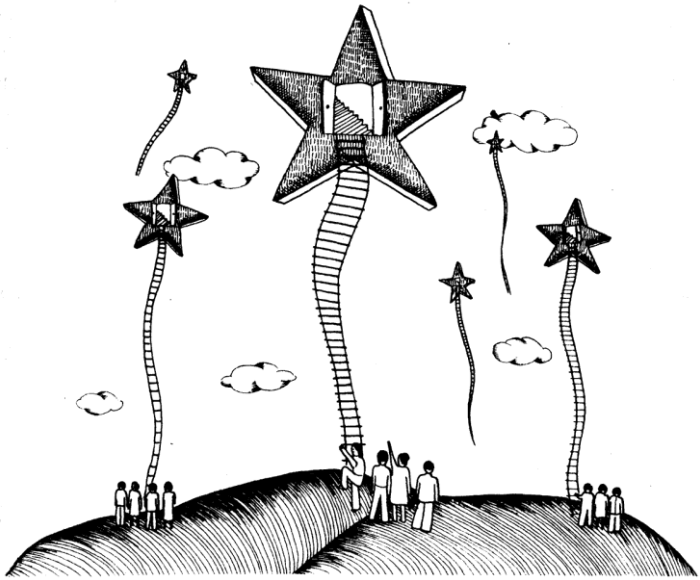
57
Estrellas mágicas

😐•

Con los números que van de 1 a 12 construir una estrella mágica o varias estrellas mágicas.

(En una *estrella mágica*, las seis sumas de los cuatro números escritos en cada uno de los seis lados son iguales.)





Solución

las curvas de los matemáticos

En el *Dictionnaire Universel,* publicado en 1753, Saverien dice en la pág. 242 del tomo I:

"El señor Hudde inventó una línea singular mediante la cual trata de expresar todos los lineamentos del rostro de un hombre conocido y de definirlos por una ecuación algebraica. Una idea tan extraordinaria le fue comunicada al señor Leibniz en *Actas de Leipsic* Ann. 1700, pág. 196; y éste asegura que podía construir semejante curva. Sin embargo esta construcción nunca se conoció."

Si la curva analítica del rostro del hombre quedó siendo el secreto del señor Hudde, centenares de curvas más razonables ilustran las obras de álgebra y de geometría; la mayor parte de esas curvas son armoniosas, muchas son útiles y algunas sorprendentes.

Tales curvas fueron trazadas por los matemáticos cuando buscaban lugares geométricos, representaciones concretas de funciones o soluciones de problemas que no podían resolver sino mediante intersecciones gráficas. Las curvas son muy antiguas puesto que ya los griegos de la antigüedad construyeron las cónicas, la cisoide de Diocles —para la duplicación del cubo —, la concoide de Nicomedes —para la trisección del ángulo—, la espiral de Arquímedes y muchas otras.

Descartes, al crear la geometría analítica, provocó un nuevo y abundante florecimiento de curvas; Newton clasificó las cúbicas en 72 clases (se olvidó de 6) y Plücker agrupó las cuárticas en 152 tipos.

Los físicos, los economistas, los estadísticos crearon a su vez curvas que les ayudaron a visualizar o a resolver sus problemas, como la *catenaria,* la *ruedecilla,* la *curva en forma de campana,* etc.

Por fin, en el curso de los últimos decenios, los matemáticos imaginaron curvas "particularmente monstruosas'', curvas sin tangentes o curvas que pasan por todos los puntos de un cuadrado.

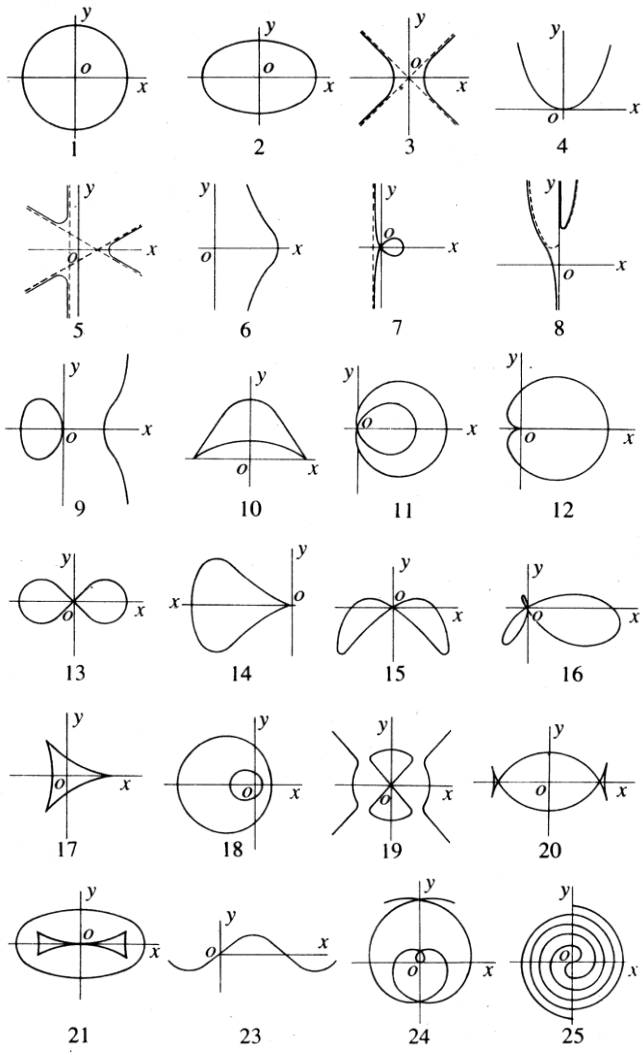
En el *Intermédiaire des Mathématiciens* de 1897, el geómetra Henri Brocard da una lista parcial de curvas cuyos nombres atestiguan el eclecticismo y a veces el sentido poético de sus padrinos; se trata de la lista siguiente:

Anillo de Newton - Arco zarpanel o asa de cesto - armilla - astroide - alforja - bicornio - bifolium - cardioide - catacáustica - catenaria - cáusticas - círculo - cadenilla - cisoide - clotoide - cicloide - ciclo de Camot - bocel - elipse - epiciclo - ventana de Viviani - figura de Lissajous - flor de jazmín - folium de Descartes - fragata - insinuada - hélice - hipérbola - hipocicloide -isanémona - isoquimera - Kampyle de Euxode - kukumaeida - lemniscata de Bemoulli - caracol de Pascal - loto - loxodrómica - nudo inextricable - óvalo de Cassini - óvalo de Descartes - parábola - perlas de Sluze - radioide - rosetón de cuatro pétalos - ruedecilla - escarabajo - serpentina - sinusoide - espiral de Arquímedes - estrofoide - toroide - tridente de Newton - trébol equilátero - trifolium - bisectriz - versiera (o hechicera de Agnesi) - voluta - zodíaca -, a las cuales hay que agregar la anginea, la parábola cúbica - la parábola divergente - la cúbica de Chasles - la curva de Watt - la curva de Talbot - la curva del diablo - la curva de los forzados - la cuadratriz de Dinostrato - las espirales de Galileo, de Fermat, de Poinsot - la coclearoide - la trocleoide - la curva de Ribaucour - la curva del pez - el collar de perlas - la cuártica piriforme, etc.

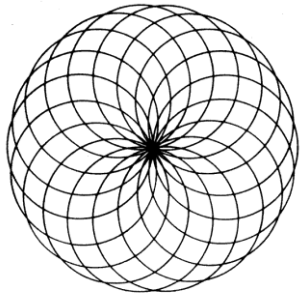
A continuación se representan varias curvas. Las primeras son curvas *algebraicas* que representan funciones algebraicas de dos variables *x* e *y*, es decir, funciones constituidas por polinomios de coeficientes racionales; las segundas son curvas *trascendentes*, que representan funciones trascendentes (es decir, no algebraicas), tales como aquellas en las cuales las variables se manifiestan en líneas trigonométricas, en exponentes, en logaritmos, etc. Por último, doy un ejemplo de curvas que representan una ecuación diferencial; el interés que tienen en estas curvas —o más exactamente estas familias de curvas— se reconoce desde Henri Poincaré, que en 1880 y 1881 les dedicó varios trabajos importantes [12].

[12] Comunicaciones a la Academia de Ciencias, 22 de marzo de 1880, 5 de diciembre de 1881.

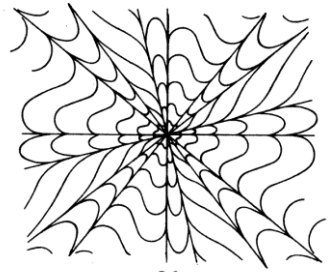
La hermosa curva representada [13] está tomada de "Courbes Mathematiques" de Jean Brette, publicado en el número especial de julio de 1976 de la *Revue du Palais de la découverte;* el señor Jean Brette me autorizó a reproducirla y se lo agradezco.



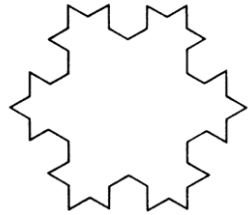
[13] Así como la curva n° 22.



22



26



curva cristal de nieve

9	10	27	28	45	46	63	64	81
	11	24	29	44	47	62	65	80
4								
7	12	25	30	43	48	61	66	
	13	24	31	42	49	60	47	78
6								
5	14	23	32	41	50	59	68	71
	15	22	33	40	51	58	69	76
4								
3	16	21	34	39	52	57	70	75
	17	20	35	38	53	56	71	74
2								
1	18	19	36	37	54	55	72	73

curva de Peano

CURVAS ALGEBRAICAS

Segundo orden

1. Círculo. Lugar de los puntos equidistantes de un punto dado llamado centro.
2. Elipse. Lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados, llamados focos, es constante.
3. Hipérbola. Lugar de los puntos en los que la diferencia de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es constante (aquí, hipérbola equilátera).
4. Parábola. Lugar de los puntos cuyas distancias respecto de un punto dado, llamado foco, y de una recta dada, llamada directriz, son iguales.

Tercer orden

5. Trébol equilátero.
6. Cúbica de Agnesi, o versiera o bruja.
7. Trisectriz de Mac-Laurin. Contribuyó a la solución gráfica del problema de la trisección del ángulo.
8. Tridente de Newton.
9. Parábola divergente.

Cuarto orden

10. Bicorne.
11. Caracol de Pascal, concoide de un círculo dado. Esta curva fue estudiada por Roberval quien le dio su nombre en honor del padre del gran matemático.
12. Cardioide. Lugar de las proyecciones del origen sobre las tangentes a un círculo que pasa por ese origen (podaría).
13. Lemniscata de Bemoulli. Lugar de los puntos el producto de cuyas distancias respecto de dos puntos fijos llamados focos es constante.
14. Cuártica piriforme.
15. Alforjas.

16. Trifolium.
17. Hipocicloide de tres alabeos. Lugar geométrico del punto de un círculo en el interior de un círculo tres veces mayor.
18. Ovalo de Descartes. Lugar de los puntos cuyas distancias *r* y *r'* respecto de dos puntos fijos están ligadas por una relación de la forma a*r* + b*r'* = c
19. Curva del diablo.

Sexto orden

20. Curva de Talbot. Antipodaria de la elipse.

Octavo orden

21. Toroide

Trigésimo octavo orden

22. Curva de Moritz.

CURVAS TRASCENDENTES

23. Sinusoide.
24. Espiral de Arquímedes.
25. Espiral de Fermat.

REPRESENTACION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

26. $\delta \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = \mathrm{tg}\,(4 \text{ arco tg sen } 4\,\theta + \frac{\pi}{4})$

LAS CURVAS MONSTRUOSAS

En el curso de los últimos decenios, los matemáticos imaginaron curvas que se calificaron como "particularmente monstruosas".

Veamos dos ejemplos de estas curiosidades matemáticas.

La curva *cristal de nieve* (C) nos propone una paradoja singular: se trata de una curva cerrada de longitud infinita que rodea una superficie finita.

Evidentemente no es posible trazar una curva de longitud infinita, pero es fácil concebirla considerándola como límite de las curvas. C_1, C_2, C_3, . . . C_n que definimos a continuación.

C_1 es un triángulo equilátero del que se supone que su lado tiene una longitud 1. Dividimos cada lado de C_1 en tres partes iguales y sobre el tercer mediano construimos hacia el exterior un triangulo equilátero cuyo lado es evidentemente 1/3. Se obtiene así C_2 que tiene 3×4 lados. Dividimos cada lado de C_2 en tres partes iguales y, sobre el tercer mediano, construimos hacia el exterior un triángulo equilátero cuyo lado es evidentemente de modo que el número de lados es $3 \times 4^2 = 3 \times 4^{3-1}$. Se obtiene así C_3. Y de este modo continuamos siguiendo el mismo procedimiento. La curva C_n posee $N_n = 3 \times 4^{n-1}$ lados de longitud $1/(3^{n-1})$ y su perímetro es:

$$3 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Los perímetros de las curvas sucesivas son los términos de una progresión geométrica de razón superior a 1. Cuando *n* aumenta indefinidamente, C_n tiende a C y el perímetro tiende al infinito. ¿Cuáles son las superficies S_1, S_2, S_3... S limitadas por las curvas correspondientes?

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = S_1 + 3\frac{S_1}{3^2} = S_1\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = S_2 + N_2 \frac{S_1}{(3^2)^2} = S_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 S_1$$

$$= S_1\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

y poniendo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = q$

$$S_n = S_1\left[1 + \frac{1}{3}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{2n-4})\right]$$

$1 + q + q^2 + ... + q^{2n-4}$ es una progresión geométrica de término q inferior a 1 cuya suma, cuando *n* aumenta indefinidamente, tiende a $1/(1–q) = 9/5$.

De manera que cuando *n* aumenta indefinidamente, S_v tiende a:

$$S = S_1\left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{9}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

superficie finita rodeada por la curva C de longitud infinita.[14] Más difícil de imaginar es la curva estudiada por el matemático italiano Giuseppe Peano, que valió a su autor los elogios de Henri Poincaré: "Tengo la mayor estima por el señor Peano que ha hecho cosas muy bonitas, por ejemplo, su curva que llena todo un cuadrado" *(Science et Méthode*, pág. 193).

Como en el caso anterior, la *curva de Peano* será considerada como el límite de las curvas $Q_1\ Q_2$ ... C_n que pasamos a definir. La curva C_1 es la diagonal de un cuadrado K de lado 1. Tiene la longitud $d_1 = \sqrt{2}$. La curva C_2 pasa por los centros de los 3^2 cuadrados de lados 1/3 construidos en el interior de K y paralelamente; tiene una longitud de $d_2 = 3^2\ d_1/3$. La curva C_3 pasa por los centros de los 3^4 cuadrados de lados $1/3^2$ construidos en el interior de K; su longitud es $d_3 = 3^4\ d_1/3^2 = 3^2 \times \sqrt{2}$.

La curva C_n pasa por los centros de 3^{2n-2} cuadrados de lados $1/(3^{n-1})$ construidos en el interior de K; su longitud es $3^{2n-2} \times \frac{d_1}{3^{n-1}} = 3^{n-1} \times \sqrt{2}$, longitud que aumenta indefinidamente con *n*. Esta curva C_n pasa por los centros de los cuadrados de coordenadas

[14] Esta curva fue estudiada en la obra de Edward Kasner y James Newmann *Les Mathématiques de l'imagination,* 1950 (traducida del norteamericano).
La curva anticristal de nieve se obtiene trazando los triángulos sucesivos hacia el *interior*, y no hacia el exterior. Su longitud es la misma que la longitud de la curva "cristal de nieve", el límite de su superficie es $(\sqrt{3})/10$.

$$x_p = \frac{2p - 1}{2 \times 3^{n-1}}$$

$$P = 1, 3, \ldots, 2 \times 3^{n-1}$$

$$y_q = \frac{2q - 1}{2 \times 3^{n-1}}$$

$$q = 1, 3, \ldots, 2 \times 3^{n-1}$$

Se demuestra que uno puede elegir *n* lo bastante grande para que C_n pase tan cerca como uno quiera de todos los puntos del cuadrado K, es decir, en última instancia, que C pase por todo punto de K [15].

Las curvas engendradas por los "sistemas dinámicos", especialmente las curvas soluciones de sistemas diferenciales no lineales, son a veces de una naturaleza muy diferente de la de las curvas algebraicas usuales. Mucho más irregulares, aquéllas sugieren, equivocadamente, que el azar determinó su construcción. Desgraciadamente es difícil dar ecuaciones explícitas de ellas. Las "fractales" de Benoit Mandelbrot [16] son ejemplos de esas curvas de apariencia caótica que pueden construirse sin embargo mediante procedimientos precisos y que muestran una notable analogía con muchas curvas que encontramos en la naturaleza.

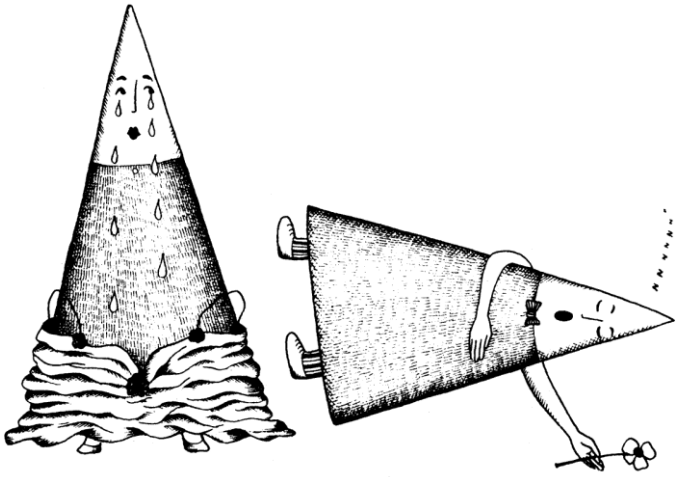
Otras curvas de apariencia irregular y a menudo extrañas son las representaciones de las "funciones seudoaleatorias" de J. Bass, construidas sin embargo por métodos matemáticos simples. Su irregularidad es la traducción indirecta de las propiedades de ciertos números irracionales.

[15] Esta curva fue estudiada en *Cours d' analyse de i École polytechnique*. t. I de J. Favard.

[16] *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*, París, Flammarion, 1975.

58
decepción triangular

¿Cuál es la superficie del triángulo de lados 94, 177 y 83?



Solución

59
las esferas pintadas

Un vendedor de billares tiene como insignia de su negocio dos esferas desiguales, sólidas y hechas de la misma madera. La mayor pesa 27 kg y la pequeña 8 kg.

El comerciante se propone volver a pintar las insignias. Si le hacen falta 900 gramos de pintura para pintar la esfera mayor, ¿cuántos gramos necesitará para pintar la pequeña?

(La cantidad de pintura necesaria es proporcional a la superficie que hay que pintar.)

Solución

60
los petasóforos de Saint-Saturnin

Los pájaros llamados vulgarmente petasóforos azules (*petasophorus sylvaticus*) son notables por su propiedad de volar siempre a la misma velocidad, 31,006 kilómetros por hora, lo cual permite reconocerlos fácilmente; más asombroso aún es el hecho de que este número es la tercera potencia de π, lo que prueba que los petasóforos conocen los cuatro primeros decimales de ese número, y son, por lo tanto, más sabios de lo que eran Euclides, Pitágoras y Arquímedes. La aldea de Saint-Saturnin se enorgullecía de poseer dos petasóforos y dos torres en las cuales anidaban los pájaros. Una de las torres medía 30 metros de altura y la otra 40; estaban separadas por una distancia de 50 metros. Entre ellas había una fuente.

Todas las tardes —y éste era un espectáculo que no había que perderse— los dos pájaros salían al mismo momento de sus nidos y llegaban al mismo tiempo a la fuente donde bebían largamente.

¿Qué distancia había de la fuente a la torre más alta?

Solución

61
el encuentro de los geómetras exóticos

😐🎲

Tres exploradores se instalaron en la selva en los puntos A, B, C. Quieren establecer un medio de comunicación entre los lugares de su asiento construyendo las sendas más cortas que sea posible.

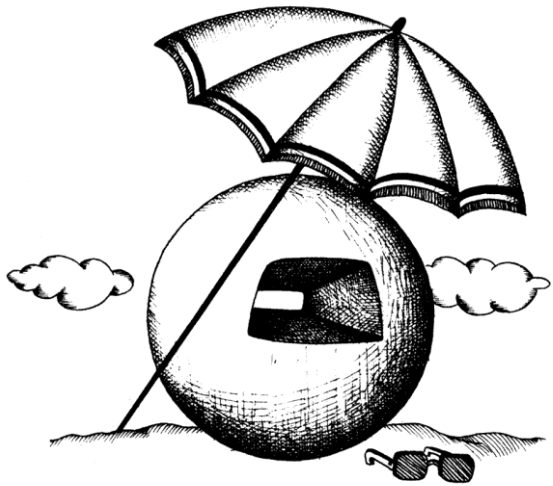
¿Cómo procederán?

Solución

62
Asombroso comportamiento de una esfera perforada

☹⚂

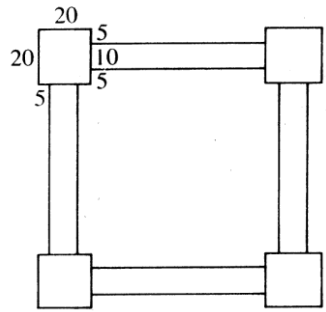
Consideremos un círculo sobre una esfera, un cilindro regular, que tiene por base a ese círculo, y generatrices paralelas a la recta que une el centro de la esfera con el centro del círculo. Determinar, mediante una sola medida, el volumen restante de la esfera después de haber restado la parte perforada por el cilindro.



Solución

63
Vauban se encuentra con Euclides

☺•



Una fortaleza de forma rectangular tiene cuatro torres en los ángulos; las dimensiones de las torres están indicadas en el croquis. Se ha calculado que en caso de ataque la guarnición pueda colocar 50 hombres en cada torre y un hombre a cada metro de las murallas que unen las torres.

1. Sabiendo que esta fortaleza tiene 560 hombres, indicar al instante, sin hacer ningún cálculo, el perímetro exterior de la ciudadela.

2. ¿Cuál debe ser la forma exacta de la fortaleza para que la superficie interior sea máxima?

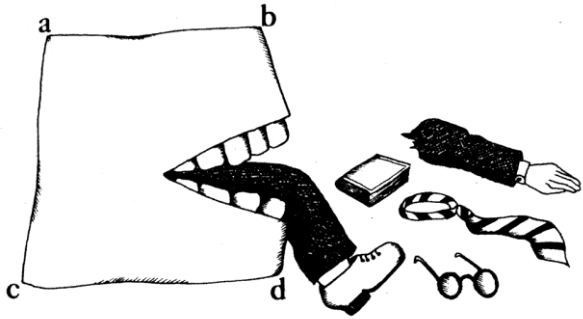
3. ¿Cuál es, pues, el valor de esa superficie?

Solución

64
el cuadrado antropófago

☺•

En un primer cuadrado de lado 2 penetra un segundo cuadrado, mayor que la mitad del primero, de manera tal que uno de sus vértices está en el centro del primero. ¿Cuál es la superficie del cuadrilátero común a los dos cuadrados?



Solución

65
el testamento del padre Trigone

El padre Trigone tenía un dominio de forma triangular y decía:

—Es la forma más ventajosa. De todos los polígonos, el triángulo es el que tiene menos lados y, por lo tanto, cercarlo resulta menos costoso.

El señor Trigone no sabía geometría: a igual superficie, el perímetro del círculo que puede considerarse como un polígono de un número infinito de lados, es inferior al perímetro de cualquier triángulo.

Cuando murió aquel ignorante, se abrió su testamenta que estipulada que el dominio debía dividirse entre sus cuatro hijos y que los cuatro lotes debían tener la misma superficie y ser de forma triangular.

¿Cómo se hizo la división?

Solución

66
la rata de Tegucigalpa

El templo maya de Tegucigalpa tiene la forma de una pirámide regular. Los triángulos isósceles que forman sus caras tienen 162 decímetros de base y 360 decímetros de altura. Una rata curiosa decide hacer una ascensión al monumento. Parte de uno de los vértices del polígono de base y, avanzando por una cara, se dirige perpendicularmente a la arista opuesta; luego pasando por la cara siguiente se dirige también perpendicularmente a la arista opuesta y así hace sucesivamente hasta llegar al vértice de la pirámide. ¿Qué distancia habrá recorrido la rata al término de su viaje?

Solución

67
el congreso de las ratas mayas

Las ratas mayas organizaron un congreso científico y uno de los matemáticos que asistía a la asamblea y a quien habían informado de la hazaña cumplida por su congénere pidió que fuera establecida una fórmula general que diera el camino recorrido en función de datos más clásicos; dijo entonces: Si una rata que parte de uno de los vértices de un polígono regular de n lados y de perímetro $2p$, que constituye la base de una pirámide igualmente regular de altura k, se desplaza de una cara a otra en una dirección perpendicular a la arista opuesta, ¿qué distancia x habrá recorrido al llegar al vértice de esa pirámide?

Solución

68
consideraciones sobre la velocidad de rotación de las ratas mayas

☺

Una de las ratas más sabias del Congreso de Tegucigalpa planteó, en lo tocante a la ascensión de la pirámide, una nueva cuestión cuya solución tuvo, como se verá, importantes consecuencias.

—Acabamos de calcular —dijo aquella rata— el trayecto que recorre una rata desde la base al vértice de nuestro templo piramidal en la condiciones que hemos indicado. Yo quisiera saber además cuántas veces la rata da vuelta alrededor del eje de la pirámide durante ese trayecto.

Como la solución geométrica es evidente, se pide que el lector la confirme mediante el cálculo tomando como datos la base a de una de las caras triangulares y su ángulo a de la base

Solución

69
a los cerdos no les gustan las ciruelas

☺⚂

Roger y Raymond, los dos hijos de Joseph Vanson, deben repartirse la tierra que les dejó su padre: un rectángulo de 2.000 por 1.000 metros.

En todo el contorno de esa parcela hay ciruelos. Esos árboles interesan a Roger, que es muy aficionado a los alcoholes blancos, pero no a Raymond que piensa sobre todo en alimentar a sus cerdos y por eso desea sembrar maíz. Los dos hermanos deciden pues repartirse por partes iguales el terreno de la manera siguiente: Roger tendrá una banda de un ancho constante en el contorno de todo el terreno y Raymond obtendrá el rectángulo central.

¿Qué ancho tendrá esa banda? ¿Y cómo se la puede determinar mediante una construcción geométrica muy simple?

Solución

70
piedras de afilar

En una gran ferretería encontramos en el renglón de las piedras de afilar dos artículos diferentes: una piedra grande de 28 centímetros de radio que pesa 80 kilos y una pequeña de 40 kilos. Las piedras de afilar tienen todas el mismo espesor y el agujero central tiene siempre 4 centímetros de radio. Si los precios de las piedras son proporcionales a sus radios exteriores y si la grande vale 357 francos, ¿cuánto valdrá la pequeña?

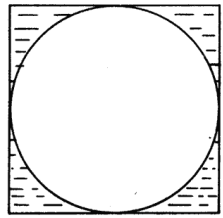
Solución

71
la esfera hueca y el geómetra sagaz

☺⚅

Una esfera pesa 40 kilogramos. Se la coloca suavemente dentro de un cilindro lleno de agua en el cual entra exactamente. Después de esta operación, el cilindro y su contenido pesan 20 kilogramos más.

