Trigonometría

Larson

Octava edición

Trigonometría

Octava edición

Ron Larson
Pennsylvania State University
Behrend College

Con la asistencia de
David C. Falvo
Pennsylvania State University
Behrend College

Traducción:
Ing. Jorge Hernández Lanto
Traductor profesional

Revisión técnica:
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional
M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Trigonometría
Octava edición
Ron Larson/David C. Falvo

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Gerente editorial para Latinoamérica:
Patricia La Rosa

Gerente de procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Sergio R. Cervantes González
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Harold Burch

Imagen de portada:
Richard Edelman/Woodstock Graphics Studio

Composición tipográfica:
Rogelio Raymundo Reyna Reynoso

Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.

Traducido del libro:
Trigonometry, Eighth Edition.
Ron Larson/David C. Falvo
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning © 2011
ISBN: 978-1-4390-4907-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Larson, Ron y David C. Falvo
Trigonometría, Octava edición
ISBN: 978-607-481-734-8

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Contenido

capítulo 3 Temas adicionales en la trigonometría 281

capítulo 4 Números complejos 337

capítulo 5 Funciones exponenciales y logarítmicas 375

capítulo 6

Temas en geometría analítica 437

Prerrequisitos

P

En matemáticas

Las funciones muestran cómo se relaciona una variable con otra.

En el mundo real

Las funciones se usan para calcular valores, simular procesos y descubrir relaciones. Puede modelar la razón de inscripción de niños en preescolar y calcular el año en el que la razón alcanzará cierto número. Este cálculo puede emplearse para planificar necesidades futuras, como el incremento de profesores y la compra de libros. (Vea el Ejercicio 113, página 83.)

EN CARRERAS

Existen varias carreras que emplean funciones. A continuación se listan varias.

- Contratista techador Ejercicio 131, página 55
- Sociólogo Ejercicio 80, página 101
- Ingeniero automotriz Ejercicio 61, página 108
- Demógrafo Ejercicios 67 y 68, página 109

P.1 REPASO DE LOS NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

Lo que debe aprender

- Representar y clasificar números reales.
- Ordenar números reales y usar desigualdades.
- Hallar los valores absolutos de números reales y encontrar la distancia entre dos números reales.
- Evaluar expresiones algebraicas.
- Usar las reglas y propiedades básicas del álgebra.

Por qué debe aprenderlo

Los números reales se emplean para representar varias cantidades en el mundo real. Por ejemplo, en los Ejercicios 83-88 en la página 13, usará números reales para representar el déficit federal.

Números reales

Los **números reales** se usan en la vida diaria para describir cantidades como la edad, millas por galón o tamaño de una población. Los números reales se representan por medio de símbolos como

$$-5,\ 9,\ 0,\ \frac{4}{3},\ 0.666\ .\ .\ .\ ,\ 28.21,\ \sqrt{2},\ \pi,\ \text{y}\ \sqrt[3]{-32}.$$

Aquí se dan algunos **subconjuntos** importantes (cada miembro del subconjunto B también es un miembro del conjunto A) de los números reales. Los tres puntos, llamados *puntos suspensivos*, indican que el patrón continúa de manera indefinida.

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Conjunto de números naturales

$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Conjunto de números enteros no negativos

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ El conjunto de números enteros

Un número real es **racional** si puede escribirse como la razón p/q de dos enteros, donde $q \neq 0$. Por ejemplo, los números

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ .\ .\ . = 0.\overline{3},\ \frac{1}{8} = 0.125,\ \text{y}\ \frac{125}{111} = 1.126126\ .\ .\ . = 1.\overline{126}$$

son racionales. La representación decimal de un número racional se repite $\left(\text{como en } \frac{173}{55} = 3.1\overline{45}\right)$ o termina $\left(\text{como en } \frac{1}{2} = 0.5\right)$. A un número real que no puede escribirse como la razón de dos enteros se le llama **irracional**. Los números irracionales tienen representaciones decimales sin repetir infinitas. Por ejemplo, los números

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots \approx 1.41 \quad \text{y} \quad \pi = 3.1415926\ldots \approx 3.14$$

son irracionales. (El símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a".) La Figura P.1 muestra los subconjuntos de los números reales y sus relaciones entre sí.

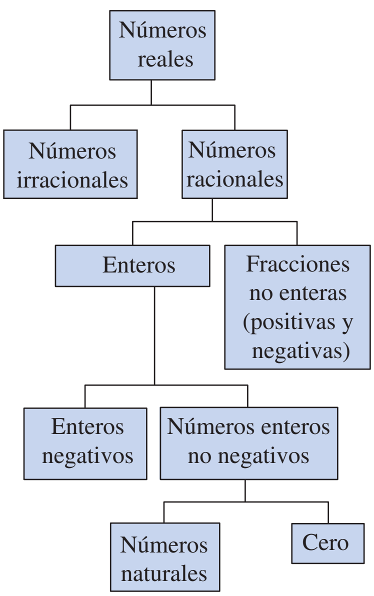


FIGURA P.1 Los números Reales y sus subconjuntos.

Ejemplo 1 Clasificación de números reales

Determine cuáles números en el conjunto

$$\left\{-13, -\sqrt{5}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, \sqrt{2}, \pi, 7\right\}$$

son (a) números Naturales, (b) números enteros no negativos, (c) Enteros, (d) números Racionales y (e) números Irracionales.

Solución

a. Números naturales: $