¿Cuál es el volumen del cilindro? ¿Y cuál es la densidad de la esfera?



Solución

72
el imposible cuadrado de cubos

Al joven Balthazar le han regalado un juego de cubos. El chico prueba de yuxtaponer los cubos para formar un cuadrado pero le faltan siete. Intenta luego hacer un cuadrado más pequeño y entonces le sobran 10 cubos. ¿Cuántos cubos tiene Balthazar?

Solución

73
las angustias del rabino Nehemías

Nehemías era un rabino que vivía en Palestina en el siglo n antes de nuestra era. Gran admirador de Arquímedes, admitía el valor atribuido a π por su ilustre maestro: 3 1/7.

Pero, como era rabino y por añadidura talmudista, no podía rechazar la afirmación del Antiguo Testamento: "[Hiram] hizo también un mar de bronce fundido que tenía 10 codos de borde a borde; un cordel de 30 codos medía su circunferencia alrededor", lo cual implica el valor 3.

Al cabo de un sinnúmero de meditaciones y con mucha mala fe, el rabino llegó a la conclusión de que π era sin duda igual a 3 pero que los 10 codos representaban el diámetro exterior del mar de bronce fundido y que los 30 codos eran su circunferencia interior.

¿Cuál era pues el espesor de la pared del mar de bronce fundido?

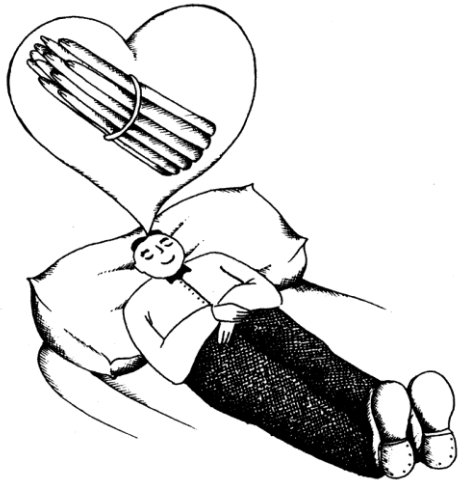
Solución

74
si a usted le gustan los espárragos...

□•

Una vendedora de legumbres tenía la costumbre de atar sus espárragos con un bramante de 30 centímetros de longitud y formaba así manojos que vendía a 8 francos cada uno. Como esos manojos le parecían demasiado pequeños, dio en utilizar bramantes de doble longitud y, en consecuencia, vendía sus manojos de espárragos a 16 francos cada uno.

¿Calculaba bien esa verdulera? ¿Qué precio debería pedir por cada manojo?



Solución

75
los hilos del faraón

☺•

Queriendo recompensar a sus dos geómetras Ahmés y Tutmés, que habían establecido el catastro del imperio, el faraón les hizo entregar dos hilos de lino muy largos y de igual longitud; luego dijo a cada uno de ellos que les daría el dominio de la forma que cada cual eligiera y que pudiera ser rodeado por el hilo.

Tutmés hizo un dominio en forma de triángulo equilátero cuya superficie vino a ser de 20 dunames. Ahmés por su parte eligió la forma del hexágono regular; ¿qué superficie tenía su propiedad?

Solución

76
el secreto del triángulo de las Bermudas

Tomemos como unidad de longitud 100 kilómetros; el triángulo de las Bermudas tiene, como medida de sus lados, números enteros sucesivos y —aquí está su secreto— su ángulo más pequeño es la mitad de su ángulo más grande.

¿Cuáles son sus dimensiones?

Solución

77
las cuatro medallas

☹⚀

Cuatro medallas tienen las particularidades siguientes: sus diámetros se expresan en números enteros, en milímetros, y el diámetro mayor es igual a la suma de los otros tres; además, las tres medallas más pequeñas pueden disponerse sobre la mayor de manera tal que cada una sea tangente a las otras tres. La parte no cubierta de la medalla grande es equivalente a un círculo inscrito en un cuadrado de una superficie de 4.830 milímetros cuadrados.

¿Cuáles son los diámetros de esas medallas?

Solución

los calculadores prodigios

Periódicamente los diarios nos informan sobre el descubrimiento realizado en alguna región atrasada de un calculador prodigio, generalmente inculto, que en algunos segundos efectuó operaciones de una complicación extraordinaria. Esos descubrimientos no son recientes, puesto que el historiador griego Juliano nos informa que en el siglo II de nuestra era, un palestino, Nicómaco de Gerasa, ya se había dado a conocer por sus desconcertantes malabarismos aritméticos. Aquel hombre tuvo numerosos sucesores. En la relación que hizo de un viaje por Italia en 1664 el señor Baltasar de Monconys nos dice que encontró a un niño de 8 años, apodado Matías el Gallo, cuyas notables dotes aquél había comprobado. En el siglo XVIII se cita a Jededish Buxton, un obrero inglés analfabeto; a Tom Fuller, un esclavo negro de Virginia, también analfabeto que, por ejemplo, respondía en un minuto y medio a una pregunta como la siguiente: ¿cuántos segundos hay en 70 años, 17 días y 12 horas? (Hay 2.210.500.800 segundos sin tener en cuenta los años bisiestos.) También sabemos de la dama de Lautré, citada por la señora de Genlis, que en algunos segundos realizaba la multiplicación de dos números de ocho cifras; cabe hacer notar que esa persona es la única mujer que pertenece a la corporación de los calculadores prodigios.

En 1837, Arago asombró mucho a sus colegas de la Academia de Ciencias al interrogar en su presencia a un pastor siciliano de 10 años, Mangiamale, que era ciego y que, salvo en lo tocante a la aritmética, parecía aquejado de debilidad mental. Algunos años después la misma Academia se maravilló de nuevo al escuchar a un joven campesino de 14 años, Henri Mondeux. Este joven explotó su talento presentándose en muchas ciudades de Francia y mostró que además de sus dotes de calculador poseía cierta agudeza para replicar; uno de sus oyentes le preguntó cuál es el producto de 3×4 y el joven respondió: “Póngase al cabo del asunto señor, será 120”.

En 1840 se presentó en Alemania y en Austria el alemán Johann Martin Zacharias Dase que, como se verá, tuvo un destino algún tanto particular. Mentalmente hacía la multiplicación de dos números de 8 cifras en 54 segundos, de 2 números de 20 cifras en

6 minutos, de 2 números de 100 cifras en 8 horas y media. El matemático Strassnitzky lo conoció en Viena, cuando el joven tenía 16 años, y lo contrató para el cálculo de tablas matemáticas. Los dos hombres obtuvieron el mayor éxito con el número π. Strassnitzky enseñó a su alumno la fórmula de cálculo de π por medio de arcos tangentes y el joven realizó la hazaña de hallar en dos meses los 205 primeros decimales de π, y superó así el record anterior de 140 decimales establecido cincuenta años antes (por lo demás, vino a revelarse después que las cinco últimas cifras eran falsas). Posteriormente, Dase estableció una tabla de logaritmos de siete decimales que van de 1 a 1.000.000. La historia de la matemática conservó el nombre de Dase a causa de su hazaña con π, pero el hombre nunca fue un matemático. Únicamente aplicó sus dones de calculador a las fórmulas que le eran indicadas; ni siquiera llegó a aprender los elementos más simples de la geometría ni a comprender otra lengua que no fuera el alemán.

Indiscutiblemente el más célebre de los calculadores prodigios profesionales fue Inaudi. Había nacido en 1867 en los Alpes del Piamonte. Se quedó huérfano muy temprano y junto con sus hermanos se desempeñó como exhibidor de muestrarios. Emigró a Francia, fue durante un tiempo pastor en los Pirineos, luego ejerció diversos oficios hasta que vino a descubrirse su particular talento. Se lo presentó en el teatro Robert-Houdin; luego emprendió diversas giras por Francia y se lo presentó, como era natural, en la Academia de Ciencias (1892); por fin se lanzó a una carrera internacional en la cual adquirió gran renombre. El pequeño piamontés analfabeto había aprendido a leer y escribir y terminó por presentar su número en cinco lenguas. Cité suficientes nombres e hice suficientes referencias para mostrar que el fenómeno del "calculador prodigio" existe sin duda alguna. Comprenderlo ya es otra cuestión. Lo primero que se les ocurrió a los investigadores fue evidentemente interrogar a los diferentes casos; pero las explicaciones que algunos de ellos consintieron en dar resultaron totalmente ininteligibles. Es cierto que Inaudi escribió un libro, *El cálculo rápido fácil para todos*, pero en él sólo reveló algunos mecanismos y ardides sin gran interés. Dos hombres de ciencia fueron clasificados entre los calculadores prodigios y cabía esperar que por lo menos ellos estuvieran en condiciones de analizar lúcidamente el

fenómeno; desgraciadamente el primero, Ampère, perdió su don a los cuatro años de edad y no conservó ningún recuerdo de los procedimientos que había empleado; en cuanto al segundo, Gauss, no fue un "prodigio" sino que fue tan sólo un campeón de cálculo mental que utilizaba los métodos clásicos.

Por falta de información directa, se buscó una explicación en la personalidad de los calculadores; se observó, como el lector no habrá dejado de hacerlo, que muchos de ellos eran jóvenes y en su mayor parte analfabetos: este punto es muy importante. Muestra que esos calculadores no razonan sobre cifras, que no conocen, sino que razonan sobre números; esas entidades abstractas que ellos no sabían nombrar se les aparecían de cierta manera; por lo demás, muchos de ellos dijeron que "veían los números". Se observó también que aquellos particulares individuos, de inteligencia a menudo mediocre, poseían en cambio una gran memoria; se comprobó asimismo que en muchos casos su don desapareció cuando se les enseñó aritmética. Por fin, conviene observar que aquellos calculadores que desarrollaron una carrera pública empleaban mecanismo y ardides que ellos mismos imaginaban o que les enseñaban, mecanismos que los ayudaron considerablemente en sus hazañas sin por ello explicarlas por completo; el lector encontrará algunos de esos mecanismos en las páginas que siguen.

En conclusión, no se sabe nada del don de los calculadores prodigios, salvo que no utilizan los métodos de la aritmética clásica y que tratan cada problema como un caso particular.

Como no podían explicar el fenómeno, los hombres de ciencia por lo menos encontraron una expresión para designarlo: los calculadores prodigios poseen "un conocimiento intuitivo'' de los números.

*

Creo que se pueden clasificar entre los calculadores prodigios a los animales que saben contar, aun cuando sus posibilidades sean modestas. Observadores pacientes llegaron a la conclusión de que ciertas aves, las urracas y los cuervos, sabían contar hasta cinco. Parece que el chimpancé salvaje tiene el mismo registro, pero es probable que bien enseñado podría ir mucho más lejos; aunque no

tan lejos como los bueyes que, si damos crédito a Montaigne, sabían contar hasta cien. Por lo menos así puede inferirse del siguiente pasaje: "Los bueyes que trabajaban en los jardines reales de Susa para regar y hacer girar ciertas grandes ruedas que extraían agua y a las cuales estaban fijados unos cangilones (como se ven tantas en Languedoc) debían hacerlas dar cien vueltas por día y estaban tan acostumbrados a ese número que era imposible, aun recurriendo a la fuerza, hacerles dar una vuelta más; habiendo cumplido su tarea se detenían sin más ni más" (*Essais*, libro II, capítulo 12).

Por impresionante que fuera la proeza de los bueyes de Susa, ella estaría superada y en mucho por la de ciertos caballos. Shakespeare nos cuenta la historia de un infortunado caballo, Marec, que calculaba como un académico; su amo, el señor Bantres, quiso exhibirlo en el continente; pero, ¡ay!, apenas cruzado el Canal de la Mancha, el caballo fue arrestado por orden de la Inquisición, condenado por hechicería y quemado vivo.

El fin prematuro de Marec no nos permitió conocer sus hazañas. En cambio, estamos muy bien informados sobre las de los caballos de Elberfeld. Un poco antes de terminar la Primera Guerra Mundial, un industrial de Elberfeld, Westfalia, el señor Krall hizo saber que poseía un potro llamado Kluge Hans (el Inteligente Hans), que sabía extraer las raíces cuadradas, cúbicas y hasta cuartas. Matemáticos y curiosos acudieron a visitar a Kluge Hans a quien su propietario había dado dos compañeros tan sabios como aquél: dos caballos árabes uno de los cuales se llamaba Mohammed (se ha perdido el nombre del segundo). Los caballos de Elberfeld respondieron en aproximadamente un minuto a las cuestiones siguientes:

$$\sqrt[3]{13.824} \text{ respuesta } 24$$

$$\sqrt[3]{103.823} \text{ respuesta } 47$$

$$\sqrt[3]{29.791} \text{ respuesta } 31$$

Kluge Hans y sus amigos indicaban las cifras golpeando en el suelo con sus cascos el número de veces conveniente. Respondían aunque su amo no estuviera presente y no se equivocaban nunca

siempre que se les propusieran números cuyas raíces fueran números enteros. Sólo se enojaron una vez cuando el escritor belga Maeterlinck les pidió que hicieran una extracción de raíz cuadrada que no reunía esas condiciones. Maeterlinck, que era menos buen matemático que entomólogo, se excusó alegando que creía que todos los números eran cuadrados perfectos.

Aseguro al lector que la historia de los caballos de Elberfeld se encuentra en obras muy serias; los autores no emitieron empero ninguna hipótesis sobre las fuentes de inspiración de estos notables animales.

BIBLIOGRAFIA

Borderieux, Carita, *Nouveaux Animaux Pensaras,* St. Amand, Impr. Clair, 1923.

Cauchy, Agustin, *Rapport fait á l'Académie des Sciences sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune paire de Touraine,* París, 1841.

Regnault, Jules Dr., *Les Calculateurs prodiges,* P. Payot, 1943.

78
tubérculos

😐•

¿Cuál es el número cuya raíz cuadrada y cuya raíz cúbica difieren en 18?

(Resuelto por Inaudi en 1 minuto y 50 segundos.)

Solución

79
tresillo

😐▪

Hallar tres números a, b, c, de suerte que (a + b + c) = 43 y (a^3 + b^3 + c^3) = 17.299

(Resuelto por Inaudi en tres minutos.)

Solución

80
cuarteto

😐▪

Descomponer 13.411 en cuatro cuadrados.
(Inaudi halló una primera solución en tres minutos.)

Solución

81
boliche

¿Cuál es la cifra de las unidades del número

$$[(8\ 7\ 4\ 5\ 9\ 7)^5 - (3\ 6\ 5\ 6\ 4\ 5)^4] \times (8\ 9\ 3\ 1)^7?$$

(Resuelto por X en 2 segundos.)

Solución

82
colinabo

¿Cuál es el número entero cuya potencia sexagesimocuarta tiene 20 cifras?

(Resuelto por X en 3 segundos.)

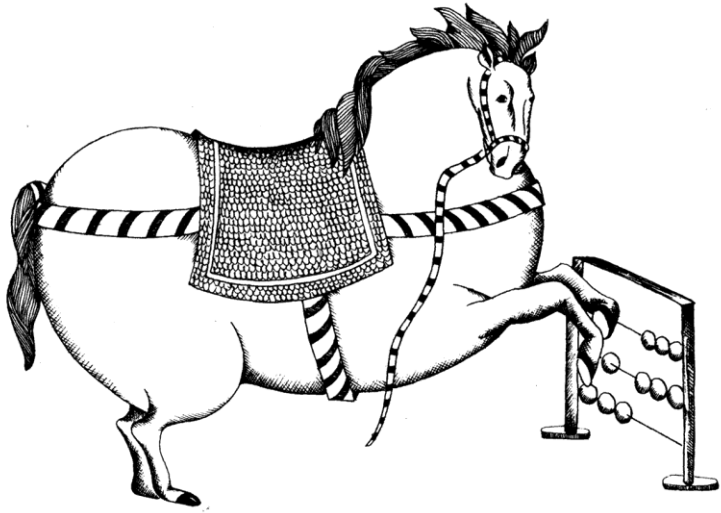
Solución

83
el caballo de Elberfeld

☹•

Kluge Hans, uno de los caballos de Elberfeld, respondió en un minuto a la pregunta siguiente: ¿cuál es la raíz cuarta de 7.890.481?

¿Podría usted también hacerlo?



Solución

84
Multiplicación supersónica

😐•

El juego consiste en hallar el producto de dos números de nueve cifras en algunos segundos, y si es posible mentalmente. Por supuesto, hay un ardid; uno de los dos números debe ser dado por un compañero pues es menester que sea G = 142.857.143.

Basta entonces con formar el número de 18 cifras obtenido por la repetición del número diferente de G y dividir ese número de 18 cifras por 7. ¡El resultado es el producto buscado!

¿Por qué?

Ejemplo: 231.025.642 × 142.857.143
= 231.025.642.231.025.642 / 7
= 33.003.663.175.860.806

Solución

85
la ecuación del solitario

☺•

Sin efectuar operaciones, hallar el valor de *x*.

$$83.875.683.470^2 - (83.875.683.469 \times 83.875.683.471) = x$$

Solución

la criptografía

La criptografía es, como lo indica su etimología, el arte de las escrituras secretas. Su objeto es transformar un mensaje claro en un mensaje secreto que en principio sólo podrá ser leído por su destinatario legítimo (operación de cifrar); a esto sigue la operación inversa llevada a cabo por el destinatario (operación de descifrar). Restablecer el texto claro partiendo del texto cifrado sin que de antemano se conozca el procedimiento de cifra es el *desciframiento*.

Si dejamos de lado los textos bíblicos en cifra, discutidos y discutibles, el procedimiento criptográfico más antiguo que se conoce es la escitala de los lacedemonios, de la que Plutarco nos dice que fue empleada en la época de Licurgo (siglo ix antes de nuestra era). La escitala era un palo en el cual se enrollaba en espiral una tira de cuero. Sobre esa tira se escribía el mensaje en columnas paralelas al eje del palo. La tira desenrollada mostraba un texto sin relación aparente con el texto inicial, pero que podía leerse volviendo a enrollar la tira sobre un palo del mismo diámetro que el primero.

Los romanos emplearon un procedimiento muy ingenioso indicado por Eneas el Táctico (siglo IV antes de nuestra era) en una obra que constituye el primer tratado de criptografía conocido. El procedimiento consistía en enrollar un hilo en un disco que tenía muescas correspondientes a las letras del alfabeto. Para leer el mensaje bastaba con conocer su primera letra. Si el correo era capturado sólo tenía que quitar el hilo del disco y el mensaje desaparecía. Pero posteriormente este procedimiento se perdió. Por Suetonio conocemos la manera en que Julio César cifraba las órdenes que enviaba a sus generales; sus talentos de criptógrafo no igualaban a los del general. Julio César se limitaba a utilizar un alfabeto desplazado en tres puntos: A era reemplazada por D, B por E, etc.

Hoy el arte de cifrar utiliza las técnicas de la electrónica y ya no tiene ninguna relación con los procedimientos que acabamos de describir.

Todos los procedimientos de cifra antiguos y modernos, a pesar de su diversidad y de su número ilimitado, entran en una de las dos categorías siguientes: trasposición o sustitución. La trasposición

consiste en mezclar, de conformidad con cierta ley, las letras, las cifras, las palabras o las frases del texto claro. La sustitución consiste en reemplazar esos elementos por otras letras, otras cifras, otras palabras u otros signos.

LA CRIPTOARITMETICA

La criptografía es un arte que desempeñó un importante papel en el desenvolvimiento de la historia. La criptoaritmética no es más que un juego. No sé en qué época se inventó, pero los aficionados a las variedades comenzaron a interesarse por ellas en el primer congreso internacional de recreación matemática que se reunió en Bruselas en 1935.

La criptoaritmética consiste en reemplazar las cifras por letras en la transcripción de una operación de aritmética clásica, de una ecuación. El problema consiste en hallar las cifras que están "bajo" las letras. Para complicar las cosas, en ciertos sitios se puede marcar simplemente el lugar de una cifra con un punto o una cruz. En el caso extremo, del que daré un ejemplo, sólo quedan cruces.

Es fácil ver que la criptoaritmética es un procedimiento de cifra por sustitución y que la clave es una regla matemática.

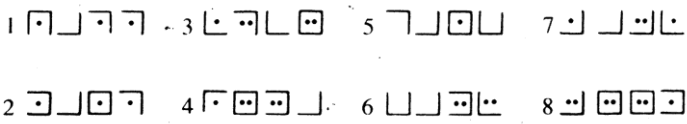
Los enunciados criptoritméticos son a veces seductores; sus soluciones no presentan dificultades matemáticas pero en cambio exigen numerosísimas hipótesis y, en consecuencia, cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Por eso aconsejaré que se dediquen a este género de problemas sólo los lectores pacientes y minuciosos.

86
un pariente del señor Joule

☺

Mediante un alfabeto secreto como el que se indica a continuación se han escrito los nombres de ocho personajes célebres, todos de cuatro letras:



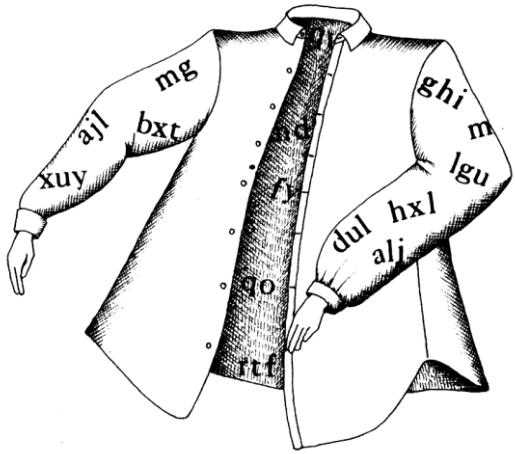
¿Puede usted decir cuáles son esos personajes sabiendo que 1 es un físico escocés cuyo nombre se convirtió en el de una unidad de medida, 2 un filósofo alemán, 3 un poeta romántico, y que los demás son un novelista francés y una novelista francesa, un pintor español, un músico alemán y un navegante inglés?

Solución

87
la resta de Harpagon

AABB
– BBAA
CDDC

Hallar, en cifras, CDDC.



Solución

88
las multiplicaciones de Santa Bárbara

😐•

En cada una de las multiplicaciones indicadas a continuación, las nueve cifras del multiplicando, del multiplicador y del producto son las nueve cifras significativas (1 a 9). Colocar esas cifras sobre las cruces.

+ + + + × + = + + + +

+ + + × + + = + + + +

Solución

89
ex nihilo

☹•

Cada cruz de la multiplicación consignada más abajo representa una cifra.

Las veinte cruces son dos veces cada una de las cifras 0, 1 ... 9.

Hallar el multiplicando, el multiplicador y el producto.

```
    XXX
  × XXX
  -----
    XXX
   XXX
  XXX
  -----
  XXXXX
```

Solución

90
fidelidades de la diferencia

😐•

Encontrar un número de tres cifras diferentes, un número de cuatro cifras diferentes, un número de ocho cifras diferentes, un número de nueve cifras diferentes, un número de diez cifras diferentes, de suerte que cada cual sea de tal condición que si se le resta el número invertido la diferencia esté formada por las mismas cifras.

Solución

91
alegrías y trabajos de la inversión

☹•

N es un número escrito con cinco cifras diferentes y N’ es el número invertido (N > N’). N + N’ se escribe con las cinco cifras de N (o N’), N – N’ se escribe con las otras cinco cifras.

Hallar el valor de N.

Solución

muerte del uno

A fuerza de ser primero el 1 se había hecho presuntuoso. El 2 se cansó de su arrogancia.

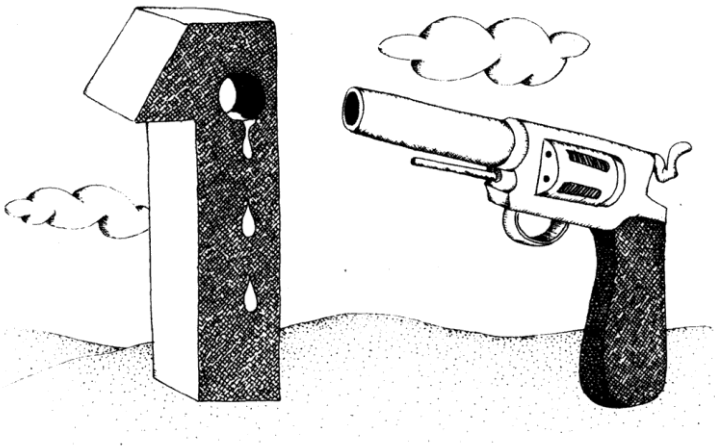
—¿Quiere usted jugar conmigo? —le preguntó.

—Con mucho gusto —dijo el uno —, puesto que ganaré.

—El juego consiste en multiplicamos.

—¿Y eso es todo? —preguntó el uno condescendiente. Entonces se multiplicaron y, como 1 × 2 es igual a 2, el 1 desapareció y el 2 fue el único que quedó.

Moraleja: Creced, si queréis, pero evitad multiplicaros.



92
un oficio peligroso

Los aficionados estiman que Pedro Ramírez, el más audaz de los toreros, tiene una posibilidad sobre dos de ser muerto en cada corrida.

Si admitimos esa estimación, ¿qué posibilidades tiene Ramírez de estar todavía vivo después de diez corridas?

Solución

93
la escandalosa velada del cumpleaños de Clovis

☺•

Este año diez sobrinos y sobrinas de Clovis Clou acudieron a su cena de cumpleaños. Clovis quería mucho a esos jóvenes, pero les reprochaba que fuesen jugadores y, algo más grave, que en general fuesen malos matemáticos. Resolvió entonces proponerles un juego que les daría una lección y que tendría además la ventaja de reembolsarle los gastos de la comida.

—Aquí tengo dos dados —dijo Clovis—. Los lanzo; el resultado puede variar de 2 (un punto cada dado) a 12 (seis puntos cada dado). Cada uno de nosotros elegirá un número comprendido entre 2 y 12 que será válido durante todo el juego. Los dados serán arrojados 360 veces en total (no importa quién los arroje). A cada tiro cada uno de los jugadores apostará 10 francos; quien tenga el número indicado por los dados recogerá las posturas. Como yo soy el mayor de todos, elegiré primero mi número.

Al terminar la velada, Clovis por supuesto era el gran ganador, en tanto que Clotaire y Cléobule eran los grandes perdedores.

¿Cuáles eran los tres números que habían elegido?

¿Qué suma aproximada ganó Clovis?

Solución

94
tres cartas para jugar

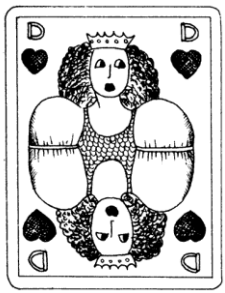
😐⚂

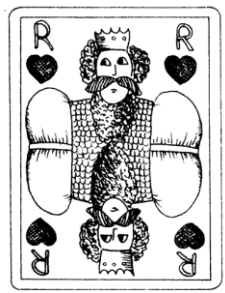
Tres jugadores, A, B, C, utilizan un juego de tres cartas. En cada una de ellas está escrito un número entero no nulo.

$$p, q, r \qquad p < q < r.$$

Se da una carta a cada jugador; cada uno recibe un número de fichas igual al número escrito sobre su carta; luego se recogen las cartas, se las mezcla, se las distribuye de nuevo y el juego continúa. Después de N distribuciones (N > 2), los jugadores A, B, C recibieron respectivamente un total de 20, 10 y 9 fichas.

Sabiendo que el jugador B recibió r fichas en el último reparto de cartas, ¿cuáles son los números p, q, r y cuáles son los diferentes repartos de cartas?





Solución

95
azarosas tribulaciones de un dominó

😐▪

Sobre un papel dividido en casillas de un centímetro de lado se trazan dos marcos, un cuadrado de 9 centímetros de lado y un rectángulo cuyos lados miden 11 y 7.

Se elige uno de esos marcos del cual se quita una de las casillas. ¿Cuál es entonces la probabilidad de poder cubrir la totalidad de las casillas restantes con dominós rectangulares de 1 × 2 centímetros?

Se gana la partida cuando se logra éxito en esta operación de cubrir. Ahora bien, ¿es mejor elegir a priori el marco cuadrado o el marco rectangular?

Solución

96
series amarillas

☹⚂

1. Traducir en otros números las series siguientes: uno - seis - cero - tres - cuatro - diecisiete - catorce.

2. ¿En qué orden están dispuestos los siguientes números?
   0 – 5 – 16 – 10 – 9 – 8 – 11 – 15 – 30 - 20

3. Hallar el quinto término de la serie:
   9 – 198 – 3.087 – 41.976 – ?

4. Hallar el quinto término de la serie sabiendo que ese término tiene ocho cifras.
   60 – 3600 – 86.400 – 604.800 – ?

5. Hallar *x* e *y*.

2	0	4
4	2	0
0	4	2

6	0	3
0	*x*	6
3	6	0

7	2	3
0	4	8
5	6	1

15	20	13
14	16	18
19	12	17

6	4	11
	y	

6. ¿Cuál es la ley de formación de la serie
   4 – 6 – 12 – 18 – 30 – 42 – 60 – 72 – 102 - ...

Soluciones

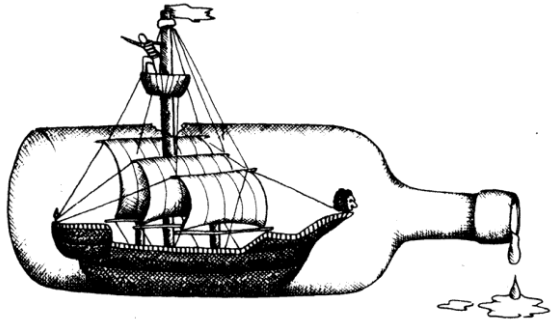
97
los transatlánticos de Édouard Lucas

☺

Edouard Lucas, conocido particularmente por su célebre colección de recreaciones matemáticas, planteó el siguiente problema en una de las sesiones de un muy grave congreso de matemáticos:

Cada día a la misma hora sale un buque de El Havre con destino a Nueva York y otro sale de Nueva York para El Havre. La travesía se lleva a cabo, en ambos sentidos, en siete días. ¿Cuántos transatlánticos en ruta opuesta encontrará uno de esos buques *en el mar*?

(La expresión "en el mar" excluye al barco que llega cuando él mismo sale y al que sale cuando él llega.)



Solución

98
el centauro trabado

😐

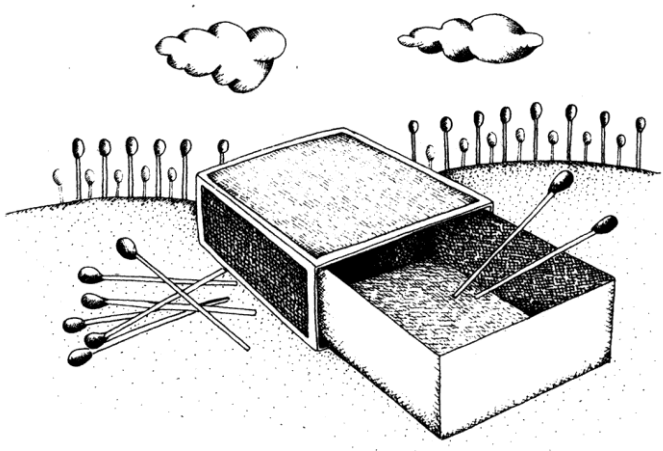
1. Escribir 100 con nueve cifras idénticas; éstas sólo podrán estar separadas por los símbolos + – × / y ( ).
2. Escribir 100 con las nueve cifras significativas empleando para separarlas tan sólo + y – (más y menos). ¿Cuántas soluciones hay?
3. Escribir de la misma manera anterior el número (–100). ¿Cuántas soluciones hay?

Soluciones

99
Juego de fósforos

☺▪

Hacer un cubo con 5 fósforos sin doblarlos ni quebrarlos.



Solución

El número 142.857 (S)

$$S \times 1 = 142.857$$
$$S \times 2 = 285.714$$
$$S \times 3 = 428.571$$
$$S \times 6 = 857.142$$

(permutación de las cifras de (S))

$$S \times 7 = 999.999$$
$$S \times 8 = 1.142.856$$
$$S \times 9 = 1.285.713$$
$$S \times 14 = 1.999.998$$

8S, 9S,..., 14S se deducen de S, 2S ..., 7S escribiendo a la cabeza del número una unidad descontada de la última cifra del número generador.

$$S \times 15 = 2.142.855$$
$$S \times 16 = 2.285.712$$

(dos unidades descontadas al fin de los números S, 2S, pasan a la cabeza).

$$S \times 22 = 3142854$$
$$S \times 23 = 3285711$$

(tres unidades descontadas al fin de los números S, 2S, ... pasan a la cabeza).

Etcétera.

El producto de S × 326.451 da una curiosa multiplicación:

$$
\begin{array}{r}
142857 \\
\times\ 326451 \\
\hline
142857 \\
714285 \\
571428 \\
857142 \\
285714 \\
428571 \\
\hline
\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet
\end{array}
$$

El número sin 8 (H)

$$
\begin{gathered}
12345679 \times 9 = 111111111 \\
12345679 \times 18 = 222222222 \\
12345679 \times 27 = 333333333 \\
\ldots \\
12345679 \times 81 = 999999999
\end{gathered}
$$

Cuando se multiplica el número 12.345.679 por una cifra prima con 9 el producto se escribe con todas las cifras significativas tomadas una sola vez, con la excepción de la cifra igual a la diferencia entre 9 y el multiplicador.

Si, por ejemplo, se toma 7 como multiplicador, el producto se escribirá con todas las cifras significativas, salvo 2 = 9 – 7.

$$12345679 \times 7 = 86419753$$

La multiplicación por 3 conduce al omnipresente número 37 [17]

$$12345679 \times 3 = 37037037$$

Agreguemos un cero a la izquierda del número H.

Todos los números obtenidos por permutación circular de este último número son múltiplos de H. Ejemplo:

[17] Sobre las particularidades de este número 37, véase *Jeux de l'esprit*, Ed. du Seuil, 1975, pág. 119.

234567901	12345679
111111111	19
00000000	

El número monstruo

526315789473684210 (M)

Para multiplicar M por una cifra n (de 2 a 9) se hace un corte después de la cifra n del número M (cuando hay dos cifras n en M, se elige la que está seguida de la cifra más pequeña). Se pasa a la derecha del número el grupo de cifras que está a la izquierda del corte y se agrega un cero.

52631578947368 / 4210 × 8 = 4210526315789473680

Si se forma un número M, transportando de una extremidad a la otra una lonja de cifras de M, M + M_1 comprende la misma sucesión de cifras que M, sólo que hay que restar una unidad que aparece a la izquierda del número cuando M + M_1 comprende una cifra más que M.

5263157894	7368 /	4210
4210526315	7894	7368
9473684210 /	5263	1578

526	315789473 /	684210
684	210526315	789473
1210 /	526315789	473683

Si se pasa el cero que está al fin de M a la cabeza del número se obtiene un nuevo número M_o (M_o = 1/10 M)

Todas las permutaciones circulares de M_0, son divisibles por M,,. Ejemplo:

631578947368421052 / 052631578947368421 = 12

El número 1.111.111.101 (N)

$$N / 9 = 123456789$$

Cuando se multiplica el número 123.456.789 por un número primo con 9, el producto se escribe con todas las cifras significativas tomadas una sola vez

$$123456789 \times 5 = 617283945$$

Cuando se utiliza el multiplicador 3 comprobamos que reaparece el número 37

$$123456789 \times 3 = 370370367$$

El número 987.654.321 (P)

$$\begin{aligned} 987654321 \times 2 &= 1975308642 \\ \times 3 &= 29 \quad 3 \\ \times 4 &= 39 \quad 4 \\ \times 5 &= 49 \quad 5 \\ \times 6 &= 59 \quad 6 \\ \times 7 &= 69 \quad 7 \\ \times 8 &= 79 \quad 8 \end{aligned}$$

Obtenemos resultados análogos permutando las cifras de P.

ALGUNAS EXPLICACIONES

Los períodos

La mayor parte de las igualdades que acabo de consignar son curiosas sólo en apariencia. En primer lugar no expresan, en la forma en que se les ha dado, propiedades intrínsecas de los números [18] y dichas igualdades sólo son exactas en la notación de base

[18] Como las de si un número es entero, racional, primo, cuadrado, etc.

10. Luego, podríamos encontrar igualdades comparables con una infinidad de números. Para comprender el mecanismo de esas combinaciones, o de algunas de ellas, conviene recordar lo que son los "períodos" de los números fraccionarios. Cuando se traduce una fracción o un número racional en número decimal pueden producirse dos casos: o bien el número racional está exactamente representado por un número decimal que comprende un número finito de cifras después de la coma —cuando el denominador de la fracción comprende solamente los factores 2 y 5— o bien, el número de cifras después de la coma es infinito; pero entonces, en todos los casos, aparece un "período" en esa serie infinita de cifras, inmediatamente, si el denominador no contiene ni el factor 2 ni el factor 5 (número impar no terminado en 5) y después de cierto número de cifras en el caso contrario.

Ejemplos:

$$\frac{3}{11} = 0{,}2727272727\ \ldots$$

$$\frac{7}{550} = \frac{7}{2 \times 5^2 \times 11} = 0{,}0127272727\ \ldots$$

Recíprocamente, todo número entero es un número periódico, es decir, a todo número entero se le puede asociar una fracción tal que el número aparezca como período en la expresión decimal de la fracción.

La fracción correspondiente al número P es $\frac{P}{9\ldots9}$ y el número de nueves del denominador es igual al número de cifras de P. Esta fracción puede ser o no ser reductible. Ejemplos:

14 es el período de 14/99
24 es el período de 24/99 = 8/33

Inversamente, a la fracción p/q corresponde el número periódico

$$P = 9\ldots9 \times p/q$$

Se comprende que P sólo puede existir si el denominador q no contiene ni el factor 2 ni el factor 5 puesto que estos dos números

no dividen a $\overline{9\ldots9}$. Esta es la confirmación de lo que se indicó antes.

En este caso, si q contiene otro factor diferente de 2 y 5, la fracción tendrá un período diferido.

Si la fracción es un inverso, 1/n, p = 9…9/n, si n es primo con 10, ello implica que P es igualmente primo con 10.

Tomemos para n un múltiplo de 9, n = a x 9, a primo con 10.

$$P = \frac{\overline{9\ldots9}}{a \times 9} = \frac{\overline{1\ldots1}}{a}$$

$$a \times P = \overline{1\ldots1}$$

$$2 \times a \times P = \overline{2\ldots2}$$

$$3 \times a \times P = \overline{3\ldots3} \quad \text{Etc.}$$

Consideremos la fracción 1/27

$$n = 27 = 3 \times 9 \qquad a = 3$$

$$1/27 = 0{,}037037\ldots$$ [19]

$$P = 037 \qquad a \times P = 3 \times 037 = 111$$

Encontramos aquí la "curiosa" propiedad del número 37.
Consideremos la fracción 1/81, n = 81 = 9 × 9, a = 9

$$1/81 = 0{,}012345679012345679\ldots$$
$$P = 012.345.679$$
$$a \times P = 9 \times 012.345.679 = 111.111.111$$

Volvemos a encontrar la "curiosa" propiedad del número sin 8.

[19] Obsérvese que "recíprocamente" 1/37 = 0,027027... También tenemos 37/27 = 1,37037037... y 27/37 = 0,729729... con 729 = 72^2.

La generación de los números terminados en 1

Todo número p, coprimo con 10 (número impar que no termine en 5) es divisor de un número terminado en 1. Y hasta es divisor de una infinidad de números. En efecto, si P divide un número Ap compuesto de p unos, divide también a todos los números constituidos por yuxtaposición de Ap, es decir, A_2p, A_3p, A_4p, etcétera.

Veamos algunos ejemplos de generación de números terminados en 1 por números primos con 10.

Acabamos de ver que 3 y 37 engendraban $A_3 = 111$ y luego A_6, A_9..., A_3p, o sea el tercio de los números en 1 (A).

11 es aún más eficaz puesto que engendra A_2, A_4, A_6, ..., A_2p, ..., o sea la mitad de los números A.

101 engendra $A_4 = 1111$, A_8, ..., A_4p, ..., o sea el cuarto de los números A.

41 engendra A_5, A_{10}, ..., A_5p, ..., o sea el quinto de los números A.

7 y 13 engendran A_6, A_{12}, ..., A_6p, ..., o sea el sexto de los números A.

239 engendra A_7, A_{14}, ..., A_7p, ..., o sea el séptimo de los números A.

73 y 137 engendran A_8, A_{16}, ...,A_8p, ..., o sea el octavo de los números A.

Etcétera.

En estas condiciones puede uno preguntarse si existen números A primos. La respuesta a esta pregunta fue dada por un matemático norteamericano, quien demostró que el número compuesto por 19 unos y el número compuesto por 23 unos eran primos (A_{19} y A_{23}). Probablemente haya otros números A primos y tal vez haya una infinidad de ellos.

Se demuestra que si *a* es el menor divisor de un número terminado en 1, el número de cifras del número más pequeño terminado en 1 múltiplo de *a* es $a - 1$, o un divisor de $a - 1$, salvo en el caso de $a = 3$.

$$3 \times 37 = 111 \text{ (tres unos)}$$

pero

7 × 15.873 = 111.111 (7 – 1 = 6 veces 1)
19 × 5.847.953.216.374.269 = 111.111.111.111.111.111 (19 – 1 = 18 veces 1)
13 × 8547 = 111.111 ([13 – 1] / 2 = 6 veces 1)

RETORNO AL"NUMERO MONSTRUO"

M × 19 = 9999999999999999990

$$M = \frac{10^{19} - 10}{19}$$

$$\frac{M}{10} = \frac{10^{18} - 1}{19} = \frac{(10^9 + 1)(10^9 - 1)}{19}$$

$$= \frac{[(10^3)^3 + 1][(10^3)^3 - 1]}{19}$$

de ahí la descomposición de M en factores primos:

$$M = 2 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 5.257 \times 333.667$$

$$37 \times 333.667 = 12.345.679$$

M es un múltiplo del número sin 8.
Por otro lado, del producto M × 19 se deduce:

$$\frac{1}{19} = \frac{M}{10^{19} - 10} = \frac{M}{10 \times 10^{18}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{18}}}$$

$$= \frac{M}{10 \times 10^{18}} \left(1 + \frac{1}{10^{18}} + \frac{1}{10^{18 \times 2}} + \cdots\right)$$

$$= 0{,}0MMM\ldots$$

M es pues el período de 1/19 (véase el párrafo anterior sobre período).
Se observa que el período de 1/19 a: (19 – 1) = 18 cifras.
Asimismo el período de 1/29 a: (29 – 1) = 28 cifras.
El período de 1/59 a: (59 – 1) = 58 cifras.

El número de 28 cifras M ’ y el número de 58 cifras M ” tienen las mismas propiedades que M.

En realidad, existe una infinidad de “monstruos” de la forma considerada, es decir, períodos de $\frac{1}{\overline{x...9}}$, $\overline{X...9}$ es primo.

Los números circulares

Los números 037, 142 857, 012 345 679, M_0 son números circulares, es decir, divisores de $10^n - 1 = \overline{9...9}$ (n cifras 9), y los números están completados por ceros a la derecha para tener n cifras.

$$037 = \frac{10^3 - 1}{27} = \frac{999}{27}$$

$$142.857 = \frac{10^6 - 1}{7} = \frac{999.999}{7}$$

$$012.345.679 = \frac{10^9 - 1}{81} = \frac{999.999.999}{81}$$

$$M_0 = \frac{10^{18} - 1}{19}$$

Una propiedad interesante de estos números, que es fácil de demostrar, es la de que sus permutaciones circulares son divisibles por ellos mismos.

Por ejemplo, 370 y 703 son divisibles por 037.

Las permutaciones circulares de S = 142.857 son divisibles por S; los cocientes sucesivos son 3, 2, 6, 4, 5.

Las permutaciones circulares de 012.345.679 son divisibles por ese número y los cocientes son los elementos de la progresión aritmética de base 10 y de razón 9, es decir 10, 19, 28, 37, ..., etc. Tenemos así la explicación de las “curiosidades” antes señaladas.

100
algunos problemas sobre los números enteros

Propongo seguidamente a los lectores aficionados a la aritmética algunos problemas sobre los números enteros. Estos problemas ofrecen dificultades muy variables. Algunos todavía no han sido resueltos.

R: Se da el resultado
NS: No se indica solución
NR: Problema no resuelto

1. Hallar un cuadrado de la forma aabb

R

Solución

2. Hallar dos números de tal condición que la suma de sus cuadrados sea un cuadrado.

R

Solución

3. Hallar un número de cuatro cifras que sea el cuadrado del número formado por sus dos últimas cifras.

R

Solución

4. Hallar un número cuadrado de seis cifras que, leído al revés, sea también un cuadrado.

R

Solución

5. Hallar tres cuadrados cuya suma sea un cuadrado.

R

Solución

6. Hallar tres cubos cuya suma sea un cubo.

R

Solución

7. Hallar un número igual a la suma de las cifras de sus cubos.

R

Solución

8. ¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede escribir con las diez cifras tomadas una vez cada una?

R

Solución

9. Hallar tres cubos cuya suma sea el número formado por las tres cifras que constituyen sus raíces cúbicas. El mismo problema reemplazando 3 por 4, 5, 6.

R

Solución

10. Hallar un número igual al cubo de la suma de sus cifras.

R

Solución

11. Hallar un número x de tal condición que la suma de los x primeros números enteros se escriba con tres cifras idénticas.

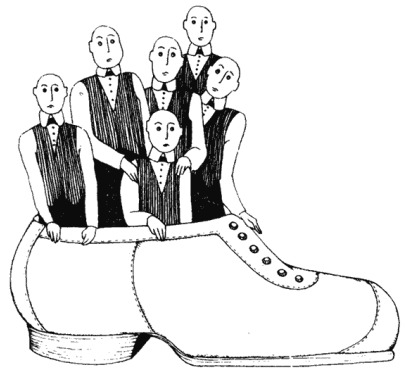
R

Solución

12. Hallar un cuadrado que se convierta en un cubo al sumársele 2.

R

Solución



13. Hallar un número de tres cifras cuyo doble sea el número de cifras de todos los números inferiores al número buscado o iguales a él.

R

Solución

14. Hallar un número de tres cifras igual a la suma de su primera cifra (comenzando por la izquierda), del cuadrado de la segunda cifra y del cubo de la tercera.

R

Solución

15. Hallar tres números enteros cuyos cubos estén compuestos de las mismas cifras permutadas.

R

Solución

16. Hallar parejas de números cuyos cuadrados (y eventualmente otras potencias) estén compuestos de las mismas cifras permutadas.

R

Solución

17. Hallar números tales que cuando se permutan sus cifras sus cuadrados se deduzcan igualmente los unos de los otros por permutación de cifras.

R

18. Hallar cuadrados formados por las mismas cifras permutadas.

R

Solución

19. ¿Existen cuadrados escritos con una sola cifra repetida varias veces?

R

Solución

20. ¿Puede ser cuadrado un número formado con las nueve cifras significativas (en un orden cualquiera)?

R

Solución

21. Hallar dos números consecutivos de tal condición que la suma de sus cuadrados sea una potencia 4.

R

Solución

22. Cuando se forma un número escribiendo la serie de números enteros sucesivos 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ..., ¿se puede llegar a un número que sea un cuadrado?

Este problema, planteado por el matemático H. Tarry en 1897, no parece haber encontrado solución. Todas las pruebas intentadas fueron negativas.

NR

23. Hallar un número $\overline{abc}$ de modo que $\overline{abc} - \overline{cba}$ esté formado por las tres cifras a, b, c.

R

Solución

24. Hallar, entre los 10 000 primeros números, números que puedan escribirse en un sistema de numeración con tres cifras idénticas y en otro sistema de numeración con otras tres cifras idénticas.

R

Solución

25. Dado un número n de cuatro cifras a lo sumo, no todas iguales, se designa como n' la diferencia entre el número obtenido al colocar las cifras de n por orden decreciente y el número obtenido al colocar las cifras de n en orden creciente.

Luego n''''''' (o n_7) es igual a 6.174 cualquiera que sea n. Además (6.174)' = 6.174.

NS

26. Sea A la suma de las cifras del número 4444^{4444} y sea B la suma de las cifras del número A.

Hallar la suma de las cifras del número B.

XVII^e Olympiades de mathématiques, Burgas (Bulgaria), 1975.

R

Solución

27. Hallar un número tal que su cubo termine en el mismo número.

R

Solución

28. Existen números G cuyo cociente por otro número se obtiene suprimiendo en G la cifra de la izquierda o las dos primeras cifras de la izquierda (ejemplo 84 / 21 = 4).

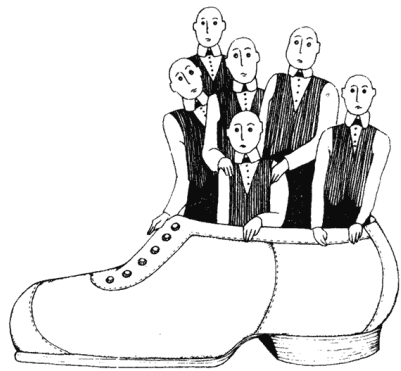
El cociente obtenido es a veces él mismo un número G (ejemplo, 625 / 25 = 25; 25 / 5 = 5).

Hallar un número partiendo del cual se puedan obtener cuatro cocientes sucesivos que sean números G.

R

Solución

29. Hallar el menor triplete de números enteros tales que el mayor sea múltiplo del menor y que sus tres cuadrados estén en progresión aritmética.



R

Solución

30. Hallar el menor número que tenga cien divisores (incluso él mismo y la unidad).

R

Solución

31. ¿Cuál es el múltiplo más pequeño de 13 que, dividido sucesivamente por los números que van de 2 a 12 inclusive, dé siempre 1 como resto?

R

Solución

32. ¿Cuál es la suma de las cifras necesarias para escribir todos los números de 1 a 1000 millones?

R

Solución

33. ¿Existe una infinidad de números primos de la forma $n^2 + 1$?

NR

34. Se llama *número perfecto* al número igual a la suma de sus divisores (comprendido el 1)

Actualmente se conocen 24 números perfectos: 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 +2 + 4 + 7 + 14; 496, 8128, 33 550 336, ..., $2^{19936} \times (2^{19937} - 1)$. Este último número tiene 12.003 cifras.

Los 24 números perfectos son pares. Se pregunta: ¿existe un número perfecto impar?

La cuestión todavía no ha sido resuelta, pero el matemático Bryant Tuckerman demostró que si existiera semejante número sería superior a 10^{36}.

NR

35. Se llama *número casi perfecto* a un número igual a la suma de sus divisores más 1 o menos 1.

Hallar una familia de una infinidad de números casi perfectos del primer tipo (+1).

R

Solución

36. Hallar un *número casi perfecto* del segundo tipo (–1).

NR

37. Se llaman *números amistosos o amigables* al par de números tales que cada uno sea la suma de los divisores del otro (incluso el 1). La pareja más pequeña, 220 y 284, ya era conocida por los

pitagóricos. Hoy se conocen más de mil parejas de números amigables; en cada una de esas parejas, los dos números son de la misma paridad: los dos pares o los dos impares.

La cuestión es ésta: ¿existe una pareja de números amigables en la cual los dos números sean de paridades diferentes?

NR

101
el banquete de los 41

En un banquete hay 41 personas, hombres, mujeres y niños, que gastan en total 40 dracmas, pero cada hombre paga 4 dracmas, cada mujer 3 dracmas y cada niño 4 denarios (en un dracma entran 12 denarios). Pregunto: ¿cuántos hombres hay, cuántas mujeres y cuántos niños?

Solución

102
mil dracmas en total

☺•

Un grupo de hombres, algunos acompañados por sus mujeres, gastó 1.000 dracmas en una hostería. El gasto fue de 19 dracmas cada hombre y de 13 dracmas por cada mujer. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había?

Solución

103
las siete opciones de Thomas

😐•

Thomas dispone de una cantidad de escudos que le permite comprar (utilizando cada vez la totalidad de la suma): o bien sólo caballos a 31 escudos cada uno; o bien sólo bueyes a 19 escudos cada uno; o bien caballos y bueyes a la vez y esta operación puede realizarse de conformidad con cinco distribuciones diferentes y sólo cinco.

¿Cuál es la suma de que dispone Thomas?

Solución

104
problema de los tres objetos

😐▪

Ciertos problemas presentan una solución tan sencilla que después de haberla hallado uno se olvida con frecuencia de que esa solución puede no ser la única posible. Como ejemplo veamos un viejo problema, el de los "tres objetos.

Un comprador dispone de la suma de 6.279 dracmas y entra en un negocio donde se exponen objetos de tres clases. Los objetos de una clase son, desde luego, de un mismo precio y ese precio es un número entero de dracmas. Los objetos de diferentes clases tienen precios diferentes. Gastando exactamente la suma que posee, el comprador puede procurarse un mismo número de objetos de cada una de las tres clases o bien puede dedicar su compra a una sola clase de objetos, cualquiera de ellos.

¿Cuáles son los precios de los objetos?

Solución

105
la cifra 552.715esima

☺☐

El matemático Fourrey planteó el siguiente problema: si se escriben seguidamente en su orden natural y comenzando por el 1 los números enteros, ¿cuál será la cifra 552.715esima de la lista?

Solución

106
el ferrocarril planeado con ruleta (rusa)

😐•

Cuando el gobierno ruso encargó a los jóvenes ingenieros franceses Lamé y Clapeyron la construcción de los primeros ferrocarriles del país, aquéllos tuvieron que resolver el siguiente problema: habiendo centros de producción A_1, A_2, etc. se quiere establecer en el interior del menor polígono convexo, que contiene a esos centros, un centro de tráfico al cual vayan a parar las mercancías procedentes de A_1, A_2, etc. para ser luego distribuidas por una vía férrea destinada a pasar por ese centro de tráfico, el cual debe ser elegido de manera que resulta mínimo el precio total del transporte, es decir, la suma de los productos de las distancias que los separan de A_1, A_2, etc. por las cargas p_1, p_2, etc. que provee cada centro de producción.

Lamé y Clapeyron resolvieron este problema sin hacer cálculos, valiéndose de un plano de la región sobre el cual montaron un dispositivo mecánico muy simple.

¿Puede usted reconstruir ese dispositivo?

Solución

107
las trece cajas de Alí Babá

☹🎲

El rey de Ibalaba, que se llamaba Alí Babá, quiso recompensar a los 728 hombres de su ejército y a tal fin los hizo formar en fila por orden de mérito creciente.

—El primero —dijo el rey— obtendrá 3 escudos, el segundo 5, el tercero 7 y así sucesivamente, de modo que cada soldado recibirá dos escudos más que el anterior.

—Las harás distribuir muy exactamente en trece cajas. Se pide al lector que diga, sin hacer otros cálculos que el de una descomposición en factores primos —y sobre todo sin hacer una división por 13— si la orden de Alí Babá era ejecutable.

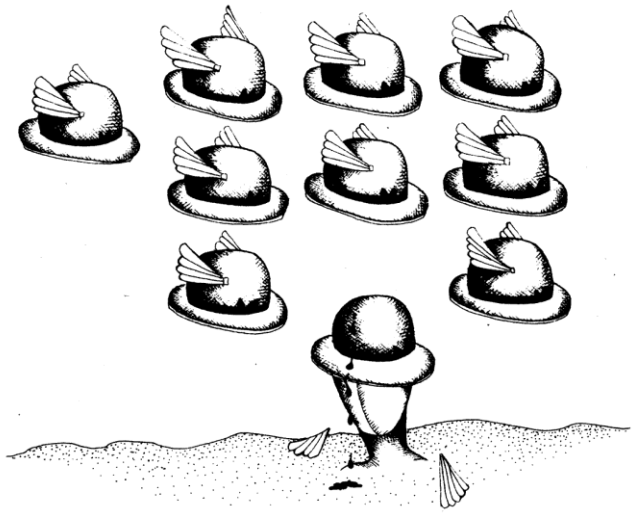
Luego ordenó a su tesorero Alá Bilá que hiciera transportar las monedas de oro necesarias para llevar a cabo esa distribución.

Solución

108
el problema de los diez sombreros

☹⚂

Diez viajeros entran en un restaurante y entregan sus diez sombreros a la mujer encargada del guardarropa. Cuando los caballeros salen, aquella señora poco concienzuda les entrega los sombreros al azar; los viajeros comieron y bebieron tan bien que no se dan cuenta de esta negligencia. ¿Qué probabilidad hay de que ninguno de los viajeros reciba su sombrero?



Solución

109
el teorema de Fermat

Cuando murió Fermat y quedó cerrada la puerta de su panteón, el rey, que era fanático de la aritmética hasta el punto de que alrededor del ombligo llevaba escrito el número de oro, el rey, pues, hizo comparecer a su presencia al sublime teorema del maestro.

—Señor —dijo el rey—, quiero hacerte duque y par.

—Majestad —respondió el teorema—, preferiría ser impar, pues mi padre no apreciaba los pares, por la razón de que no son primos.

—Y a mí —dijo el rey— no me gustan nada los impares, pues esos impertinentes hacen a veces de impar *imperator*, lo que me perjudica. ¡Serás, pues, par!

—Entonces quiero ser el primero de los pares, que es el único par primero, es decir, el dos par.

—¿Dos pares de qué? —preguntó el rey—.

—Dos, bueno... dos pares de medios unos.

—¿Dos pares de medios unos? Eso hace dos hunos y yo no tengo ninguno.

—Entonces hacedme tres.

—No puedo —dijo el rey— pues Troyes [20] está en Champagne y tú eres de Lomagne. Señor Teorema, serás par o no serás nada. Después de todo soy muy bueno cuando te ofrezco un título, siendo así que tal vez tú no eres bueno.

—¿Qué queréis decir con eso, señor? —exclamó el receloso teorema.

—Quiero decir que tal vez tú seas falso. En ese caso terminarías remando en mis galeras como todos los falsarios.

Después de hablar de esta manera, el rey pidió su gran calculador de bolas que le había regalado para su cumpleaños Hua-Ko-

[20] Que se pronuncia como *trois*, tres. (N. del T.)

Pin, emperador de China. El rey manejaba este asombroso instrumento de la manera más hábil del mundo y en pocos segundos realizaba operaciones de una increíble complicación, tales como adiciones, sustracciones, divisiones, acusaciones, adquisiciones, alienaciones, altercaciones, computaciones, calcinaciones, circuncisiones, concusiones, confiscaciones, deyecciones, devastaciones, decapitaciones, lapidaciones, divagaciones, flagelaciones, fornicaciones, inquisiciones, malversaciones, persecuciones, prevaricaciones, profanaciones, purgaciones, poluciones, reclusiones, repudiaciones, expoliaciones, sumersiones, torrefacciones, usurpaciones, vindicaciones, trisecciones y otras abominaciones en virtud de un método de derivación, de integración y de fumigación de las ecuaciones en el cual las poblaciones veían la explicación de la elevación del rey.

En unos segundos, pues, el rey trazó los signos que consigno a renglón seguido:

Y desde entonces, por obra del accidente de un extravagante exponente, rema en un trirreme sin tregua el pálido teorema.

Pregunta: ¿Puede usted en diez segundos decidir con certeza si el teorema fue injustamente condenado o, dicho de otra manera, si el rey cometió un error de cálculo?

Solución

Soluciones

Saltear las soluciones →

1. El arcabuz del presidente

La descomposición de 636.724 en factores primos da:

$$636.724 = 2 \times 2 \times 11 \times 29 \times 499$$

El día del mes, último día de un mes, no puede ser sino el 29. La visita se realizó pues en 1976, único año bisiesto del comienzo del período de mandato de siete años.

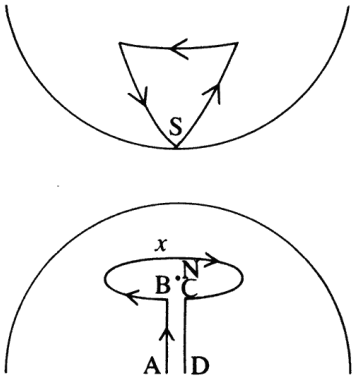
La edad del duque puede ser 2×11 o $2 \times 2 \times 11$.

En el primer caso, la diferencia de fechas sería $2 \times 499 = 998$ y la batalla habría tenido lugar en $1976 - 998 = 978$. Pero en esa época el arcabuz todavía no existía. Hay que adoptar pues el segundo caso. La batalla tuvo lugar en $1976 - 499 = 1477$. Se trata de la batalla de Nancy (perdida por Carlos el Temerario que pereció en el combate a los 44 años de edad). De manera que se trata de la ciudad de Nancy.

Volver

2. El pingüino sedentario

La primera solución que se nos ocurre es la de que el pingüino se encuentra en el polo sur. El explorador habrá recorrido 10 kilómetros según un meridiano, 10 kilómetros a lo largo de un paralelo, diez kilómetros a lo largo de un meridiano y así habrá regresado al punto de partida.



Desgraciadamente la zoología nos enseña que la Antártida no está poblada por pingüinos, sino que allí viven sus primos, los pájaros bobos. Debemos pues dirigimos resueltamente al polo norte. El esquema indica la solución:

N es el polo norte. El explorador parte de A, llega a B, sigue el paralelo BXCB y vuelve a tomar el meridiano BA. El trayecto recorrido según el paralelo es de diez kilómetros.

Luego $\mathrm{NB} = \frac{10\ \mathrm{km}}{2\pi} = 1{,}592$ km aproximadamente.

$\mathrm{NA} = \mathrm{NB} + \mathrm{BA} = 1{,}592 + 10 = 11{,}592$ km aproximadamente.

Pero hay otras soluciones y hasta una infinidad de ellas, pues el explorador al dirigirse hacia el oeste puede haber recorrido varias veces el paralelo, digamos, *n* veces. Entonces

$$\mathrm{NB} = \frac{10\ \mathrm{km}}{n \times 2\pi} = \frac{1{,}592\ \mathrm{km}}{n} \quad \text{y} \quad \mathrm{NA} = 10 + \frac{1{,}592\ \mathrm{km}}{n}$$

(*n* es un entero cualquiera).

Todo cuanto puede decirse es, pues, que el pingüino se encuentra a una distancia del polo norte comprendida entre 10 y 11,592 kilómetros.

Volver

3. El croquet y los dos universitarios

Sean A,*a* y B,*b* las edades y los números de las casas de los profesores Arnolfe y Boussardon. Puesto que Arnolfe ocupa la casa individual vecina de la de Boussardon, $a = b + 2$ (B > A, luego $a > b$)

$$A\,(b + 2) = B\,b$$
$$2\,A = b\,(B - A)$$

Amolfe tiene menos de 50 años y Boussardon más de 70. Luego B – A > 20 y $b < 2A/20$ o $A/10$
A es inferior a 50

$$\text{luego } b < 50/10 = 5$$

como *b* es par no puede ser sino 4 o 2. Pero 2 queda excluido pues Boussardon tiene un vecino a la izquierda (Corcoran), de modo que su casa no es la primera de la calle.

$b = 4$ y $a = 6$

$2\,A = 4\,(B - A)$	
$3\,A = 2\,B$	2 divide A
$B > 70$	luego A > 46
$50 > A > 46$	

Como A es par, sólo puede ser 48. Entonces $B = \frac{3}{2}48 = 72$

Arnolfe tiene 48 años y Boussardon 72.

$$48 \times 6 = 72 \times 4$$

Volver

4. Batalla naval

1) ABC = 30°. En efecto, la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC (rumbo de la fragata) es el doble del lado menor del ángulo recto AC (rumbo del carguero).

2) Tracemos XY, paralela a BA. Cuando la fragata está en X el buque de carga está en Y, pues BX = 2AY.

$$\mathrm{BX} = \frac{\mathrm{BD}}{\cos \widehat{\mathrm{ABC}}} = \frac{10 - 8{,}263}{\cos 30°} = \frac{1{,}732}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2 \times 1{,}732}{1{,}732\ldots} = 2 \text{ millas aproximadamente.}$$

Volver

5. Cómo un trocito de carbón plantea problemas

Cléopâtre debe subir en el último vagón. Como el tren aumenta progresivamente su velocidad al salir de la estación, el vagón de cola entrará en el túnel más rápidamente que el vagón de adelante y, por lo tanto, permanecerá menos tiempo en el túnel.

Volver

6. El tanque bígamo

La relación de las densidades del agua y del segundo líquido es:

$$\frac{69-1}{6-1}=13{,}6$$

El segundo líquido es pues mercurio.

Volver

7. Vértigo aritmético

9^{9^9} ,o, para evitar toda ambigüedad, $9^{(9^9)} = A$

$\log A = 9^9 \quad \log 9\ 9^9 = 387.420.489\ \log 9 = 0,954\ 24...$

$9^9 \times \log 9 = 369.692.000$ aproximadamente (las tablas logarítmicas de cinco decimales no permiten alcanzar mayor precisión). El número de cifras de A es igual a la parte entera de su logaritmo más uno. De modo que aproximadamente es de

369.692.000 cifras

En escritura manuscrita corriente ese número de cifras tendría de 800 a 900 kilómetros de longitud y, suponiendo que se lo escribiera a la velocidad de una cifra por segundo, dicho trabajo exigiría unos 11 años (aproximadamente).

Volver

8. La cohorte beoda

Sea n el número de hombres por línea o columna de cuadrado.

En la nueva formación, uno de los rectángulos contiene más filas y 36 hombres más que el otro. 36 representa pues una o varias filas y es por lo tanto múltiplo de n.

n es superior a 6 pues n^2 es superior a 36.

$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ tiene (como divisores superiores a 6): 9, 12, 18 y 36.

Si $n = 9$, el rectángulo mayor debe tener $36/9 = 4$ filas más que el menor. Pero 9 no puede dividirse en dos números cuya diferencia sea 4.

Un razonamiento semejante nos lleva a rechazar igualmente las hipótesis $n = 12$ y $n = 36$.

Luego $n = 18$. La cohorte beocia tiene $18^2 = 324$ hombres.

Volver

9. El marqués de Touchemoulin recluta hombres

Sea X los efectivos queridos por el marqués.

Réo y Mur reclutaron $\frac{7}{20}x + \frac{2}{5}\left(\frac{7}{20}x\right) = \frac{49x}{100}$.

Como el número de hombres reclutados es evidentemente entero y como 49 es primo con 100, *x* es múltiplo de 100.

$x = n \times 100$.

El número de hombres reclutados es $\frac{49 \times n \times 100}{100} = 49n$ e inferior a 50.

Luego $n = 1$ $\quad\quad$ $x = 100$

Volver

10. Los Clou van a la feria

Sea x el número de objetos comprados por uno de los hombres y sea a el número de objetos comprados por su mujer.

$$x^2 - a^2 = 63$$

$$(x + a)\,(x - a) = 1 \times 3 \times 3 \times 7$$

Hay tres maneras de descomponer 63 en un producto de 2 factores.

$63 = 1 \times 63$	$(x + a) = 63$	$(x - a) = 1$	$x = 32$	$a = 31$
$63 = 3 \times 21$	$(x + a) = 21$	$(x - a) = 3$	$x = 12$	$a = 9$
$63 = 9 \times 7$	$(x + a) = 9$	$(x - a) = 1$	$x = 8$	$a = 1$

Entre los seis números encontrados sólo hay dos (el 12 y el 1) cuya diferencia sea 11.

Clodomir compró pues 12 objetos (y su mujer nueve), Marthe compró un objeto (y su marido 8).

Existe una sola pareja de números x, a de índole tal que $(x - a) = 23$.

$$x = 32 \qquad a = 9$$

De manera que Clotaire compró 32 objetos y Madeleine 9.

Clotaire -	? ,	Clodomir -	Madeleine ,	? -	Marthe
32	31	12	9	8	1

Las parejas son Clotaire-Martine; Clodomir-Madeleine; Cléobule-Marthe.

Volver

11. Dramáticas permutaciones en la familia Clou

Sean x e y los números de objetos comprados por dos cónyuges.

$$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y) = 325 = 1 \times 5 \times 5 \times 13$$

$(x + y)\,(x - y)$ no puede ser sino $325 \times 1{,}65 \times 5$ o 25×13
Estas tres combinaciones posibles dan:

$x = 163$	$y = 162$
$x = 35$	$y = 30$
$x = 19$	$y = 6$

Fue Martine quien gastó más. Fue ella pues la que compró 163 objetos en tanto que su marido compró 162. Como Clodomir fue quien gastó más después de Martine es el marido de ésta.

Cléobule compró 13 objetos más que Marthe.

$$19 - 6 = 13$$

De manera que Cléobule es el marido de Marthe, Clodomir el de Martine y, por lo tanto, Clotaire el de Madeleine.

De suerte que Clodomir y Clotaire intercambiaron sus mujeres o, si se prefiere, Madeleine y Martine intercambiaron a sus maridos.

Volver

12. Clotaire es insaciable

Sea S la suma pedida por Clotaire $10.000 < S < 20.000$

$$S = M_o\, l2 + 7 = M_o\, l3 + 8 \qquad S \text{ es impar}$$

$$S + 5 = M_o\, 12 = M_o\, 13 = M_o\, 12 \times 13 = M_o\, 156 = 156\ A$$

$$64 < A \leq 128$$

$$156\ A = (11 \times 14 + 2)\ A = M_o\, 11 + 10$$

$$2\ A - 10 = M_o\, 11$$

$$A - 5 = M_o\, 11 \quad A = M_o\, 11 + 5.$$

De la misma manera se establecerá que $A = M_o\, 7 + 2$

Entre 64 y 128 hay 6 múltiplos de 11: 66, 77, 88, 99, 110 y 121; y 88 es el único que responde a la cuestión. $A = 88 + 5 = 93$ que es $M_o\, 7 + 2$.

$$A = 93 \qquad S + 5 = 156 \times 93 = 14.508 \qquad S = 14\,503$$

*

Sea T la suma propuesta por Clovis $T < 10\,000$

$$T + 3 = M_o\, 7 = M_o\, 13 = M_o\, 7 \times 13 = M_o\, 91$$

$T = M_o\, 5 + 3$ termina en 3 u 8 y $T + 3$ termina en 6 o 1.

En el primer caso, la suma de las cifras de $T + 3$ es superior en 3 a la suma de las cifras de T y por lo tanto igual a $24 + 3 = 27$.

En el segundo caso, la suma de las cifras de $T + 3$ es inferior en 6 a la suma de T (7 unidades menos y una decena más) y, por lo tanto, igual a $24 - 6 = 18$

En los dos casos, $T + 3$ es divisible por 9

$$T + 3 = M_o\, 91 \times 9 = M_o\, 819 = 819\ B$$

$$T + 3 < 10.003 \qquad B \leq 12$$

puesto que 819 B termina en 1 o en 6, B = 4 o 9.

$$B = 4 \quad T + 3 = 819 \times 4 = 3.276 \qquad T = 3.273$$

B = 9 T + 3 = 819 × 9 = 7.371 T = 7.368

Sólo el último valor de T ofrece una suma de cifras igual a 24.

Luego T = 7.368

Volver

13. Las velas sabáticas

El número total de horas de bujías consumidas es:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ese número es también $4n$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 4n$$

$$n = 7$$

Volver

14. En un camino de la Lozère

P A_1 A_2 Q

Cuando se cruzan por primera vez en A_1, los ómnibus recorrieron entre los dos la distancia PQ.

Cuando llegan a su destino recorrieron entre los dos, dos veces la distancia PQ.

Cuando se cruzan por segunda vez, en A_2, recorrieron, siempre entre los dos, tres veces la distancia PQ, es decir, tres veces la distancia que habían recorrido cuando se encontraron por primera vez. Los ómnibus, habiendo marchado durante el mismo tiempo (con paradas de la misma duración) recorrieron, cada uno, tres veces más kilómetros en el momento de su segundo encuentro que en el momento del primero. Cuando se cruzaron por primera vez, el ómnibus más lento había cubierto 28,8 kilómetros.

En el segundo encuentro ese ómnibus recorrió pues $28{,}8 \times 3 = 86{,}4$. Ahora bien, el recorrido PQ A_2 = PQ = QA_2 = PQ + 14,4 luego 86,4 = PQ + 14,4

$$PQ = 72$$

Lo que desgraciadamente nunca sabremos es cuál de los dos ómnibus, el de Mende o el de Alés, marchaba más rápidamente.

Volver

15. Las meriendas de la señora Minouflet

El camarada de Arsène recibió tantos pastelitos como niños había ordinariamente, puesto que la parte que correspondía a cada uno quedó disminuida en 1 unidad. Ese día Arsène recibe la misma parte que su compañero.

Cuando Arsène y su camarada están ausentes los niños restantes, al repartirse los pastelillos que habrían correspondido a los ausentes, reciben cada uno 3 pastelillos más.

De manera que las partes de Arsène y de su amigo, iguales a dos veces el número ordinario de niños, son también iguales al número ordinario de niños disminuido en uno y multiplicado por tres.

El número buscado es de tal índole que su producto por 2 es igual a sí mismo menos 1 multiplicado por 3, es decir, a su producto por tres menos tres. De manera que el número es 3.

La señora Minouflet tiene tres nietos.

La primera proposición enunciada antes muestra que el número de pastelillos es:

$$3 \times (3 + 1) = 12$$

Volver

16. Babou y sus babuinos

Sea x el número total de babuinos que Babou recibió en aquel día.

Los 2/5 x han muerto y ese número es igual a 8 (8 cumpleaños necesarios para llenar este vacío).

$$2/5\ x = 8 \qquad x = 20$$

Babou recibió 20 babuinos de los cuales 19 representan regalos de cumpleaños; Babou tiene, pues, 19 años.

Pero este razonamiento no es el conveniente, pues no permite determinar la fecha exacta del cumpleaños.

Los hechos se desarrollan "algunos meses" después de noviembre de 1979, por lo tanto, en 1980, año bisiesto. Supongamos que el cumpleaños de Babou sea el 29 de febrero de 1980. En los próximos ocho años, Babou habrá de celebrar dos cumpleaños y por lo tanto recibirá dos babuinos.

$$2/5\ x = 2 \qquad x = 5$$

Babou tuvo cuatro cumpleaños; luego tiene 16 años.

Volver

17. Un crédito singular

Sea A la suma prestada. No es difícil demostrar que al terminar el año *n* el reembolso R*n* será $\frac{A}{n(n+1)}$ y la deuda restante A*n* será $\frac{A}{n+1}$.

Sin hacer esta demostración se puede establecer mediante un cálculo simple la siguiente tabla:

n	***Rn***	***An***
1	A/2	A/2
2	A/6	A/3
3	A/12	A/4
…	…	…
9	A/90	A/10

A/10 es la suma que hay que devolver al terminar el décimo año.

Como todos los reembolsos son números enteros de francos, según el enunciado, A deberá ser divisible por los denominadores de R_n, es decir, por 2, 6, 12, ..., 90, es decir, por $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2.520$.

$$A = 2.520 \times K;\ \ K \text{ es número entero}$$

Puesto que el ultimo reembolso, A/10 es inferior a 300 francos, $A < 3.000$

$$K = 1 \qquad A = 2.520$$

Volver

18. La falla del tenedor de libros de la fábrica Clou

Un número N cualquiera es igual a un múltiplo de 9 más la suma de sus cifras (carácter de divisibilidad por 9).

Si se invierten las cifras de N se obtiene un número N' que es también igual a un múltiplo de 9 más la suma de sus cifras (las mismas que las de N). Síguese de ello que N – N' es un múltiplo de N.

Como 54 es múltiplo de 9, puede presumirse que el error del tenedor de libros consiste en una inversión de cifras.

Ejemplo: 682 – 628 = 54

Volver

19. Ardientes bailarinas

El número de damas es igual al número de caballeros menos seis. Es pues

$$\frac{42-6}{2}=18$$

Volver

20. Desconcertante viaje a Londres

240 francos es el monto de las compras realizadas por cada uno y es también el precio del pasaje de avión (ida o vuelta).

Si los viajeros eran seis a la ida y cuatro a la vuelta, como parece desprenderse del enunciado, el gasto total sería:

$$10 \text{ pasajes} + 10 \text{ gastos} = 2.400$$

$$\text{pasaje} + \text{gasto} = 240$$

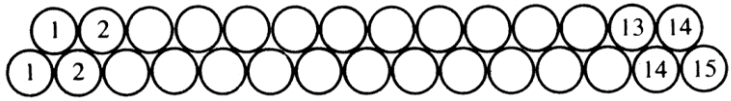
lo cual es contrario al enunciado.

$$2.400 = 240 \times 10 = 240 \times (4 + 4 + 2)$$

de ahí la solución. Los viajeros son cuatro: la mujer de André es la hija de Baptiste y la ahijada de Charles.

Volver

21. Bombardas y pirámides



La primera capa de balas contenía 15 balas por lado, es decir, 15^2; la segunda capa, 14 por lado, esto es, 14^2, etc.

El número buscado es pues $15^2 + 14^2 + \ ... \ + 1^2$.

Una fórmula clásica de la suma de los cuadrados de los *n* primeros números enteros:

$$\sum_1^n p^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad [21]$$

Aplicando esta fórmula a nuestro caso particular obtenemos 1.240.

Volver

[21] Los lectores que no conozcan esta fórmula podrán establecerla fácilmente partiendo de la identidad $(p + 1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$. Basta con dar a *p* los valores sucesivos de 0 a *n*, escribir las igualdades obtenidas unas debajo de las otras y sumar miembro por miembro.

22. El bólido y los tres mojones

$$\overline{BA} - \overline{AB} = \overline{AOB} - \overline{BA}$$

$$10B + A - 10A - B = 100A + B - 10B - A$$

$$6\,A = B$$

A, diferente de 0 no puede ser sino 1.

$$B = 6$$

Los números que llevan los mojones son: 16, 61, 106.
Velocidad del bólido: 45 kilómetros por hora.

Volver

23. Cuidado con las ovejas

Sea n el número de ovejas. El precio del rebaño es:

$$n \times n = n^2$$

El número de monedas de 10 francos recibidas es impar puesto que los dos hermanos no pudieron repartírselas igualmente. Sea $2p + 1$ el número de esas monedas y sea a el pico.

$$n^2 = (2p + 1) \times 10 + a \qquad a < 10$$

n^2 comprende pues un número impar de decenas.
n puede expresarse de esta forma

$$n = x \times 10 + y \qquad \text{con } y < 10$$

$$n^2 = x^2 \times 100 + 2x \times 10 \times y + y^2 = 2 \times 10\,(5x^2 + xy) + y^2$$

Puesto que n^2 cuenta un número impar de decenas, lo mismo ha de ocurrir con y^2. Ahora bien, los únicos cuadrados de un número inferior a 10 en decenas impares son 16 y 36.

En todos los casos, el número de unidades de n^2 es 6.

$$a = 6$$

El hermano mayor había tomado $(10 - 6) = 4$ francos más que el hermano menor. Para igualar las partes, le da dos monedas de 1 franco.

Volver

24. Victoria de Zenobia

Cuando las dos caravanas se cruzan, los palmirenses recorrieron los 3/5 de la distancia que hay entre Palmira y Petra, y los nabateos recorrieron los 2/5 de esa distancia. De manera que la velocidad de los nabateos es los 2/3 de la de los palmirenses. Para cubrir los 2/5 de la distancia restante, los palmirenses marchan durante 8 días. Para efectuar la totalidad del viaje necesitan pues $(8\times5)/2 = 20$ días.

Los nabateos, cuya velocidad es menor, tardarán $20/(2/3) = 30$ días, es decir, 10 días más.

Volver

25. Un cuadrado de abetos en número redondo

Sean n y n’ el número anterior y el nuevo número de abetos por línea o hilera. '

$$n'^2 - n^2 = 1.351$$

$$(n' + n)\,(n' - n) = 1 \times 7 \times 193$$

Dos soluciones:

$$1)\ n' + n = 7.193 = 1.351$$

$$n' - n = 1$$

Luego

$$n' = 676 \quad \text{y} \quad n = 675$$

Pero 675 abetos plantados a 1 metro de distancia formarían el lado de un cuadrado de más de una hectárea

$$2)\ n' + n = 193$$

$$n' - n = 7$$

Luego

$$n' = 100 \quad \text{y} \quad n = 93$$

n'^2 = 10.000. Paul París posee un número *redondo* de abetos: 10.000. Si plantó los árboles a 50 centímetros de las cercas, como es lo reglamentario, la nueva plantación de abetos cubre exactamente una hectárea. El terreno de Paul es pues cuadrado.

Volver

26. ¿Quién hizo más camino, Lí o Alí?

Sean x_1, x_2, x_3 los trayectos recorridos por Li los días primero, segundo y tercero.
Los trayectos correspondientes de Alí son:

$$\frac{9}{11}x_1 \quad \frac{11}{9}x_2 \quad \frac{33}{31}x_3$$

y la suma de los trayectos diarios es:

$$\frac{20}{11}x_1 \quad \frac{20}{9}x_2 \quad \frac{64}{31}x_3$$

Cada día estas sumas disminuyen un 20%:

$$\frac{20}{11}x_1 = \frac{10}{8}\,\frac{20}{9}x_2 = \left(\frac{10}{8}\right)^2\,\frac{64}{31}x_3$$

Luego:

$$x_2 = x_1\frac{36}{55} \qquad x_3 = x_1\frac{31}{55}$$

El trayecto total de Li es:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1\frac{122}{55}$$

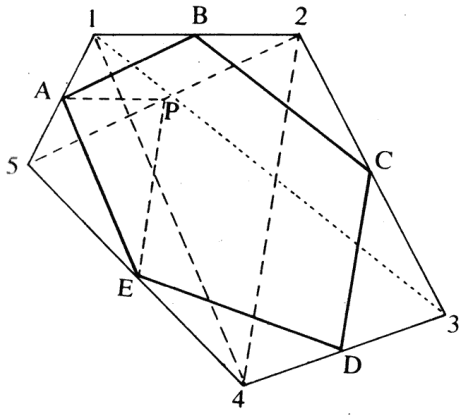
El trayecto total de Alí es:

$$\frac{9}{11}x_1 + \frac{11}{9}x_2 + \frac{33}{31}x_3 = x_1\,\frac{122}{55}$$

Li y Alí cubrieron el mismo trayecto total.

Volver

27. El pentágono de Sin Pan



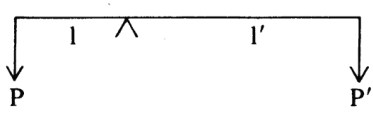
Sean A, B, C, D, E, los cinco mojones. Tracemos EP equivalente a DC. Si 1, 2, 3, 4, 5 son los vértices del pentágono buscado, los dos triángulos AEP y 142 son homotéticos, y el centro de homotecia es 5 en tanto que la relación es 2. De B se traza una paralela a AP a la cual se lleva B1 = B2 = AP.

De 1 y 2 se trazan las paralelas a AE y PE que se cortan en cuatro. Se traza 2P y se la prolonga una longitud igual; se obtiene 5. De 1 se traza una paralela a BC sobre la cual se lleva 13 = 2BC.

(Lionnet y Proulet demostraron en 1844 que cualquier polígono de un número impar de lados podía construirse si se conocían los puntos medios de los lados.)

Volver

28. El comercio fraudulento del señor Yang



A el equilibrio, P l = P'l'

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} = \frac{l'}{l}$$

La relación de los pesos al equilibrarse es siempre la misma. En la compra, el peso recibido por el señor Yang en el platillo A, cuando él colocó 1.000 gramos sobre el platillo A' de su balanza es 1.100 gramos.

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} = \frac{1.100}{1.000} = \frac{11}{10}$$

En la venta, el señor Yang pone esos 1.100 gramos en el platillo A', y el peso facturado al cliente es 1.100 × 11/10 = 1.210 gramos.

Sea x el precio facturado al señor Yang por 1.000 gramos de mercadería y sea y el precio de venta facturado por el señor Yang por 1000 gramos

$$y = \frac{3}{2}\,x$$

Cuando el señor Yang desembolsa x debería normalmente recibir y y su beneficio lícito sería $y - x = 0{,}5\,x$

En realidad, el señor Yang recibe 1.210/1.000 y, y su beneficio es de

$$\frac{1.210}{1.000}y - x = \frac{1.210}{1.000} \times \frac{3}{2}x - x = \frac{163}{200}x$$

Si una inversión de fondos de x procura un beneficio fraudulento de

$$\frac{163}{200}x - \frac{1}{2}x = \frac{63}{200}x \quad ,$$

es una inversión de $\left[\frac{x}{\frac{63}{200}x}\right] \times 63 = 200$ la que procura un beneficio fraudulento de 63.

El señor Yang pagó por la partida de cuerno de rinoceronte 200 dólares.

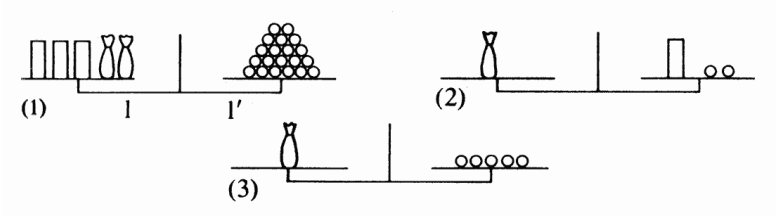
Pero esta historia es inverosímil, porque los comerciantes chinos son siempre honestos.

Volver

29. Escándalo en Macao

Sea P el paquete de pimienta y su peso, sea C el paquete de canela y su peso, y R el paquete de cuerno de rinoceronte y su peso.

3 P + 2 C	equilibran	20 R
C	equilibra	P + 2 R
C	equilibra	5 R



Sea *x* la relación de las longitudes del brazo derecho y del brazo izquierdo de la balanza *(x* = l'/l))

*

$$3\,P + 2\,C = x \times 20\,R \qquad (1)$$
$$C = x \times 5R \qquad (3)$$

La comparación de las figuras (2) y (3) muestra que P = 3R (4). Teniendo en cuenta (3) y (4), podemos escribir (1) así:

$$9\,R + 2 \times x \times 5\,R = x \times 20\,R$$

$$9 = 10\,x$$

$$x = 9/10$$

La relación de los brazos de la palanca del señor Yang es de 10/11 y como 9/10 < 10/11 (pues 99 < 100), los brazos de la balanza del señor Ming son más desiguales que los de la balanza del señor Yang.
El señor Ming se ha hecho el más ladrón de los dos.

Volver

30. Quousque tándem abutere, Sinensis...

Sea *y* la relación de las longitudes de los brazos de la balanza.

$$y = \frac{l'}{l}$$

$$2\,\mathrm{Q} = y \times 5\,\mathrm{R}$$

$$8\,\mathrm{R} = y \times 5\,\mathrm{Q}$$

Dividiendo las dos ecuaciones miembro por miembro se obtiene:

$$\frac{\mathrm{Q}}{4\,\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q}} \qquad \mathrm{Q}^2 = 4\,\mathrm{R}^2 \qquad \mathrm{Q} = 2\,\mathrm{R} \qquad \text{luego} \quad y = \frac{4}{5}$$

El señor Tong es el más deshonesto de los tres comerciantes.

Cuando pesan una onza de polvo de cuerno de rinoceronte en el platillo de brazo largo de la balanza, los resultados son los siguientes en los casos de los tres comerciantes:

	peso marcado	*fraude en el peso*	*fraude en dólares*
Yang	11/10 onza	1/10	18
Ming	10/9 onza	1/9	20
Tong	5/4 onza	1/4	45

Volver

31. Una decisión objetada del gobernador de Macao

Tomemos el caso del señor Ming cuya balanza tiene brazos de longitudes desiguales, 9 y 10.

En una primera pesada, el comerciante coloca un kilo de especias (peso exacto) del lado del brazo corto de la balanza. El peso *x* indicado es:

$$9 \times l = 10 \times x \qquad x = 9/10 = 0{,}9$$

Luego coloca el kilo de especias en el otro platillo. El peso *y* indicado es:

$$9 \times y = 10 \times l \qquad y = 10/9 = 1{,}1111...$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{0{,}9 + 1{,}1111\ ...}{2} = 1{,}0055\ ...$$

Como se ve, el cliente paga aun por un peso exagerado en 0,0055, o sea, un poco más del 0,5%.

Volver

32. El mal caballo de Sun Yat Sen

Sea V la velocidad de Sun Yat Sen y sea *v* la velocidad del ejército. El tiempo que se tomó Sun Yat Sen es el mismo que habría tardado si, estando el ejército inmóvil, hubiera hecho a la ida 10 kilómetros a la velocidad V – *v* y luego, al regresar, 10 kilómetros a la velocidad V + *v*; durante ese tiempo total, por otra parte, el ejército avanzó 10 kilómetros.

$$\frac{10}{\mathrm{V}-v}+\frac{10}{\mathrm{V}+v}=\frac{10}{v}$$

Dividamos por *v* los denominadores de los dos miembros

$$\frac{10}{\frac{\mathrm{V}}{v}-1}+\frac{10}{\frac{\mathrm{V}}{v}+1}=10$$

y poniendo $\frac{\mathrm{V}}{v}=x$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1 \qquad x^2-2x-1=0$$

$$x=1+\sqrt{2}$$

La distancia recorrida por Sun Yat Sen es $\frac{\mathrm{V}}{v}$ veces, o *x* veces, la distancia recorrida por el ejército en el mismo tiempo, o sea: 10 (1 + √2) = 24,1 kilómetros.

Volver

33. La triste historia de Pu, Lu y Yu

Disminuyendo en una unidad los efectivos de las secciones de Pu se obtiene un número considerado maléfico en occidente, el 13; de manera que las secciones eran primitivamente de 14 hombres, número razonable desde el punto de vista militar.

Al repartirse totalmente en secciones de 14, 15 y 16 hombres (puesto que el enunciado indica que se hicieron dos pruebas) los hombres de Pu forman un número P múltiplo de 14, 15 y 16.

Luego P es el mínimo común múltiplo de 14, 15 y 16 ó un múltiplo de ese mínimo común múltiplo.

$$P = 1.680 \times p \qquad p \text{ es entero.}$$

El ejército de Pu cuenta menos de 30.000 hombres; $p \leq 17$.

Sea L el número de los hombres de Lu. Sabemos que antes de la incorporación del capitán esos hombres estaban repartidos en secciones que tenían un hombre menos que las de Pu, en secciones, pues, de 13 hombres. El número de los hombres de Lu, incluyendo al capitán degradado, es pues:

$$L = 13\,q + 1 \qquad q \text{ es entero}$$

P + L es múltiplo de 13 y de 17, de conformidad con la parte final del enunciado, y, como 13 y 17 son primos entre sí, de $13 \times 17 = 221$.

$$\begin{aligned} P + L &= 221\,s && s \text{ es entero} \\ 1\,680\,p + 13\,q + 1 &= 221\,s \\ 1\,680 &= 13.129 + 3 && 221 = 13 \times 17 \\ (13 \times 129 + 3)\,p + 13\,q + 1 &= 13 \times 17 \times s \\ 17\,s - 129\,p - q &= \frac{3\,p + 1}{13} && (1) \end{aligned}$$

$3\,p + 1$ debe ser múltiplo de 13, por lo tanto:

$$p = 4 \qquad 3\,p + 1 = 13$$

$$\text{o} \qquad p = 17 \qquad 3\,p + 1 = 52 = 4 \times 13$$

Supongamos que $p = 4$ $\qquad P = 1{,}680 \times 4 = 6.720$

(1) da por otro lado: $\quad 17\,s - 516 - q = 1$

$$q = 17\,s - 517 > 0$$

El valor mínimo posible de s es 31. A este valor corresponde el valor mínimo de q:

$$q = 17 \times 31 - 517 = 10 \qquad L = 131\,.$$

pero se ve que L > P/100, lo cual es contrario al enunciado.
Luego $p \neq 4$.
Supongamos que $p = 17$ $\qquad$ P = 1680 × 17 = 28.560
(1) da $\quad 17\,s - 2.193 - q = 4$

$$q = 17\,s - 2.197 > 0$$

El valor mínimo posible de s, al cual corresponde el valor mínimo de q, es 130

$$q = 17.130 - 2.197 = 13 \qquad L = 170$$

Para $s = 131$, L = 391 > 28.560/100, lo que sería contrario al enunciado. La única solución es pues:

$$L = 170 \qquad P = 28.560$$

El ejército de Pu era de 28.560 hombres y los decapitados fueron 170.

Volver

34. Magia en cajas

Entreabrimos la caja que lleva la etiqueta BN. Si percibimos una bola blanca, esa caja contiene dos bolas blancas. La caja que lleva la etiqueta BB no puede contener sino dos bolas negras pues si contuviera una blanca y una negra, la caja NN llevaría la etiqueta conveniente, lo cual es contrario al enunciado.

Si percibimos una bola negra, esa caja contiene dos bolas negras, etc.

Volver

35. Molesta promiscuidad en un autocar de Auvernia

Uno de los dos burgueses vive en Ambert y el otro en Issoire a igual distancia del domicilio del estafador. Es pues el tercero quien vive más cercano a la casa de éste. No es el señor Chalus, quien vive en Issoire, ni tampoco es el señor Martin, cuyo número de hijos no es divisible por 3; es, pues, el señor Dupont.

El señor Martin vive en Ambert y el estafador se llama igualmente Martin. De manera que el ladrón no puede ser Martin, ni Dupont que le gana una partida de billar. Se llama Chalus y, por lo tanto, el falsificador se llama Dupont.

Volver

36. Una familia alsaciana

Supongamos que la persona que habla en primer término sea una hermana. Entonces la hermana que habla en segundo lugar se encontraría en la misma situación que aquélla y tendría tantos hermanos como hermanas, lo que es contrario al enunciado.

De modo que la persona que habló primero es un hermano. El número de los hermanos es superior en 1 al número de las hermanas.

Cuando una hermana habla en segundo lugar, el número de las hermanas restantes es inferior en dos al número de los hermanos del cual constituye la mitad. La mitad del número de los hermanos es, pues, 2; el número de los hermanos, 4; el número de las hermanas, 3, y el número de los hermanos y las hermanas, 7.

Volver

37. En el hotel del Conejo Rojo

Sea *x* el número de clientes del hotel y A el número de litros de vino tinto consumido cada día.
Los clientes con pensión completa que beben vino tinto son:

$$x \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = x \times \frac{8}{25}$$

Los clientes con media pensión que cenan y beben vino tinto son:

$$x \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = x \times \frac{4}{25}$$

Los clientes con media pensión que almuerzan y que beben vino tinto son:

$$x \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = x \times \frac{4}{75}$$

Cada una de las categorías y subcategorías debe estar compuesta de un número entero de personas, lo cual implica que *x* es múltiplo de 75. Por otra parte, según el enunciado, *x* es par. Luego $x = 150\ p$, siendo *p* número entero.

En litros, la cantidad de vino tinto consumido cada día es:

$$\mathrm{A} = x \times \frac{8}{25} \times \frac{3}{4} + x \times \frac{4}{25} \times \frac{1}{2} + x \times \frac{4}{75} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} x = 50\ p$$

A es evidentemente inferior al número de litros que se obtendría dividiendo el precio total, 1.390 francos, por el precio del vino más barato.

$$\mathrm{A} < \frac{1.390}{17} \qquad \mathrm{A} \leq 81$$

$50\ p \leq 81$ luego $p = 1$

El número de los clientes del hotel es $150 \times 1 = 150$.

*

Como la cantidad más pequeña servida es de un cuarto de litro, las cantidades beaujolais y de vino del Ródano consumidas, *a* y *b*, son números enteros de cuartos de litro.
Sea *y* el precio del litro de beaujolais. $y > 17$

$$a \times \frac{y}{4} + b \times \frac{17}{4} = 1.390$$

$$a \times y + b \times 17 = 5.560 \quad \text{con } a + b = 200,\ b = 200 - a$$

luego:

$$a\,(y - 17) = 2.160$$

$$2.160 = 1 \times 2^4 \times 3^3 \times 5$$

Los divisores entre los cuales hay que buscar (y — 17) son:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18...
como *y* es ligeramente inferior al doble de 17, el número que conviene es 16.

$$y - 17 = 16$$

$$a = 2160/16 = 135$$

La cantidad de beaujolais consumida cada día es de 135 cuartos de litro, es decir, 33,75 litros.

Volver

38. Los electores de Pontarlier

Hay cuatro combinaciones de cuatro cifras tomadas de tres en tres y al permutar tres cifras se pueden formar seis números. Hay pues 4 × 6 = 24 números.

Sea $\overline{a\,b\,c\,d}$ el número de los electores. Las permutaciones de las tres cifras *a, b, c,* son:

$$\overline{a\,b\,c} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{c\,a\,b} = 100c + 10a + b$$

$$\overline{b\,c\,a} = 100b + 10c + a$$

$$\overline{a\,c\,b} = 100a + 10c + b$$

$$\overline{b\,a\,c} = 100b + 10a + c$$

$$\overline{c\,b\,a} = 100c + 10b + a$$

Cuya suma es $222\ (a + b + c)$

Síguese de ello que la suma de los 24 números posibles será:

$$222\ [(a + b + c) + (b + c + d) + (c + d + a) + (d + a + b)] = 666\ (a + b + c + d)$$

Sea A la edad del alcalde y sea N el número de sus electores.

$$666\ (a + b + c + d) = \mathrm{A}\ (a + b + c + d)^2$$

dividiendo los dos números por $(a + b + c + d)$, se tiene:

$$a + b + c + d = \frac{666}{\mathrm{A}} = \frac{2 \times 3^2 \times 37}{\mathrm{A}}$$

Como la suma de cuatro cifras diferentes es inferior o igual a 30 y como A debe dividir esa suma, A = 37 o A =37 × 2 (los otros valores posibles por ser superiores a 100 son inaceptables). Puesue el alcalde es hombre joven, A = 37, entonces $a + b + c + d = 18$

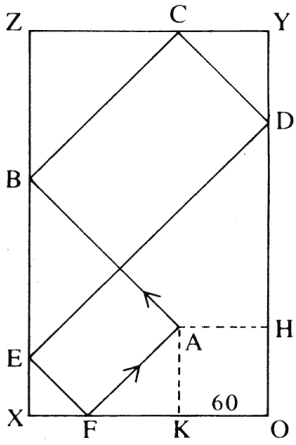
$$666\ (a + b + c + d) = 666 \times 18 = 36/13\ \mathrm{N}$$

Luego N = 4.329

El alcalde tiene 37 años y sus electores son 4.329.

Volver

39. Recorrido de cinco bandas



El camino que recorre la bola tiene siempre una inclinación de 45° respecto de una y otra banda. De manera que el trayecto recorrido por la bola es siempre igual a la proyección de ese trayecto en una u otra banda multiplicada por $\sqrt{2}$. Evaluemos ese camino a través de su proyección en el eje OY:

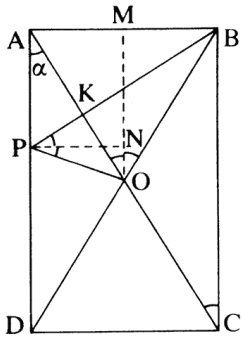
$$\gamma = (HY + YO + OH) \times \sqrt{2} = 2 \times OY \times \sqrt{2}$$

Evaluemos ese camino según su proyección en OX:

$$\gamma = (KX + XO + OX + XK) \times \sqrt{2}$$
$$= 2\,(OX + KX) \times \sqrt{2}$$
$$OY \times \sqrt{2} = (OX + KX) \times \sqrt{2}$$
$$OY = OX + KX$$
$$= 160 + (160 - 60) = 260$$

Volver

40. Percusiones de Clou sobre un billar de troneras



Sea N el pie de la perpendicular bajada de P sobre la mediana OM del rectángulo.

$\widehat{OPN} = \widehat{KPN}$

$\widehat{KPN} = \widehat{PAK}$ (lados perpendiculares) = α luego

$\widehat{KPO} = 2\alpha$ y $KOP = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$\widehat{POB} = \widehat{KOP} + \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\alpha = \frac{\pi}{2}$

El cuadrilátero A P O B es pues inscribible y $\widehat{OAB} = \widehat{OPB} = 2\alpha$

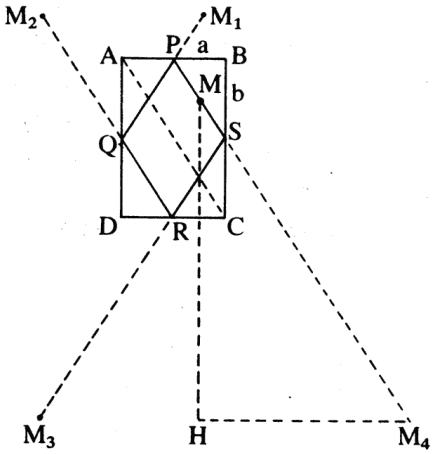
$$\widehat{PAB} = \widehat{PAO} + \widehat{OAB} = 3\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{B\,C}{A\,B} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Volver

41. Reflexiones de Clou sobre un billar sin troneras



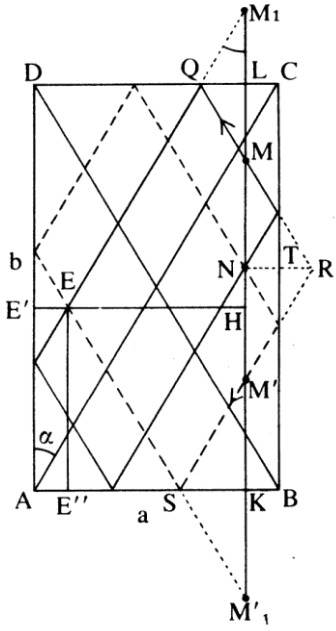
Sean M_1 el simétrico de M en relación a AB, M_2 el simétrico de M, en relación a AD, M_3 el simétrico de M_2 en relación a DC, M_4 el simétrico de M_3 en relación a BC.

La igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión de la bola hace que ésta siga las direcciones M_1P, M_2Q, M_3R, M_4S. Si M_4S pasa por M, es fácil ver que los triángulos ADC Y MHM_4 son homotéticos en la relación 2 (relación de los lados de los ángulos rectos). MP es paralela a una de las diagonales del rectángulo (y PQ a la otra).

La longitud del circuito recorrido por la bola, perímetro del paralelogramo PQRS, es igual a M_4M, es decir, dos veces la diagonal del billar.

Volver

42. Clovis juega al billar



Tracemos los dos paralelogramos que pasan por M y M' en los lados paralelos a las diagonales e inscritos en el billar.

Si no se produce ningún suceso perturbador, cada una de las bolas recorrerá indefinidamente el paralelogramo en el cual se encuentra colocada.

Como las trayectorias de las bolas están igualmente inclinadas sobre uno u otro lado del billar, el trayecto recorrido será proporcional a las proyecciones de ese trayecto en uno o el otro lado, por ejemplo, el lado menor AB. En consecuencia, los trayectos MQE y M'SE son iguales.

Las bolas que tienen la misma velocidad se encuentran en E. Determinemos la posición de E por sus coordenadas AE', AE'' en relación a los ejes AB y AD.

Sean *x,y* y *x,y* ' las coordenadas de M y M' en relación a esos mismos ejes, sea M, el simétrico de M en relación a CD, sea M', el simétrico de M' en relación a AB, sea α el ángulo de las diagonales con el lado mayor del billar; sean *a* y *b* el lado menor y el lado mayor y N el punto medio de MM'.

El triángulo M_1EM'es isósceles y $M_1M'_1 = b + (b - y) + y'$ y como $b = a \cot \alpha$

$$M_1M'_1 = 2\,\alpha \cot \alpha - (y - y')$$

$$EH = \frac{M_1M'_1}{2} \operatorname{tg}\alpha = a - \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

$$\overline{E'E} = \overline{E'H} - \overline{EH} = x - a + \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

$$x - a = -\overline{\mathrm{N\,T}} \qquad \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg} \alpha = \overline{\mathrm{N\,M}} \operatorname{tg} \alpha = \overline{\mathrm{N\,R}}$$

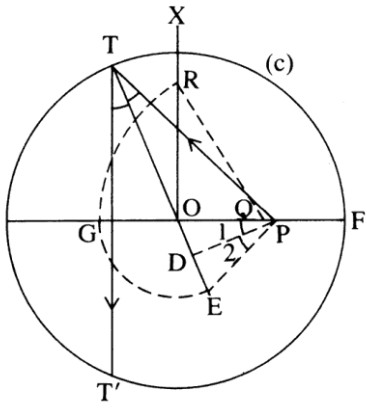
$$\overline{\mathrm{E'E}} = \overline{\mathrm{N\,R}} - \overline{\mathrm{N\,T}} = \overline{\mathrm{N\,R}}$$

$$\overline{\mathrm{E''E}} = \overline{\mathrm{M'_1\,H}} - \overline{\mathrm{M'_1\,K}} = \overline{E\,H} \cot \alpha - y' = a \cot \alpha - \frac{y + y'}{2}$$

$$= \overline{\mathrm{K\,L}} - \overline{\mathrm{K\,N}} = \overline{\mathrm{N\,L}}$$

Volver

43. El billar circular



Supongamos el problema resuelto.
Sea PTT' el comienzo del trayecto de la bola, D el pie de la perpendicular bajada de P sobre TO, E el punto de encuentro de TO con la perpendicular levantada en P a TP; PO = *d;* OT = R.
Los triángulos TPE, ODP son semejantes.

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ET}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{PO}}$$

Como los ángulos P, y P_2 son iguales, OPE es isósceles, PO = PE = *d*

$$\text{y OD} = \mathrm{DE}/2$$

$$\text{luego } \frac{d}{\mathrm{ET}} = \frac{\mathrm{OE}}{2d}$$

$$\mathrm{ET} \times \mathrm{EO} = \left(d\sqrt{2}\right)^2$$

Llevemos a PO la longitud OG = OE

$$\mathrm{GO} \times \mathrm{GF} = \left(d\sqrt{2}\right)^2$$

$\left(d\sqrt{2}\right)^2$ es la potencia del punto G en relación al círculo de centro Q (punto medio de OF) y de radio R/2

$$\left(d\sqrt{2}\right)^2 = \overline{\mathrm{GQ}^2} - \frac{\mathrm{R}^2}{4}$$

$$\mathrm{GQ}^2 = \left(d\sqrt{2}\right)^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{4}$$

Si llevamos a OX la longitud OR = $d\sqrt{2}$, comprobamos que GQ = QR. De ahí el punto G.
E está en la intersección del círculo de centro O y radio OG con el círculo de centro P y de radio *d*.
T está en la intersección de EO prolongada y del círculo (c).

Volver

44. La base de los siete candeleros rosados

El enunciado insiste en la palabra base. Y, en efecto, se trata de una cuestión de base, la base de numeración de los candeleros rosados. Sea x esa base.

$$26 \times 202 = 5555$$

$$(2x + 6)(2x^2 + 2) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$$

$$(x - 7)(x^2 + 1) = 0$$

$$x = 1$$

Los “candeleros rosados” calculan mediante un sistema de numeración de base 7.

Volver

45. Las hijas de Mnemosina y el divisor obstinado

Sea x la base de numeración.

$$40.301 = 4\,x^4 + 3\,x^2 + 1 = (2\,x^2 + x + 1)\,(2\,x^2 - x + 1)$$

$2\,x^2 + x + 1$ se escribe 211. Es el divisor buscado.
El cociente es $(2x^2 - x + 1) = x^2 + x\,(x - 1) + 1$, que se escribe $\overline{1\,(x-1)\,1}$.

$$\text{Si } \overline{1\,(x-1)\,1} = 181, \quad x = 9$$

De modo que las hijas de Mnemosina eran 9. Eran las musas.

Volver

46. El gallo del corral

Evidentemente $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 11$ [22], $x_4 = 4$, $x_5 = 8$, $x_6 = 9$, $x_7 = 3$, $x_8 = 5$, $x_9 = 12$, $x_{10} = 7$, $x_{11} = 10$, $x_{12} = 6$.

Los valores indicados para la x son diferentes de los que acabamos de indicar.

Por lo tanto, estas x están escritas en sistemas de numeración con bases diferentes a 10 que son:

para $x_1 = 2$	para $x_7 = 2$
para $x_2 = 8$	para $x_8 = 3$
para $x_3 = 9$	para $x_9 = 4$
para $x_4 = 2$	para $x_{10} = 4$
para $x_5 = 7$	para $x_{11} = 8$
para $x_6 = 5$	para $x_{12} = 6$

Las cuatro primeras ecuaciones lineales muestran que A, B, C, …, L son iguales a las bases empleadas sobre sus líneas.

Entonces I = 4 E = 7 A = 2 y $n = 14$

Volver

[22] Los 11 jugadores de un equipo de fútbol.

47. Vacaciones de Zabulón y Coucoulina

Coucoulina tiene siete veces la edad de su hermano y la tercera parte de la edad de su marido que no es centenario.

Coucoulina tiene 21 años o 28 años y su marido 63 u 84 años.

Sea x la base de numeración de Karaoun; si 21 y 63 responden a la hipótesis.

$$21 \text{ se escribe } 12 \quad 21 = x + 2 \quad x = 19$$

En el sistema de numeración de base 19, 21 se escribe 12 y 63 se escribe 36.
Fácilmente se verifica que 84 y 28 no convienen.
Zabulón tiene 63 años y Coucoulina 21.

Volver

48. Algún día diré vuestros nacimientos latentes

Las líneas son las transcripciones (en los sistemas de numeración de bases 10, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 2) de las cifras siguientes (escritas aquí en base 10)

Para la primera línea: 1
Para la segunda línea: 5
Para la tercera línea: 9
Para la cuarta línea: 15
Para la quinta línea: 21

Estos números que deberían figurar a la cabeza de cada línea son los números de orden de las letras *a, e, i, o, u* cuyo conjunto forma las vocales.

La respuesta es, pues, *vocales* (evocadas por un verso del célebre soneto de Rimbaud).

Volver

49. El cumpleaños de Claudine

La cena tiene lugar el 1º de enero y el cumpleaños de Claudine es el 31 de diciembre. El 30 de diciembre anterior Claudine tenía 19 años. Tendrá 21 años el 31 de diciembre de este año y 22 años a fines del año próximo.

Volver

50. Clodomir se vuelve a casar

$$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Las tres edades pueden ser:

	1	1	1	1	2	2	3
	2	3	4	6	2	3	3
	18	12	9	6	9	6	4
Suma:	21	16	14	13	13	11	10

Puesto que hay una ambigüedad en la indicación de la suma, ello significa que sobre la mesa hay trece tabaqueras.

Hay un hermano mayor y no hermanos mayores gemelos.

Las edades son pues 9, 2 y 2.

Volver

51. Evariste y su abuelo

Sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ las edades de Evariste y de su abuelo.

$$10\,a + b = 10\,c + d + 63 \qquad \text{(l)}$$

$$10\,a + b + 10\,c + d = n\,(a + b + c + d) \quad (2)$$

$$63 = n\,(a + b - c - d) \qquad (3)$$

(1) muestra que $b - d = 3$ $a - c = 6$ (A)

o $d - b = 7$ $a - c = 7$ (B)

Hipótesis A

(3) da $n = 7$,

de lo cual se deduce rápidamente

$$a = 8$$
$$b = 4$$
$$c = 2$$
$$d = 1$$

Hipótesis (B)

(3) da $63 = n \times 0$, lo cual es imposible.

Hay pues sólo una solución: el abuelo tiene 84 años y Evariste 21.

Volver

52. El secreto de la familia Béduche

Sean P, M, E, A, *x, y* las edades del padre, de la madre, del hijo, la suma de estas tres edades, los "algunos años" de que habla el padre, el valor de las relaciones comunes. Todos estos números son enteros.

$$P + M + E = A \qquad P = 5\,E$$

$$\frac{P + x}{E + x} = \frac{5E + x}{E + x} = y \qquad (1)$$

$$\frac{A + 3x}{A} = y \qquad (2)$$

$$(2)\ \text{da} \qquad x = \frac{A\,(y - 1)}{3}$$

Llevando este valor de *x* a (1), se obtiene:

$$E = \frac{A(y-1)^2}{15 - 3y}\ ,\ \text{luego} \qquad P = \frac{5A(y-1)^2}{15 - 3y} \qquad (3)$$

$$\text{y} \quad M = A - P - E = \frac{A(-2y^2 + 3y + 3)}{5 - y} \qquad (4)$$

y es evidentemente diferente de 5 y no puede ser superior a 5. En efecto, si y ≥ 6, de conformidad con (2) tendríamos $x \geq \frac{5A}{3}$ lo que no correspondería a la expresión "algunos años" pronunciada por el padre. Por otro lado, *y* es diferente de 1, valor para el cual tendríamos E = P = 0

y sólo puede ser 2, 3 o 4, y es fácil ver que 2 es el único valor razonable. Y esto puede demostrarse.

En efecto, M y 5 – *y* siendo positivos deben dar (4):

$$-2\,y^2 + 3\,y + 3 > 0$$
$$2\,y^2 - 3\,y - 3 < 0$$

y debe estar comprendido entre las raíces de la ecuación

$$2\,y^2 - 3\,y - 3 = 0$$

que son

$$\frac{3-\sqrt{33}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{3+\sqrt{33}}{4}$$

La primera raíz es negativa, la segunda igual a 2,18... y debe ser inferior a 2,18... Como *y* es entero y diferente de 1, no puede ser sino igual a 2.
Si *y* es igual a 2 tenemos, de conformidad con (3) y (4):

$$E = \frac{A}{9} \qquad P = \frac{5A}{9} \qquad M = \frac{A}{3}$$

Si E es entero, A es múltiplo de 9. El múltiplo máximo de 9 inferior a 70 es 63.

Si A = 63, E = 7, P = 35, M = 21, M – E = 14

Si se tomara para A un múltiplo de 9 inferior a 63, M – E, diferencia entre las edades de la madre y del hijo, sería un número demasiado bajo para ser aceptable. La señora Béduche tuvo a su hijo a los 14 años, antes de casarse. Ese es el secreto de la familia.

Volver

53. Clapeyron en el año 2000

Sea x la edad de Clapeyron en el año 2000 y sea 19 ab su año de nacimiento.

$$x = 2000 - \overline{19\,ab} = 1 + 9 + a + b$$
$$2000 - 1900 - 10\,a - b = 1 + 9 + a + b$$
$$90 = 11\,a + 2\,b$$
$$2\,b = 90 - 11\,a$$

2 b es par e inferior a 20; sólo puede ser 2.

$$b = 1 \qquad a = 8$$

Clapeyron, nacido en 1981, tendrá 19 años en el 2000.

Volver

54. La edad del juicio

Pierre tiene 6 años, su abuelo 66, su bisabuelo 99 años. Si prestamos crédito a la creencia que fija a los 7 años la edad del juicio, Pierre será un niño juicioso dentro de un año.

Volver

55. La bruja está en el centro

Primera cuestión: Es de presumir que (2) es, como (1), un cuadrado mágico. Es muy fácil demostrar que en un cuadrado mágico de módulo 3, el elemento central es el tercio de la constante (suma común).

$$\text{Luego } x = \frac{8+3+10}{3} = 7$$

Segunda cuestión: la aplicación de la propiedad mencionada a los cuadrados mágicos (2) y (3) muestra que $y = 6$ y que $z = 7$.

Volver

56. Los magos de Amberes

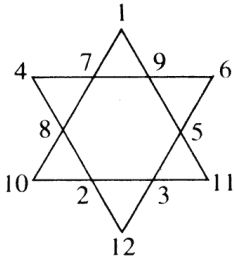
Veamos dos ejemplos de esos cuadrados mágicos de módulo 5.

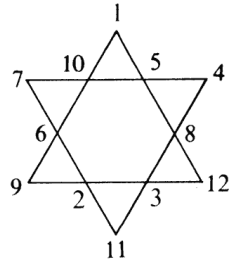
00	13	21	09	17
06	19	02	10	23
12	20	08	16	04
18	01	14	22	05
24	07	15	03	11

05	18	26	14	22
11	24	07	15	28
17	25	13	21	09
23	06	19	27	10
29	12	20	08	16

Volver

57. Estrellas mágicas





Volver

58. Decepción triangular

La superficie es cero.

Volver

59. Las esferas pintadas

Los volúmenes y, por lo tanto, los pesos son proporcionales a los cubos de los radios; las superficies y, por lo tanto, las cantidades de pintura son proporcionales a los cuadrados de los radios. Sean R y *r* los radios de las dos esferas, *x* el peso en gramos de la pintura necesaria para pintar la esfera pequeña.

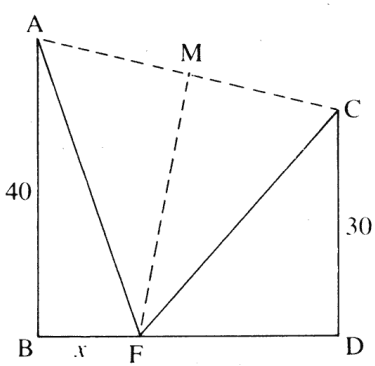
$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{8}{27} \qquad \text{luego} \qquad \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{x}{900} = \frac{4}{9}$$

x = 400 gramos.

Volver

60. Los petasóforos de Saint-Saturnin



Sean AB y CD las dos torres y F la fuente.

Hay que determinar BF = x de manera tal que AF = CF

A $F^2 = 40^2 + x^2$ C $F^2 = 30^2$ + F $D^2 = 30^2 + (50 - x)^2$

$$40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

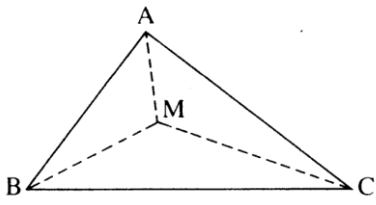
$$x = 18$$

Construcción geométrica: El triángulo AFC es isósceles.
F está en la intersección de BD con la mediatriz de AC.

Volver

61. El encuentro de los geómetras exóticos

Supongamos el problema resuelto; sea M el punto en que se encuentran las tres sendas. Consideremos la elipse de focos B y C que pasa por M. Respecto de todos los puntos de esta elipse, MB+MC es constante; M será pues el punto de la elipse más próximo a A, es decir, el punto situado sobre la normal a la elipse trazada desde A. Una propiedad clásica de esta normal es la de ser bisectriz de $\widehat{BMC}$.



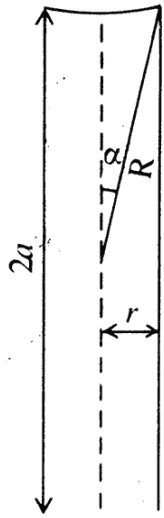
Por las mismas razones, BM será bisectriz de $\widehat{AMC}$ y CM será bisectriz de $\widehat{BMA}$.
La consideración de los ángulos en M muestra que en esas condiciones

$$\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120°$$

Es fácil construir el punto M desde el cual se ven los tres lados del triángulo en el mismo ángulo (120°).

Volver

62. Asombroso comportamiento de una esfera perforada



Sea *r* el radio del círculo y sea R el radio de la esfera; 2*a* será el largo del agujero.
La superficie lateral del agujero cilíndrico es $2\pi r \times 2a$. Rodeemos el cilindro con otro cilindro que tenga un radio $r + dr$. La parte de la esfera comprendida entre los dos cilindros tendrá el siguiente volumen:

$$(2\pi r \times 2a)\, dr$$

El volumen de la parte restante de la esfera es

$$V = \int_r^R 2\pi r \times 2a\, dr$$

$r = R \operatorname{Sen} \alpha$ $a = R \cos \alpha$ $dr = R \cos \alpha\, d\alpha$

Al tomar α como variable, el volumen buscado es:

$$V = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} 4\pi R^3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha\, d\alpha$$

La integral de $\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha$ es

$$-1/3 \cos^3 \alpha$$

$$V = \left[-\frac{4}{3}\pi R^3 \cos^3 \alpha\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos^3 \alpha$$

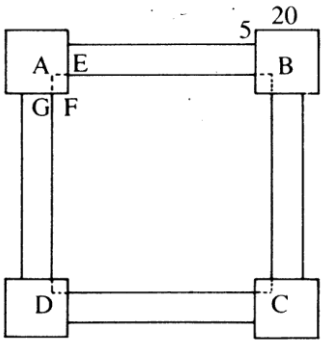
$$\cos \alpha = \frac{a}{R} \qquad \text{luego} \qquad V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Para determinar V basta con medir *a*.
V es igual al volumen de una esfera de radio *a*. A priori es sorprendente que ni *r* ni R intervengan en su medida.

(Que yo sepa, este problema apareció por primera vez en Mathematical Nuts *de Samuel I. Jones en 1932. Muchos autores lo retomaron luego con soluciones variadas.)*

Volver

63. Vauban encuentra a Euclides



1) Cada torre participa del perímetro exterior en 20 + 20 + 5 + 5 = 50 m, y cada torre está ocupada por 50 hombres. A lo largo del perímetro exterior hay un hombre por metro y ese perímetro es de 560 metros.

2) La superficie interior es la del rectángulo ABCD menos las superficies de 4 cuadrados como es el cuadrado AEFG de 5 metros de lado; de modo que

$$S \times A\,B\,C\,D - 100\ m^2.$$

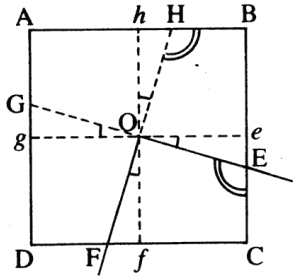
La superficie interior será máxima al mismo tiempo que la de ABCD, es decir, al mismo tiempo que AB × BC.
Por otra parte, el perímetro del rectángulo ABCD es igual al perímetro exterior menos 4 $(20 \times 2)^M$, es decir, 560 – 160 = 400 m; ese perímetro está determinado y su mitad AB + BC también lo está.
Para que el producto de los dos números (AB × BC), cuya suma está dada, sea máximo es menester que esos números sean iguales.
Luego AB = BC; la ciudadela es pues cuadrada.

Entonces A B = 100 m, $S \times A\,B\,C\,D = 100 \times 100 = 10.000\ m^2$

Superficie interior = 10.000 – 100 = 9.900 metros cuadrados.

Volver

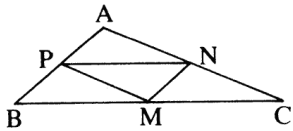
64. El cuadrado antropófago



Prolonguemos los lados del segundo cuadrado en OG, OH.
Los cuatro cuadriláteros EOCF, HOEB, GOHA, FOGD son iguales.
Esta igualdad resulta de la de los triángulos rectángulos EO*e*, HO*h*, GO*g*, FO*f*, que tienen un lado y el ángulo adyacente iguales (ángulos opuestos por el vértice o de lados perpendiculares).
La superficie del cuadrilátero común EOFC es pues la cuarta parte de la superficie del primer cuadrado, es decir, $2^2/4 = 1$.
Esta superficie no cambia cuando el segundo cuadrado gira alrededor de O.
Para que nos encontremos en el caso de la figura encarada, es necesario que el lado del segundo cuadrado sea superior o igual a $OC = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ es decir, que su superficie sea superior (o igual) a $\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\overline{AB^2}}{2}$
(Según Charles W. Trigg, en *Mathematical Quickies.)*

Volver

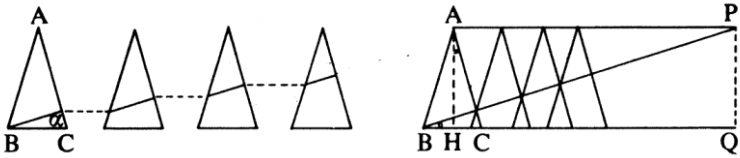
65. El testamento del padre Trigone



Estableciendo los puntos medios de M, N, P de los lados del triángulo ABC se divide ese triángulo en cuatro triángulos iguales.

Volver

66. La rata de Tegucigalpa



La distancia recorrida es BP.

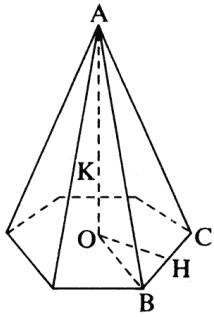
Los triángulos BPQ y ACH son semejantes (rectángulos; $\widehat{HAC} = \widehat{QBP}$ tienen sus lados perpendiculares)

$$\frac{BP}{AC} = \frac{PQ}{HC} \qquad PQ = AH$$

$$BP = \frac{AC \times PQ}{HC} = \frac{\sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AH^2} \times AH}{\frac{BC}{2}} = 1.640 \text{ decímetros}$$

Volver

67. El congreso de las ratas mayas



En el problema anterior se vio que

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{B\,C}}{2}\right)^2 + \mathrm{A\,H^2} \times \mathrm{A\,H}}}{\frac{\mathrm{B\,C}}{2}} \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{B\,C}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2\mathrm{p}}{n} = \frac{\mathrm{p}}{n}$$

Si O es el pie de la altura de la pirámide:

$$\mathrm{A\,H^2 = A\,O^2 + O\,H^2 = K^2 + O\,H^2}$$

$$\mathrm{O\,H} = \frac{p}{n}\cot \widehat{\mathrm{H\,O\,B}} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\mathrm{H\,O\,B}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{B\,O\,C}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{\mathrm{n}} = \frac{\pi}{\mathrm{n}}$$

$$\text{luego } \mathrm{O\,H} = \frac{p}{n}\cot\frac{\pi}{n} \qquad \mathrm{A\,H^2} = \mathrm{K^2} + \frac{p^2}{n^2}cot^2\frac{\pi}{n}$$

trasladando los valores de $\frac{\mathrm{BC}}{2}$ y de AH a (1), tenemos:

$$x = \frac{n}{p}\sqrt{k^4 + k^2\frac{p^2}{n^2}\left(1 + 2\cot^2\frac{\pi}{n}\right) + \frac{p^4}{n^4}\cot^2\frac{\pi}{n}\left(1 + \cot^2\frac{\pi}{n}\right)} \qquad (2)$$

Supongamos que en el problema anterior, la base de la pirámide sea un cuadrado:

$$n = 4 \quad 2\mathrm{p} = 162. \times 4 \quad \mathrm{p/n} = 81 \quad \cot \pi/4 = 1 \quad k^2 = 360^2 - 81^2$$

Trasladando estos valores a (2) volvemos a encontrar 1.640. Encontraríamos aun ese resultado suponiendo que la base es cualquier polígono regular de menos de 15 lados (con los datos adoptados) pero los cálculos serían más trabajosos.

*

Supongamos que, *k* y *2p* permaneciendo constantes, el número de lados del polígono de base, *n*, tienda al infinito. Entonces BC tiende a 0 y la fórmula (1) muestra que *x* tiende al infinito.
La fórmula (2) conduce desde luego al mismo resultado:

$$n \to \infty \qquad \pi/n \to 0 \qquad \cot \pi/n \to \infty$$

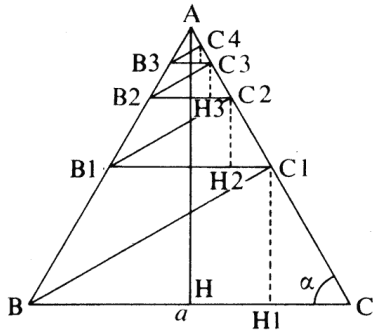
Si *n* es infinitamente grande,

x es equivalente a $\cot\frac{\pi}{n}\sqrt{2\mathrm{K}^2 + \frac{b^2}{n^2}\cot^2\frac{\pi}{n}}$

equivalente a $\cot\frac{\pi}{n}\sqrt{2k^2 + \frac{p^2}{\pi^2}}$ que tiende a infinito con la misma velocidad que *n*.
Cuando *n* se hace infinita, el polígono de base se convierte en un círculo y la pirámide en un cono; de ahí la conclusión del Congreso de Tegucigalpa: si los mayas hubieran construido templos cónicos las ratas nunca habrían llegado a la cima de esos templos.

Volver

68. Consideraciones sobre la velocidad de rotación de las ratas mayas



Superponiendo los triángulos isósceles iguales que constituyen las caras de la pirámide, podemos representar el trayecto de la rata en un solo triángulo.

Sea BC, + B_1C_2 + B_2C_3 + ... + B_nC_{n+1} perpendiculares a AC. En la primera cara la rata se elevará $H_1C_1 = h_1$

h_1 = C C_1 sen α = α eos α sen α en razón de similitud, $\frac{h_2}{B_1C_1} = \frac{h_1}{a}$

Se calcula entonces que $B_1C_1 = -a \cos 2\alpha$, luego $h_2/h_1 = -\cos 2\alpha$ (No debe asombrar la presencia del signo –. En efecto, α > 45°, luego 2α > 90° tiene un coseno negativo. Si a fuera inferior a 45°, el ángulo A sería obtuso y el problema, tal como lo hemos planteado, no tendría sentido.)

Cada altura parcial, h_2, h_3, ..., h_{2n}, h_{2n+1} se deduce de la anterior multiplicando por (– cos 2α) y así se obtiene la serie:

i = a cos α sen α
h_2 = — a cos α sen a $\cos^2 \alpha$
h_3 — a cos α sen α $(\cos 2\alpha)^2$
. . .
$h_{2n-1} = -a \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha (\cos 2\alpha)^{2n-2}$
$h_{2n} = -a \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha (\cos 2\alpha)^{2n-1}$

Esta serie es convergente, es una progresión geométrica cuyo primer término es a cos α sen α y cuya razón es (– cos 2α).

Su suma S es $a \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \times \frac{1}{1+\cos 2\alpha}$

Observemos que $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ y que, por consiguiente, $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$.

De donde $S = \frac{a \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$

$\frac{a}{2}$ tg α es el valor de la altura AH del triángulo, de modo que la rata terminará por llegar a A, es decir, a la cima de la pirámide. Pero este valor AH, límite de la serie, sólo podrá obtenerse por la adición de una infinidad de términos. Síguese de ello que la rata llegará a A sólo después de haber pasado por una infinidad de triángulos AB_nC_n, es decir, que dará una infinidad de vueltas alrededor del eje de la pirámide.

*

Hice notar antes que a no podía ser inferior a 45°. Pero puede igualar ese valor. Entonces, siendo cos 2α = cos 90° nulo, la serie h_n se reduce a su primer término $h_1 = a/2 = h$.

En este caso, el triángulo BAC es rectángulo e isósceles. El trayecto de la rata se limita a la arista BA sobre una sola cara.

Una pirámide regular cuyos ángulos en el vértice sean rectos no puede tener como base sino un triángulo equilátero. (Esto es fácil de demostrar partiendo del hecho de que, si O es el centro de la base, $\widehat{BAC} < \widehat{BOC}$.)

Un móvil que va de B a C gira un tercio de vuelta alrededor del eje de la pirámide y un móvil que va de B a A gira una sexta parte de vuelta.

Se ve pues que, si el ángulo α es igual a 45°, lo cual implica una pirámide de base triangular, la rata trepadora girará 1/6 de vuelta alrededor del eje de la pirámide; en todos los demás casos dará una infinidad de vueltas.

*

Es fácil comprobar que las pirámides mayas no tienen bases triangulares. En consecuencia, es la segunda hipótesis la que debemos considerar.

En ese caso, como el trayecto cubierto es:

$$\sum B_{n-1} C_n = \sum \left(h_n \times \frac{B_{n-1} C_n}{h_n} \right) = \sum \left(h_n \times \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos^2 \alpha}$$

por lo tanto es finito y recorrido en un tiempo finito; se llega a la conclusión de que la rata da una infinidad de vueltas en un tiempo finito.

Ese fue el resultado más notable obtenido en el Congreso de Tegucigalpa: las ratas mayas pueden girar sobre sí mismas a una velocidad de rotación infinita.

Volver

69. A los cerdos no les gustan las ciruelas

Sean n y $2n$ el ancho y el largo del terreno y sea x el ancho de la banda. Supongamos que se disponen en línea recta los cuatro segmentos de la banda. Su ancho será:

$$2\,n + 2\,n + (n - 2\,x) + (n - 2\,x) = 6\,n - 4\,x$$

La superficie de la banda:

$$(6\,n - 4\,x) \times x = 0{,}5\,(n \times 2\,n) = n^2$$

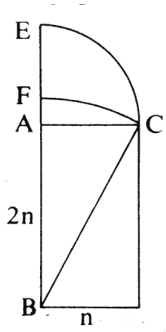
Luego:

$$4\,x^2 - 6\,n\,x + n^2 = 0$$

ecuación que tiene como soluciones:

$$n \times \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \qquad y \qquad n \times \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

Hay que eliminar la primera solución pues $n \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ es superior a n, de manera que la banda traspasaría el rectángulo.

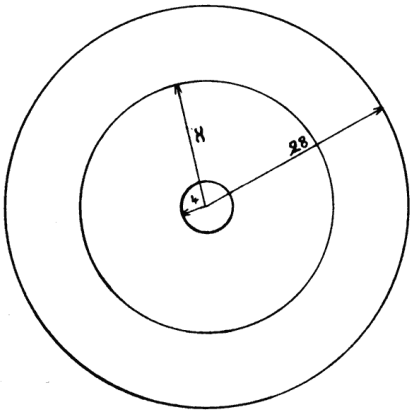


$$x = n \times \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 1.000 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 191 \text{ m}$$

Observemos que $3n$ es el medio del perímetro del rectángulo y que $n\sqrt{5}$ es su diagonal. El ancho de la banda es, pues, la cuarta parte de FE.

Volver

70. Piedras de afilar



La piedra pequeña que pesa dos veces menos que la grande tiene la mitad del volumen de ésta. Como los espesores son los mismos, la superficie lateral de la piedra pequeña es la mitad de la superficie lateral de la grande. Sea x el radio de la piedra pequeña: su superficie lateral es $\pi x^2 - \pi 4^2 = \pi (x^2 - 16)$. La superficie lateral de la piedra grande es $\pi \times 28^2 - \pi \times 4^2 = \pi \times 768$

$$\pi \times 768 = 2\pi (x^2 - 16)$$
$$768 = 2 (x^2 - 16)$$
$$x^2 = 400$$
$$x = 20$$

El precio de la piedra pequeña será de $357 \times 20/28 = 357 \times 5/7 = 255$ francos.

Volver

71. La esfera hueca y el geómetra sagaz

El volumen de una esfera es los 2/3 del volumen del cilindro en el cual aquella puede inscribirse:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}(2\pi R^3)$$

Cuando la esfera se hunde en el cilindro desaloja los 2/3 del agua contenida en ese cilindro. El aumento de peso es, pues, el peso de la esfera (40 kilos) menos los dos tercios del peso del agua contenida inicialmente en el cilindro, lo cual, en kilos, es igual a los dos tercios del volumen del cilindro, expresado dicho volumen en decímetros cúbicos.

$$20 = 40 - 0{,}666\ V$$
$$V = 30\ dm^3$$

El volumen de la esfera es V' = 0.666 V = 20 dm^3 y su densidad es 40/V' = 2.

Volver

72. El imposible cuadrado de cubos

$7 + 10 = 17$ es la diferencia de dos cuadrados.
$17 = n^2 - p^2 = (n + p)\,(n - p) = 1 \times 17$
luego $n + p = 17$ $\quad n - p = 1$ $\quad n = 9$ $\quad p = 8$.
Balthazar tiene $9^2 - 7 = 74$ cubos.

Volver

73. Las angustias del rabino Nehemías

Sea *x* el espesor buscado (en codos).

$$\left(3+\frac{1}{7}\right)\times(10-2x)=30$$

Luego: $x=\frac{10}{44}$ de codo

Pero la interpretación de Nehemías es incompatible con el texto: el cordel de 30 de codo evidentemente se aplicaba al exterior del mar de bronce fundido. Esa interpretación hasta está en contradicción con lo que se precisa en I Reyes VII, 26: "Su espesor era de un palmo". Ahora bien, el codo tenía 6 palmos. De manera que

10/44 de codo = 15/11 de palmo = 1,37 de palmo.

Volver

74. Si a usted le gustan los espárragos...

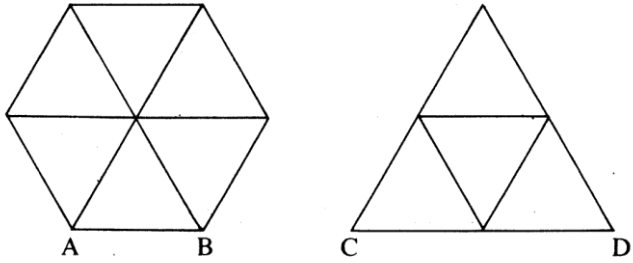
La cantidad de espárragos del manojo es aproximadamente proporcional a la superficie del círculo formado por el bramante.

Cuando se dobla la longitud del bramante se dobla el radio del círculo, y la superficie de ese círculo está multiplicada por 4 ($S = \pi R^2$).

De suerte que los nuevos manojos contienen cuatro veces más espárragos y su precio debería ser $8 \times 4 = 32$ francos.

Volver

75. Los hilos del faraón



Consideremos un hexágono regular de lado AB y un triángulo equilátero de lado CD igual a 2AB.

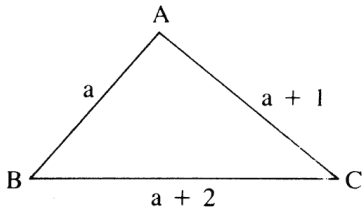
Estos dos polígonos tienen evidentemente perímetros iguales. Si establecemos ahora los puntos medios de los lados del triángulo, M, N, P, dividimos el triángulo en cuatro triángulos iguales.

En el hexágono hay seis de estos triángulos cuya superficie es pues 6/4 = 3/2 de la superficie del triángulo.

Ahmés recibió 20 × 3/2 = 30 dunames.

Volver

76. El secreto del triángulo de las Bermudas



$$\hat{A} = 2\hat{C}$$

El doble de la superficie del triángulo puede escribirse:

$$(a+1)(a+2)\,\text{sen}\,\hat{C} = a(a+1)\,\text{sen}\,\hat{A} = 2a(a+1)\,\text{sen}\,\hat{C}\cos\hat{C}$$

Luego: $\cos\hat{C} = \frac{a+2}{2a}$

Una fórmula clásica permite calcular el lado AB

$$\overline{AB}^2 = a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)\cos\hat{C}$$

Reemplazando cos C por el valor antes obtenido, tenemos:

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

luego

$$a = 4$$

Los lados del triángulo son: 4, 5 y 6.

Volver

77. Las cuatro medallas

Sean X, A, B, C, *x, a, b, c* los centros y los diámetros (en milímetros) de la medalla grande y de las medallas pequeñas.
x, a, b, c son números enteros y

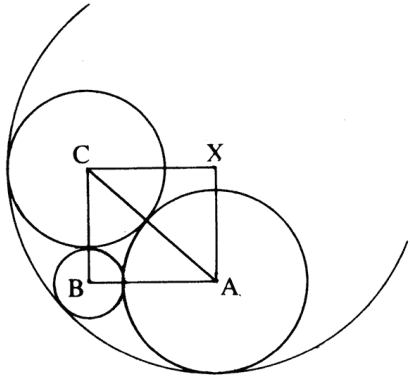
$$x = a + b + c \quad (1)$$

podemos suponer a ≥ c ≥ b.
Cuando las medallas están dispuestas tangencialmente, sus centros forman un cuadrilátero XABC que es un rectángulo, pues sus lados opuestos son iguales y también son iguales sus diagonales.
En efecto:

$$\text{X A} = \frac{x}{2} - \frac{a}{2} \qquad \text{B C} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

X A = B C de acuerdo con (1)

Asimismo X C = A B, AC = XB.



$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2$$

Luego: $ac - b\,(a + c) = b^2$ (2)

Por otro lado: la superficie de la medalla grande no cubierta por las medallas pequeñas es equivalente a un círculo cuyo cuadrado del diámetro es 4.830 y cuya superficie es, pues, $\pi \times 4.830/4$

$$\pi \times \frac{4.830}{4} = \pi \frac{x^2}{4} - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right)$$

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 4.830 \qquad (3)$$

Elevemos al cuadrado los dos miembros de la igualdad (1)

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab + 2\,bc + 2\,ca \qquad (4)$$

De la comparación de (3) y (4) resulta

$$ac + bc\,(a + c) = 2.415 \qquad (5)$$

(2) y (5) permiten calcular ac y $b\,(a + c)$ en función de b^2

$$ac = \frac{2.415 + b^2}{2} \qquad (6)$$

$$b\,(a + c) = \frac{2.415 - b^2}{2} \qquad (7)$$

De conformidad con (7): $2b\,(a + c) + bz^2 = 2.415 = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 23$ con $b^2 < 2.415$ o $b < 50$

b es uno de los divisores de 2.415 inferiores a 50 que son:

1, 3, 5, 7, 15, 21, 23, 35

De manera que puede establecerse la siguiente tabla:

b	1	3	5	7	15	21	23	35
b^2	1	9	25	49	225	441	529	1.225
ac	1.208	1.212	1.220	1.232	1.320	1.428	1.472	1.820
$b\,(a + c)$	1.207	1.203	1.195	1.183	1.095	987	943	595
$a + c$	1.207	401	239	169	73	47	41	17

a y c son raíces de la ecuación $x^2 - (a + c)\,x - ac = 0$.

Esta ecuación no tiene raíces para los valores de $a + c$ y ac correspondiente a $b = 21$, 23 o 35 (determinante negativa).

Por otra parte, como a y c son números enteros, la determinante de la ecuación debe ser un cuadrado perfecto. Únicamente los valores de $(a + c)$ y ac correspondientes a $b = 15$ convienen. Las dos raíces son pues 40 y 33.

El problema no admite más que una solución:

$$b = 15 \quad a = 40 \quad c = 33 \quad x = 88$$

Volver

78. Tubérculos

$$\sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} = 18$$

Pongamos $\sqrt[3]{a} = \alpha$; $\alpha\sqrt{\alpha} - \alpha = 18 = 1 \times 2 \times 3 \times 3$
α divide 18 que tiene por divisores 1,2, 3, 6, 9, 18.
Por otro lado, α debe ser un cuadrado (√α entero).
α = 1 no conviene, entontes α = 9

$$a = \alpha^3 = 9^3 = 729 = (\alpha\ \sqrt{\alpha})^2 = 27^2$$

$$27 - 9 = 18$$

Volver

79. Tresillo

La raíz cúbica de 17.299 es 25,86... (Inaudi sólo tardaba unos pocos segundos en extraer esta raíz.)

El mayor de los números *a*, *b*, *c* es pues inferior o igual a 25. Probemos con 25.

$$a = 25 \quad a^3 = 25^3 = 15.625$$

$$b^3 + c^3 = 17.299 - 15.625 = 1.674$$

$$\text{con } b + c = 43 - 25 = 18$$

Probemos con $b = 10$ entonces $c = 8$ $b^3 + c^3 = 1.512$. Encontramos un número demasiado pequeño en el caso de $b^3 + c^3$; la diferencia entre *b* y *c* debe ser mayor.

Probemos con $b = 11$ entonces $c = 7$ $b^3 + c^3 = 1.674$

Los tres números son pues: 25, 11 y 7.

Volver

80. Cuarteto

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 13.411$$

$$\sqrt{13.411} = 115,...$$

El número mayor *a* es pues igual o inferior a 115.

Probemos con a = 115

$$a^2 = 13.225 \qquad b^2 + c^2 + d^2 = 186$$

$$\sqrt{116} = 13,...$$

b, el mayor de los números *b*, *c*, *d*, es pues inferior o igual a 13. Probemos con b = 13

$$b^2 = 169 \qquad c^2 + d^2 = 186 - 169 = 17$$

$$\text{entonces } c = 4, \qquad d = 1$$

$$115^2 + 13^2 + 4^2 + 1^2 = 13.411$$

Un minuto después Inaudi halló una segunda solución: 113, 25, 4, 1, y 3 minutos después una tercera solución: 113, 23, 8, 7.

Volver

81. Boliche

La potencia 5 de un número tiene la misma cifra de unidades que el número mismo.

$$N^5 - N = N\,(N^4 - l) = N\,(N + l)\,(N - l)\,(N^2 + l)$$

$N^5 - N$ es evidentemente par. Resulta fácil demostrar teniendo en cuenta las igualdades arriba expuestas que el número es divisible por 5. De manera que $N^5 - N$ es divisible por $2 \times 5 = 10$, que termina en 0, lo cual muestra que N^5 y N tienen la misma cifra de unidades.

(X) conocía esta propiedad.

Las potencias cualesquiera de un número terminado en 5 (múltiplos impares de 5) terminan en 5.

Las potencias cualesquiera de un número terminado en 1 terminan en 1. La cifra buscada de las unidades es pues:

$$(7 - 5) \times 1 = 2$$

Volver

82. Colinabo

$1^{64} = 1$
$3^{64} = (3^8)^8 = (81 \times 81)^8 > 6.400^8 > 6^8 \times (10^3)^8 = 6^8 \times 10^{24}$
3^{64} tiene más de 20 cifras.

La única potencia sexagésima cuarta que pueda tener veinte cifras es la de 2. (X) no resolvió la cuestión de esta manera, sino que lo hizo de la manera siguiente. Pensó que 2 podía ser la solución y así verificó:

$$\log 2^{64} = 64 \log 2 = 64 \times 0{,}30103 = 19{,}...$$

2^{64} tiene pues (19 + 1) veinte cifras.

El hecho de que (X) supiera de memoria el valor de log 2 no tiene nada de sorprendente. Por ejemplo, todos los ex alumnos del Politécnico conocen ese logaritmo.

Volver

83. El caballo de Elberfeld

$$x^4 = 7.890.481$$

Situemos x

$$10^4 = 10.000$$
$$100^4 = 100.000.000$$
$$50^4 = 6.250.000$$

x está comprendido entre 50 y 100 y está cerca de 50

$$x^4 = x^2 \times x^2$$

Si x^4 termina en 1, x^2 termina en 1 o en 9.
Si x^2 termina en 1, x termina en 1 o en 9.
x puede ser 51 (sin duda demasiado pequeño) o 59, demasiado grande. Si x^2 termina en 9, x termina en 3 o en 7.
x puede ser 53 o 57, este último sin duda demasiado grande. La solución es 53.

$$53^4 = 7.890.481$$

Un calculador un poco entrenado puede proceder tan bien como el caballo de Elberfeld.

Volver

84. Multiplicación supersónica

$$G = 1.000.000.001 / 7 = (10^9 + 1) / 7$$

$$G \times \overline{\text{abc def ghı}} = \frac{\left(10^9 \times \overline{\text{abc def ghı}} + \overline{\text{abc def ghı}}\right)}{7}$$

$$= \frac{\overline{\text{abc def ghı abc def ghı}}}{7}$$

*

Para multiplicar G por un número P de menos de 9 cifras —por ejemplo, de *p* cifras— basta con escribir el número formado por P seguido de (9 – *p*) ceros, seguido de P y dividir el número así obtenido por 7.

Volver

85. La ecuación del solitario

$$a^2 - (a - 1)\,(a + 1) = a^2 - (a^2 - 1) = 1$$

$$x = 1$$

Volver

86. Un pariente del señor Joule

Watt, Kant, Hugo, Zola, Sand, Dalí, Bach, Cook.

(El alfabeto utilizado es el "alfabeto de los francmasones" que data de la Edad Media.)

Volver

87. La resta de Harpagon

Fácilmente se halla D = C – 1 C = A – B A – B = 5

luego C = 5, D = 4.

$$\overline{\text{CDDC}} = 5.445$$

Volver

88. Las multiplicaciones de Santa Bárbara

$$1.738 \times 4 = 6.952$$

$$483 \times 12 = 5.796$$

La solución se facilita si recordamos la fecha de la fiesta de Santa Bárbara: 4 de diciembre o 4/12.

Volver

89. Ex nihilo

$$
\begin{array}{r}
179 \\
\times\ 224 \\
\hline
716 \\
358 \\
358 \\
\hline
40.096
\end{array}
$$

Volver

90. Fidelidades de la diferencia

Sea resolver el problema en el caso de un número de tres cifras: $\overline{abc}$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 99\,(a - c) \qquad a > c$$

La resta se presenta así:

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ c\ b\ a \\ \hline (a - c - 1)\quad 9\,(a + 10 - a) \end{array} \qquad a > c$$

De manera que $a = 9$ o $b = 9$; supongamos $a = 9$

$$\begin{array}{r} 9\ b\ c \\ c\ b\ 9 \\ \hline 8 - c\ 9\ c + 1 \end{array}$$

luego $8 - c = c$ $c = 4$ $b = c + 1 = 5$

$$954 - 459 = 495$$

No hay otra solución. En efecto, $b = 9$ conduce a una imposibilidad. La solución única es pues 954 – 459 = 495.

*

Con cuatro cifras tenemos:
9108 – 8019 = 1.089.
Con ocho cifras tenemos:
8.754.210 – 01.245.789 = 97.508.421
Con nueve cifras tenemos:
987.654.321 – 123.456.789 = 864.197.532
Con diez cifras tenemos:
9.876.543.210 – 0.123.456.789 = 9.753.086.421
No hay solución con los números de una, dos, cinco, seis, siete cifras.

Volver

91. Alegrías y trabajos de la inversión

$$N = \overline{abcde} \qquad a > e$$

N – N' = 9999 *(a – e)* + 990 *(b – d)* = 99 [101 (*a – e*) + 10 (*b – d*)] = 99 P.

$$01234 \leq N - N' \leq 97.531 \qquad 012 < P \leq 985$$

Se multiplicarán por 99 los números que van de 13 a 985 y se retendrán aquellos productos compuestos de cinco cifras diferentes. Esto representa 972 multiplicaciones pero se puede reducir mucho el número estudiando la estructura de P.

$$P = 100\,(a - e) + 10\,(b - d) + a - e$$

Supongamos $b > d$. Entonces P se escribirá:

$$\overline{(a-e-1)\,(d-b)\,(a-e)} = \overline{\alpha\,\beta\,\alpha}\ , \qquad \text{forma (1)}$$

Supongamos $b < d$. Entonces P se escribirá:

$$\overline{(a-e-1)[10-(d-e)](a-e)} = \overline{(\alpha-1)\beta\,\alpha}\ , \quad \text{forma (2)}$$

De los números que van de 012 a 985 sólo se retendrán aquellos que tienen la forma (1) o la forma (2); son ciento ochenta y ocho. Diversas observaciones permiten eliminar una buena parte de ellos. Finalmente:

N = 72.891 forma (2)

72.891	72.891
+ 19.827	– 19.827
92.718	53.064

= 99.536

Volver

92. Un oficio peligroso

La probabilidad de que Ramírez viva después de la primera corrida es $1 – 0,5$.
Después de la segunda corrida: $(1 – 0,5) \times (1 – 0,5)$ o $(1 – 0,5)^2$
Después de la décima corrida:$(1 – 0,5)^{10} = (0,5)^{10} = 1/(2)^{10} = 1/1.024$
O sea, menos de una posibilidad entre mil.
¡Pobre Ramírez!

Volver

93. La escandalosa velada del cumpleaños de Clovis

Hay seis maneras de marcar siete puntos con dos dados (1, 6; 6, 1; 2, 5; 5, 2; 3, 4; 4, 3) y hay sólo una manera de marcar dos puntos o doce puntos.
Clovis había elegido el número 7; Clotaire y Cléobule habían elegido el 2 y el 12.
Como el número de combinaciones posible es 36, la posibilidad de que salga 7 es 6/36 = 1/6
En 360 tiros, número bastante elevado para que se verifique aproximadamente la ley de los grandes números, Clovis ganó alrededor de 60 veces.
Su ganancia final, descontadas las puestas, se acercó pues a

$$60 \times 11 \times 10 - 360 \times 10 = 3.000 \text{ F}$$

Mucho más de lo que le había costado la cena ofrecida a sus sobrinos y sobrinas.
(Clotaire y Cléobule perdieron alrededor de 2.500 francos cada uno.)

Volver

94. Tres cartas para jugar

En cada reparto de cartas se distribuyen $p + q + r$ fichas, luego en N repartos de cartas:

$$N\,(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 39 = 3 \times 13$$

3 y 13 son primos, N = 3 o 13; $(p + q + r) = 13$ o 3
$(p + q + r)$ es mayor que 3, puesto que $r > q$ y $q > p$, *de* suerte que $p + q + r = 13$ y N = 3.

Como B recibió r fichas en el último reparto de cartas, recibió forzosamente p fichas en cada uno de los dos primeros repartos. En efecto, no pudo recibir $p + q + r$ ni $q + q + r$ ni menos $r + r + p$ pues todos esos repartos son superiores a 10.
De manera que

	A	B	C
(1)	.	p	.
(2)	.	p	.
(3)	.	r	.
	20	10	9

Por la misma razón, C no puede haber recibido r fichas en ningún reparto de cartas, luego recibió q y q fichas en los dos primeros repartos.
Por otro lado, A no pudo recibir p fichas en el último reparto, pues tendríamos $2r + p = 20$ (parte de A) y $2p + r = 10$ (parte de B) lo que implicaría $p = 0$.
La distribución global fue pues la siguiente:

	A	B	C
(1)	r	p	q
(2)	r	p	q
(3)	q	r	p
	$2r + q$	$2p + r$	$2q + p$
	20	10	9

$$2r + q = 20 \qquad q = 20 - 2r$$

$$2p + r = 10 \qquad p = 5 - r/2$$

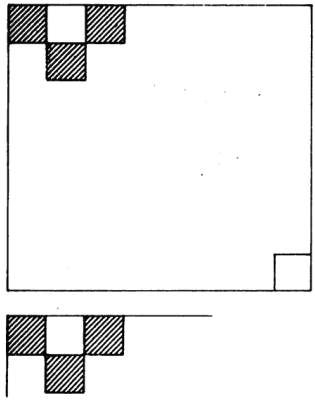
$$2q + p = 9$$

y, reemplazando p y q por sus valores en función de r:

$$r = 8 \quad \text{luego } p = 1 \qquad q = 4$$

Volver

95. Azarosas tribulaciones de un dominó



Alternadamente demos color blanco y negro a las casillas de los marcos, como en un tablero de damas. En cada marco, el número de las casillas es impar, las casillas más numerosas, en una unidad, son las del color que está arriba y a la izquierda (aquí, las casillas negras). Cada dominó rectangular cubre una casilla blanca y una casilla negra. La operación de cubrir sólo será posible si en el interior del marco, después de haber quedado excluida una casilla, quedan tantas casillas negras como casillas blancas, es decir, si se ha excluido una casilla negra.

En el marco cuadrado hay 81 casillas de las cuales 41 son negras. La probabilidad de dejar excluida una casilla negra al azar es pues de 41/81.

En el marco rectangular hay 77 casillas de las cuales 39 son negras. La probabilidad de que quede excluida una casilla negra es pues de 39/77.

$$\frac{39}{77} > \frac{41}{81}$$

Conviene, pues, elegir el marco rectangular.

Volver

96. Series amarillas

1) Los números indicados tienen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 letras.
2) En el orden alfabético.
3) Los términos son las diferencias entre los números compuestos a partir de 1 (de 2, 3, 4, 5 cifras consecutivas) y los números invertidos.

$$? = 654.321 - 123.456 = 530.865$$

4) Los términos son los números de segundos de un minuto, de una hora, de un día, de una semana... y de un año.
El término que falta es $60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31.536.000$
5) Los elementos de la figura son cuadrados mágicos y resulta evidente que $x = 3$; en lo que se refiere a y: el elemento central de un cuadrado mágico de módulo 3 es el tercio de la suma común.

$$y = \frac{1}{3}(4 + 11 + 6) = 7$$

6) Los términos son los números intercalados entre los dobletes sucesivos de números primos (números primos diferentes de 2).

Volver

97. Los transatlánticos de Édouard Lucas

Un transatlántico procedente de El Havre encontrará evidentemente en el mar a los seis transatlánticos procedentes de Nueva York y además al que parte al mismo tiempo que él, es decir, 7.

Encontrará a los buques que partieron de Nueva York, un día, dos días, ..., seis días después de su propia partida.

Encontrará al buque que parte 7 días después de su propia partida en la llegada al puerto de Nueva York; ése no entra pues en nuestras cuentas. El número pedido es:

$$7 + 6 = 13$$

Volver

98. El centauro trabado

1)

$$
\begin{aligned}
100 &= 22 \times 2 \times 2 + 2 + (2 \times 2 \times 2) + 2 \\
&= 333 / 3 - (3 \times 3) - 3 + (3 / 3) \\
&= 444 / 4 - 4 - 4 - 4 + (4 / 4) \\
&= 5 \times 5 \times 5 - (5 \times 5) + 5 - 5 + 5 - 5 \\
&= 66 + (6 \times 6) - [(6 + 6)/6 \times 6 / 6] \\
&= 7 \times 7 \times (7 + 7) / 7 + (7 / 7) + (7 / 7) \\
&= 88 + 8 + [8 \times 8 \times 8 / 8 / (8 + 8)] \\
&= (99 + 99) / (9 + 9) \times 9 + (9 / 9)
\end{aligned}
$$

2) Hay 11 soluciones

$$
\begin{aligned}
100 &= 123 - 45 - 67 + 89 \\
&= 123 + 45 - 67 + 8 - 9 \\
&= 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\
&= 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 \\
&= 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\
&= 12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 \\
&= 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 \\
&= 1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 \\
&= 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 \\
&= 1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 \\
&= 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9
\end{aligned}
$$

3)

$$-100 = 1 - 2 + 3 - 4 - 5 - 6 - 78 - 9$$

Volver

99. Juego de fósforos

$(8 = 2^3)$

Volver

100. Algunos problemas sobre los números enteros

(1) $\overline{aa\,bb} = 11(100 \cdot a + b) = 11^2 \cdot n^2$ $a = 1$ $b = 4$

Volver

(2) $M^2 + N^2 = P^2$ Partimos de la identidad
$(A^2 - B^2)^2 + (2A \times B)^2 = (A^2 + B^2)^2$
Pongamos $M = A^2 - B^2$, $N = 2AB$, entonces $P = A^2 + B^2$
Hay una infinidad de soluciones de varios tipos:
$3^2 + 4^2 = 5^2$,
$5^2 + 12^2 = 13^2$,
$8^2 + 15^2 = 17^2$,
$7^2 + 24^2 = 25^2$, etc.

Volver

(3) $5.776 = 76^2$, única solución.

Volver

(4) Si un número es divisible por 9 o por 11, el número escrito al revés es divisible también por 9 o por 11.
Esta observación nos lleva a dos soluciones:
$108.900 = 330^2$ $009.801 = 99^2$
$698.896 = 836^2$

Volver

(5) $2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, etc.
Hay una infinidad de soluciones.

Volver

(6) Por ejemplo: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
Hay una infinidad de soluciones.

Volver

(7) Hay cinco soluciones:

8, pues $8^3 = 512$ y $5+ 1 + 2 = 8$

18, pues $18^3 = 5832$ y $5 + 8 + 3 + 2 = 18$

17, pues $17^3 = 49.913$ y $4 + 9 + 1 + 3 = 17$

27, pues $27^3 = 19.683$ y $l + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$

26, pues $26^3 = 17.576$ y $1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$

Volver

(8) $9.814.072.356 = 99.066^2$

La raíz 99.066 no se altera ni se la lee con el libro vuelto al revés.

Volver

(9) Cuatro soluciones:

$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$

$3^3 + 7^3 + 0^3 = 370$

$3^3 + 7^3 + l^3 = 371$

$4^3 + 0^3 + 7^3 = 407$

para $n = 4$

$8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8.208$

para $n = 5$

$5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 = 54.748$

para $n = 6$

$5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6 = 548.834$

Volver

(10) Hay seis soluciones:

$1 = l^3$

$512 = (5 + 1 + 2)^3$

$4.913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$

$5.832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3$

$17.576 = (1 + 7 + 5 + 7\ 4- 6)^3$

$19.683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$

Volver

(11) $x\frac{(x+1)}{2} = \overline{a\,a\,a} = 3 \times 37 \times a$

luego $a = 6$ y $x = 36$

La suma de los 36 primeros números es 666.

Volver

(12) $5^2 + 2 = 3^3$

Fermat demostró que esta solución era la única.

Volver

(13) Sea n el número buscado

$2\,n = 9 + 2 \times 90 + 3 \times (n - 99)$

$n = 108$

Volver

(14) $\overline{a\,b\,c} = a + b^2 + c^2$

$c^3 - c = b\,(10 - b) + 99\,a$

$c > 4$

Hay cuatro soluciones:

$175 = 1 + 7^2 + 5^3$

$518 = 5 + 1^2 + 8^3$

$135 = 1 + 3^2 + 5^3$

$598 = 5 + 9^2 + 8^3$

Volver

(15) $405^3 = 66.430.125$

$384^3 = 56.623.104$, por ejemplo.

$345^3 = 41.063.625$

Volver

(16)

$12^2 = 144$	y $21^2 = 441$
$32^2 = 1.024$	y $49^2 = 2.401$
$32^4 = 1.048.576$	y $49^4 = 5.764.801$
$101^2 = 10.201$	y $110^2 = 12.100$

$101^3 = 1.030.301$ y $1\ 10^3 = 1.331.000$
$101^4 = 104.060.401$ y $110^4 = 146.410.000$
$178^2 = 31.684$ y $196^2 = 38.416$
$178^3 = 5.639.752$ y $196^3 = 7.529.536$, etc

Volver

(17) $144 = 12^2$ $169 = 13^2$
$441 = 21^2$ $961 = 31^2$, por ejemplo.

Volver

(18) 144 y 441 - 169, 961 y 196
256 (o 16^2) y 625 (o 25^2)
1.024 (o 24^2) y 2.401 (o 49^2)
1.296 (o 36^2), 2.916 (o 54^2), 9.216 (o 96^2).

Volver

(19) No en nuestro sistema de numeración de base 10. Pero existen en otros sistemas de numeración. Por ejemplo:
en base 3 / $11 = 2^2$ $11.111 = 102^2$
en base 7 / 22, 1.111, 4.444
en base 8 : 44

Volver

(20) Sí, por ejemplo:
$152.843.769 = 12.363^2$
$157.326.849 – 12.543^2$
$215.384.976 = 14.676^2$

Volver

(21) La solución más breve es:
$119^2 + 120^2 = 13^4$

Volver

(23) $\overline{a\,b\,c} - \overline{c\,b\,a} = 9 \times 11 \times (a - c)$
$\overline{a\,b\,c} = 954$
954 – 459 = 495

Volver

(24) 273, que se escribe 111 en la numeración de base 16 y 333 en la numeración de base 9.
9114, que se escribe 222 en el sistema de numeración de base 67 y $\overline{(14)\,(14)\,(14)}$ en base 25, por ejemplo.

Volver

(26) $4444^{4444} - A = M_o\ 9$, según el carácter de divisibilidad por 9,
$A - B = M_o\ 9$
Luego $4444^{4444} - B = M_o\ 9$ (1)
Consideremos el número
$4444^{a444} - 4444 = 4444\ (4444^{a443} - 1)$
Digo que $4444^{4443} - 1 = M_o\ 9$.
En efecto: $4444 = M_o\ 9 + 7$
$4444^{4443} = (M_o\ 9 + 7)^{4443} = M_o\ 9 + 7^{4443} =$
$= M_o\ 9 + (7^3)^{1481} = M_o\ 9 + (M_o\ 9 + l)^{1481} = M_o\ 9 + 1.$
Luego $4444^{4444} - 4444 = M_o\ 9$ (2)
(1) y (2) dan:
$4444 - B = M_o\ 9$
$B = M_o\ 9 + 7$
$4444 < 10^4$ $4444^{4444} < 10^{17.776}$
El número 4444^{4444} tiene a lo sumo 17.776 cifras, por lo tanto, $A \leq 17.776 \times 9 = 159.984$.
A tiene pues a lo sumo seis cifras, y $B \leq 6 \times 9 = 54$ Los números B, múltiplos de 9 + 7 e inferiores a 54, son:
07 16 25 34 43 52
Para cada uno de estos números B, la suma de las cifras es 7.

Volver

(27) Hay trece soluciones:
N = 125 $N^3 = 1.953.125$ y N' = 875
$N'^3 = 669.921.875$ 875 = 1.000 – 125

N = 249 N^3 = 15.438.249 y N' = 751
N' ^{3} = 423.564.751 751 = 1.000 – 249
N = 251 N^3 = 15.813.251 y N' = 749
N' ^{3} = 420.189.749 749 = 1.000 – 251
N = 375 N^3 = 52.734.375 y N' = 625
N' ^{3} = 244.140.625 625 = 1.000 – 375
N = 376 N^3 = 53.157.376 y N' = 624
N' ^{3} = 242.970.624 624 = 1.000 – 376
N = 499 N^3 = 124.251.499 y N' = 501
N' ^{3} = 125.751.501 501 = 1.000 – 499

N = 999 N^3 = 997.002.999

Volver

(28) 90.703.125 / 129 = 703.125
703.125 / 225 = 3.125
3.125 / 25 = 125
125 / 5 = 25
25 / 5 = 5

Volver

(29) l, 5, 7

Volver

(30) Descompongamos el número A en factores primos:
$A = a^m \times b^n \times c^p \times d^q \ldots$, a, b, c, son diferentes de 1.
El número de los divisores de A es $N = (m + 1)(n + 1)(p + 1)(q + 1) = 100 = 5 \times 5 \times 2 \times 2$
Luego $N = a^4 \times b^4 \times c \times d$
El número N menor es:
$2^4 \times 3^4 \times 5 \times 7 = 45.360$

Volver

(31) 83.161

Volver

(32) Imaginemos los números de 0 a 999 999 999 escritos en dos columnas de la manera siguiente:

0	999.999.999
1	999.999.998
. . . . .	. . . . .
499.999.999	500.000.000

En cada una de los 500.000.000 de líneas, la suma de las cifras es 81.
La suma de cifras buscada es pues 500.000.000 × 81 + 1 (1 corresponde al número de 1.000 millones, no escrito en las líneas)
500.000.000 × 81 + 1 = 40.500.000.001
(El número de cifras que ha de utilizarse —ésta es otra cuestión— es 8.888.888.899)

Volver

(35) Todas las potencias de 2 son números casi perfectos del tipo 1.
2^n tiene como divisores 1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1} que forman una progresión geométrica de suma $Sn = 1 \times \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$
De manera que $2^n = Sn + 1$.
No se sabe si existen *números casi perfectos* del tipo 1 además de los números 2^n.

Volver

101. El banquete de los 41

Sean h, f, e los números de hombres, de mujeres y de niños.

$$h + f + e = 41 \qquad \text{(l)}$$

$$4\,h + 3\,f + 1/3\,e = 40, \text{ o } 12\,h + 9\,f + e = 120 \qquad (2)$$

Restemos (1) de (2)

$$11\,h + 8\,f = 79, \text{ por lo tanto, } h \leq 6$$

$$3\,h + 8\,h + 8\,f = 8 \times 9 + 7$$

$$3\,h = \text{M}e\ 8 + 7 = \text{M}e\ 8 + 15$$

$$h = \text{M}e\ 8 + 5$$

y como $h \leq 6$ $\quad h = 5$, luego $f = 3$ $\quad e = 33$

Este problema había sido estudiado por Luca Pacioli, Tartaglia, Bachet de Méziriac.

Volver

102. Mil dracmas en total

Sean h y f el número de hombres y el número de mujeres.

$$h > f$$

$$1000 = 19\,h + 13\,\text{f}$$

$$19\,h = 1.000 - 13\,f \qquad (1)$$

$$6\,h + 13\,h = 13 \times 76 + 12 - 13\,f$$

$$6\,h = \text{Me}\ 13 + 12$$

$$h = \text{Me}\ 13 + 2 \qquad (2)$$

(1) muestra que $19\,h < 1.000 - 13 \qquad h \leq 51$

y como $h > f$

$$19\,h > 1.000 - 13\,h$$

$$32\,h > 1.000 \qquad h > 31$$

En estas condiciones, de conformidad con (2)

$$h = 3 \times 13 + 2 = 41$$

por lo tanto, $f = 17$

Este problema fue propuesto por Euler.

Volver

103. Las siete opciones de Thomas

Sean *c* el número de caballos comprados en la primera operación; *x* e *y* los números de bueyes y caballos comprados en una operación cualquiera.

Cuando Thomas compra *x* bueyes gasta $x \times 19$ más que en la primera operación; este gasto suplementario debe compensarse comprando menos caballos, *y* en lugar de *c*. Luego

$$x \times 19 = (c - y) \times 31$$

como 31 es primo con 19 divide *x*. Podemos poner $x = 31\ p$; *p* es entero.

$$\text{entonces } 19\ p = c - y \qquad\qquad y = c - 19\ p$$

Thomas puede hacer siete operaciones. De manera que hay que a dar a *p* siete valores, incluso el cero, puesto que en la primera operación $x = 0$.

p	*x*	*y*	*suma gastada*	
0	0	*c*	$c \times 31$	
1	31	$c - 19$	$31 \times 19 + (c - 19)\ 31 =$	$c \times 31$
2	62	$c - 38$	$62 \times 19 + (c - 38)\ 31 =$	$c \times 31$
3	93	$c - 57$		$c \times 31$
4	124	$c - 76$		$c \times 31$
5	155	$c - 95$		$c \times 31$
6	186	$c - 114$		$c \times 31$

La última línea del cuadro, correspondiente a la operación en la que Thomas sólo compra bueyes, muestra que $c = 114$. De manera que la suma de que dispone Thomas es:

$$114 \times 31 = 3.534 \text{ escudos}$$

Hay que dar a *p* sólo los valores 0, 1, ..., 6. Si se adoptaran otros, el número de las soluciones sobrepasaría las 7 (2 + 5).

Volver

104. Problema de los tres objetos

Sean *x, y, z* los precios de los objetos.

El comprador puede adquirir N lotes compuestos por un objeto de cada clase o A objetos a *x* dracmas o B a *y* dracmas o C a *z* dracmas

$$N(x + y + z) = Ax = By = Cz = 6.279$$

6.279 debe poder dividirse por *x,* por *y,* por *z* y por su suma.
Ahora bien $6.279 = 3 \times 7 \times 13 \times 23$
y $3 + 7 + 13 = 23$
Los precios de los objetos son pues 3, 7 y 13 dracmas.

*

En realidad, este problema tiene nueve soluciones pues hay nueve maneras de elegir cuatro divisores de 6.279 de los cuales uno sea la suma de los otros tres.

$$6.279 = 1 \times 3 \times 7 \times 13 \times 23$$

6.279 tiene 16 divisores que son:
1, 3, 7, 13, 21, 23, 39, 69, 91, 161, 273, 299, 483, 897, 2.093, (6.279) y

1	+	7	+	13 = 21
3	+	7	+	13 = 23
3	+	13	+	23 = 39
7	+	23	+	39 = 69
69	+	21	+	1 = 91
91	+	69	+	1 = 161
161	+	91	+	21 = 273
3	+	23	+	273 = 299
299	+	161	+	23 = 483

Volver

105. La cifra 552.715ésima

Los números de una cifra (1,2, ... 9) constan de un total de nueve cifras.
Los de dos cifras (10, 11, ... 99) constan de 90 × 2 = 180 cifras.
Los de tres cifras (100, 101, ... 999) constan de 900 × 3 = 2.700 cifras.
Los de cuatro cifras (1.000, 1.001, ... 9.999) constan de 9.000 × 4 = 36.000 cifras.
Los números de cinco cifras (10.000, 10.001, ..., 99.999) constan de un total de 90.000 × 5 = 450.000 cifras.
Los números de seis cifras (100.000, 100.001, ..., 999.999) constan de un total de 900.000 -6 = 5.400.000 cifras.
El conjunto de 1, 2, 3, 4, 5 cifras consta de

$$9 + 180 + 2.700 + 36.000 + 450.000 = 488.889 \text{ cifras.}$$

El conjunto de los números de 1, 2, 3, 4, 5, 6 cifras consta de

$$488.889 + 5.400.000 = 5.888.889 \text{ cifras.}$$

La cifra 552.715ésima se sitúa pues en los números de seis cifras y en esta serie es la 552.715 – 488.889 = 63.826esima cifra.

$$63.826 = 10.637 \times 6 + 4$$

La cifra buscada es pues la cuarta del 10.638imo número de seis cifras, es decir, de 100.000 + 10.637 = 110.637

es pues 6.

Volver

106. El ferrocarril planeado con ruleta (rusa)

Se trata ciertamente de ruletas o ruedecillas o más bien de poleas. Se coloca A_1, A_2, etc. sobre una tablilla y se fija en cada uno de estos puntos una polea sobre la cual se tiende un cordel cargado con un peso proporcional al tráfico correspondiente; todos los cordeles están atados a un mismo anillo que representa el centro del tráfico; se deja que el aparato tome estado de equilibrio; la posición en que se fija el anillo en el lugar buscado y los cordeles dan las direcciones y las longitudes de las rutas que han de establecerse para las comunicaciones.

Si la vía en la cual se encuentra el centro del tráfico estuviera ya trazada, materializaríamos esta vía en la tablilla mediante un alambre de contornos semejantes, fijaríamos ese alambre al anillo y, como antes, se dejaría que el aparato tomara su posición de equilibrio.

Volver

107. Las trece cajas de Alí Babá

$$728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13 = 28 \times 26$$

Como los hombres están dispuestos en el orden indicado se los puede clasificar en 26 grupos de 28 hombres.
Si se relacionan ahora los grupos de a dos en dos: 1 y 26, 2 y 25, 3 y 24, etc., ..., se obtienen 13 asociaciones. Es fácil ver que en cada una de esas 13 asociaciones se ha distribuido el mismo número de monedas. El número total de monedas es pues divisible por 13.
De una manera mucho más erudita —y por el puro placer de complicar las cosas— se puede razonar también así:

La suma de los n primeros números impares

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) \text{ es igual a } n^2$$

(suma de una progresión aritmética de primer término 1 y de razón 2)

$$1 + 3 + 5 ... + (2 \times 729 - 1) = 729^2$$

729 números.

Restemos 1 de esta suma. Obtendremos 728 números cuya suma representará el total de las monedas necesarias para llevar a cabo la distribución.

$$3 + 5 + ... + (2.729 - 1) = 729^2 - 1$$

$$729^2 - 1 = (3^6)^2 - 1 = 3^{12} - 1$$

Según uno de los teoremas de Fermat, $a^{p-1} - 1$ es divisible por p si p es primo.

$$3^{12} - 1 = 3^{13-1} - 1 \text{ es pues divisible por 13.}$$

Volver

108. El problema de los 10 sombreros

Sea n el número de los viajeros, sea p_n la probabilidad buscada, sea f_n el número total de los casos favorables (ningún viajero tiene su sombrero) y sea t_n el número de casos posibles. t_n es evidentemente igual al número de permutaciones posibles de los n sombreros, luego, igual a $n!$:

$$p_n = \frac{f_n}{n!}$$

Calculemos f_n dando a n valores sucesivos partiendo de 1.
Se comprobará o se establecerá fácilmente que

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 1 \qquad f_3 = 2$$

Calculemos f_4. Sean A, B, C, D los cuatro viajeros y a, b, c, d sus sombreros.
Supongamos que A haya recibido el sombrero b y que sea f_{Ab} el número de casos favorables correspondientes a esta hipótesis.
1) B recibió 1 sombrero a – $f_{At\,Ba}$ casos favorables
$f_{Ab\,Ba}$ = es igual al número de casos favorables en el reparto de c y d entre C y D. Es f_2.
2) B recibió uno de los sombreros c o d

$$f_{Ab\,Be\,d} = 2\, f_{Ab\,Bc}$$

y se comprueba fácilmente que $f_{Ab\,Bc} = 1$
Luego

$$f_{Ab} = f_2 + 2 \times 1$$

Se pueden recibir los sombreros c y d *en* las mismas condiciones que b, entonces $f_4 = 3\, f_{Ab} = 3\,(f_2 + 2 \times 1) = 3\, f_2 + 3 \times 2 \times 1$.
De la misma manera se calculará f_5

$$F_5 = 4\, f_3 + 4 \times 3 \times f_2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Aparece aquí la ley de formación de f_n. Si el lector no la discierne todavía completamente, puede calcular f_6.

$$F_6 = 5\, f_4 + 5 \times 4 \times f_3 + 5 \times 4 \times 3 \times f_2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

de ahí la fórmula general:

$$f_n = (n-1)\, f_{n-2} + (n-1)\,(n-2)\, f_{n-3} \ldots + (n-1)\,(n-2) \ldots 3 \times f_2 + (n-1)\,(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

Para resolver el caso particular propuesto se calculará sucesivamente mediante la fórmula general que acabamos de exponer:

$$f_2 = 1 \quad f_3 = 2 \quad f_4 = 9 \quad f_5 = 44 \quad f_6 = 265$$

$$f_7 = 1.854 \qquad f_8 = 14.833 \quad \ldots f_{10} = 1.334.961$$

$$p_{10} = \frac{1.334.961}{10!} = \frac{3^4 \times 16.481}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$$

$$= \frac{16.481}{2 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 8 \times 10} = 0{,}36787 \ldots$$

*

Mediante procedimientos menos elementales se demuestra que p_n es la suma de los dos $(n + 1)$ primeros términos del desarrollo en serie de

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Cuando *n* varía, las probabilidades son alternativamente inferiores y superiores a 1/*e*. Cuando *n* tiende al infinito, p_n tiende a 1/*e*
En el caso n = 10, p_{10} sólo difiere de 1/*e* en alrededor de 2 diezmillonésimos.

$$P_{10} = 0{,}3678794\ldots/e = 0{,}3678796 \ldots$$

*

Este problema es un caso particular del clásico "problema de los encuentros" que fue objeto de numerosos trabajos. Con un poco de paciencia y atención es posible sin embargo resolverlo utilizando sólo elementos matemáticos rudimentarios.

Volver

109. El teorema de Fermat

El rey cometió un error de cálculo, pues una potencia cualquiera de un número par es par y una potencia cualquiera de un número impar es impar.

La suma de un número par y de un número impar no puede ser par.

Volver

Bibliografía de tratados antiguos

Los juegos matemáticos son casi tan antiguos como la matemática misma y a través de algunos juegos vimos que los caldeos y griegos de la antigüedad eran aficionados a ellos. Pero caldeos y griegos sólo propusieron problemas aislados.

El primero o uno de los primeros libros dedicado enteramente a recreaciones matemáticas parece ser el libro que el hindú Lilawati escribió para su hija en el siglo XII.

En Francia, la primera colección de recreos matemáticos, *Jeux et Esbatemens,* se encuentra incluida en un manuscrito de Nicolás Chuquet, escrito en 1484, que es también el primer tratado de álgebra en francés. Ese manuscrito, del cual los estudiosos sólo conocían su existencia, fue redescubierto en 1880 en la Bibliothèque nationale (n° 1346).

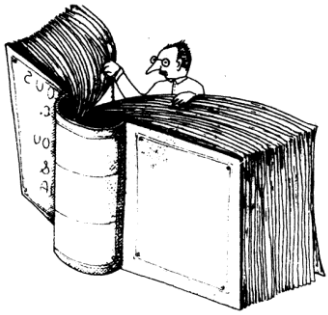
La parte que nos interesa se imprimió por primera vez en un anexo puesto a nuestro libro *Jeux de l'esprit et Divertissements mathématiques*; (Seuil, 1975), en español, *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático* Barcelona, Gedisa, 1984).

Otro manuscrito dedicado a los juegos matemáticos fue escrito en el siglo XV en Pamiers y en lengua del Pays de Foix: "Lart De Lalgoris" (autor anónimo, Bibliothèque nationale, Fonds Français, NAF n°4.140). Posteriormente sabios ilustres se entregaron a juegos matemáticos (Fermat, Mersenne, Euler, Bernoulli), y los tratados sobre estos temas se multiplicaron. Llegaron a ser tan numerosos que nos hemos limitado a indicar sólo aquellos publicados antes de nuestro siglo:

Estienne de la Roche, llamado Villefranche, *Larismétique et géométrie de Maistre Estienne de la Roche*, librería Constantin Fradin, Lyon, 1520. Reedición en 1538.

Chauvet, Jacques, *Methodiques institutions de la vraye et parfaicte arithmétique de Jacques Chauvet*, librería C. Royer, París, 1585. Reeditado en 1606, 1619, 1631, 1636, 1640, 1645, 1648,1671.

Trenchant, Jean, *L'Arithmétique de Jean Trenchant, départie en trois livres. Ensamble un petit discours des changes, avec l'art*



de calculer aux getons, librería M. Jove, Lyon. 1561. Reeditado en 1588, 1602, 1610, 1617, 1618, 1632, 1643, 1647.

Monantheuil, Henri de, *Ludus iastromathematicus*, París, 1597.

Bachet de Meziriac, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, Librería P. Rigaud, Lyon, 1612. Reeditado por A. Blanchard, París, 1959.

Henrion, Denis, *Deux cens questions ingénieuses et récréatives, extraictes des oeuvres mathématiques de Valentin Menher, Allemand, avec quelques annotations de Michel Coignetsur aucune d'icelles questions*, París, 1620.

Leurechon, Jean (llamado Van Etten), *Récréations mathématiques composées de plusieurs problèmes plaisants et facétieux*, au Pont-à-Mousson, 1626.

Mersenne, père Marín, *Questions inouyes, ou Récréation des sçavans*, Librería J. Villery, París, 1634.

Mydorge, Claude, *Examen du livre des Récréations mathématiques* (du P.J. Leurechon), Librería Robinot, París, 1630.

Bettinus, Marius, *Recreationum mathematicarum*, Franciscus Tedeschius, Bononioe (Boloña), 1660.

Schwenter, *Deleciae physico-mathematicae*, Nuremberg, 1651. Reeditado en 1677.

Ozanam, Jacques, *Récréations mathématiques et physiques*, Librería Jombert, París, 1694,4 vol. Numerosas reediciones hasta 1778.

Guyot, *Nouvelles Récréations physiques et mathématiques*, Librería Gueffier, París, 1769, 4 vol.

Hooper *Rational Récréations*, L. Davis, Londres 1774, 4 vol; Lackington, Londres, 1802, 2 vol.

Luya, *Amusements arithmétiques et algébriques de la campagne*, Librería Du Villard hijos, Ginebra,: 1779.

Anónimo, *Passe-temps mathématique, ou récréation a l'Ile Sainte-Héléne*, Librería Briquet, Ginebra, 1817.

Jackson, John, *Rational Amusements for Winter Evenings*, Londres, 1821.

Anónimo, *The Magician's Own Book*, Dick and Fitzgerald, 1857.

Lucas, Édouard, *Récréations mathématiques*, Gauthier Villars, París, 1882-1894, 4 vol. Reeditado por A. Blanchard, París, 1960, 2 vol.

Lucas, Édouard, *L'Arithmétique amusante,* Gauthier-Villars, París, 1895, Reeditado por A. Blanchard, París, 1974.

Lagarrigue, Ferdinand, *Curiosités arithmétiques*, P. Dupont, París, 1866.

Lagarrigue, Ferdinand, *Récréations scientifiques*, P. Dupont, París, 1867.

Augustus de Morgan, *A Budget of Paradoxes*, Longmans Green and Co., Londres, 1872.

Dodgson, Charles L. (llamado Lewis Carroll*) Curiosa mathematica, II, Problems thought out during wakeful hours*, Londres, 1893.

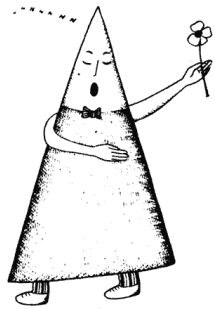
Dodgson, Charles L. *Pillow Problems*, Mac Millan, Londres, 1894.

Maupin, Georges, *Opinions et curiosités touchant la mathématique, d'aprés les ouvrages français des XVI^{e}, XVII^{e} et XVIII^{e} siècles*, Librería G. Carré et C. Naud, París, 1898-1902.

Deseo expresar mi vivo agradecimiento a las personas y publicaciones que me expusieron problemas o comunicaciones interesantes y que me autorizaron a reproducirlos: los señores Paul Bresson (problema n° 95), Jean Cazalet (problema n° 100, cuestión 25), Marcel Lemoigne (problema n° 100, cuestión 27, complemento de la solución), Georges Vidal (problema n° 100, cuestión 32), Jean Chevrier, profesor honorario de la Facultad de Ciencias de Lyon (curva cristal de nieve y curva de Peano), la *Revue des ingénieurs des Écoles nationales supérieu- res des Mines*, setiembre 1978 (solución del problema n° 62) y la revista de los ex alumnos de l'École polytechnique, *La Jaune et la Rouge.*

J.-P. A.

Las ilustraciones de esta obra han sido realizadas por
SILVIA MADDONNI



Índice

1 El arcabuz del presidente
2 El pingüino sedentario
3 El croquet y los dos universitarios
4 Batalla naval
5 Cómo un trocito de carbón plantea problemas
6 El tanque bígamo
7 Vértigo aritmético
8 La cohorte beocia
9 El marqués de Touchemoulin recluta hombres
10 Los Clou van a la feria
11 Dramáticas permutaciones en la familia Clou
12 Clotaire es insaciable
13 Las velas sabáticas
14 En un camino de la Lozére
15 Las meriendas de la señora Minouflet
16 Babou y sus babuinos
17 Un crédito singular
18 La falla del tenedor de libros de la fábrica Clou
19 Ardientes bailarinas
20 Desconcertante viaje a Londres
21 Bombardas y pirámides
22 El bólido y los tres mojones
23 Cuidado con las ovejas
24 Victoria de Zenobia
25 Un cuadrado de abetos en número redondo
26 ¿Quién hizo más camino, Lí o Alí?
27 El pentágono de Sin Pan
28 El comercio fraudulento del señor Yang
29 Escándalo en Macao
30 Quousque tándem abutere, Sinensis...
31 Una decisión objetada del gobernador de Macao
32 El mal caballo de Sun Yat Sen
33 La triste historia de Pu, Lu y Yu

34 Magia en cajas
35 Molesta promiscuidad en un autocar de Auvernia
36 Una familia alsaciana
37 En el hotel del Conejo Rojo
38 Los electores de Pontarlier
39 Recorrido de cinco bandas
40 Percusiones de Clou sobre un billar de troneras
41 Reflexiones de Clou sobre un billar sin troneras
42 Clovis juega al billar
43 El billar circular
44 La base de los siete candeleros rosados
45 Las hijas de Mnemosina y el divisor obstinado
46 El gallo del corral
47 Vacaciones de Zabulón y Coucoulina
48 Algún día diré vuestros nacimientos latentes
49 El cumpleaños de Claudine
50 Clodomir se vuelve a casar
51 Evariste y su abuelo
52 El secreto de la familia Béduche
53 Clapeyron en el año 2000
54 La edad del juicio

Juegos de letras y de palabras

55 La bruja está en el centro
56 Los magos de Amberes
57 Estrellas mágicas
58 Decepción triangular
59 Las esferas pintadas
60 Los petasóforos de Saint-Saturnin
61 El encuentro de los geómetras exóticos
62 Asombroso comportamiento de una esfera perforada
63 Vauban se encuentra con Euclides
64 El cuadrado antropófago
65 El testamento del padre Trigone
66 La rata de Tegucigalpa
67 El congreso de las ratas mayas

68 Consideraciones sobre la velocidad de rotación de las ratas mayas
69 A los cerdos no les gustan las ciruelas
70 Piedras de afilar
71 La esfera hueca y el geómetra sagaz
72 El imposible cuadrado de cubos
73 Las angustias del rabino Nehemías
74 Si a usted le gustan los espárragos...
75 Los hilos del faraón
76 El secreto del triángulo de las Bermudas
77 Las cuatro medallas
78 Tubérculos
79 Tresillo
80 Cuarteto
81 Boliche
82 Colinabo
83 El caballo de Elberfeld
84 Multiplicación supersónica
85 La ecuación del solitario
86 Un pariente del señor Joule
87 La resta de Harpagon
88 Las multiplicaciones de Santa Bárbara
89 Exnihilo
90 Fidelidades de la diferencia
91 Alegrías y trabajos de la inversión
92 Un oficio peligroso
93 La escandalosa velada del cumpleaños de Clovis
94 Tres cartas para jugar
95 Azarosas tribulaciones de un dominó
96 Series amarillas
97 Los trasatlánticos de Édouard Lucas
98 El centauro trabado
99 Juego de fósforos
100 Algunos problemas sobre los números enteros

Problemas de la Antigüedad y antiguos problemas

101 El banquete de los 41
102 Mil dracmas en total
103 Las siete opciones de Thomas
104 Problema de los tres objetos
105 La cifra 552.715ésima
106 El ferrocarril planeado con ruleta (rusa)
107 Las trece cajas de Alí Babá
108 El problema de los diez sombreros
109 El teorema de Fermat

Textos aclaratorios y textos adicionales

Historia de un círculo y de un cuadrado
Notaciones
Origen de los signos y vocablos matemáticos
Las antiguas máquinas de calcular
Historia de los sistemas de numeración y de las cifras
Carta de Flauvert a su hermana Caroline
Algunas paradojas
Los cuadrados mágicos
Las curvas de los matemáticos
Los calculadores prodigios
La criptografía
Muerte del uno
Curiosidades numéricas

Bibliografía de tratados antiguos

Juegos de ingenio y entretenimiento matemático

Los entretenimientos de tipo numérico son tan antiguos como la historia misma de la humanidad. Flavio Josefo ya los practicó y después Carlomagno, Leibniz y Flaubert, entre otros muchos. Jean-Pierre Alem propone una gran variedad de problemas en forma de juego; se trata, en general, de problemas matemáticos, pero se han incluido además cuestiones de lógica, criptografía, ajedrez. La mayor parte de estos problemas puede ser resuelta por personas que no tengan formación especial, aunque siempre se requiere la aplicación de un agudo ingenio.

El autor procuró presentar cada uno de sus enigmas de manera insólita o pintoresca, y siempre atrayente. Insertó breves notas relativas a curiosidades matemáticas o a la historia de los conceptos y fórmulas utilizados: así proporciona una serie de claves y datos históricos inéditos que, junto con numerosas ilustraciones, amenizan aun más esta singular obra.

gedisa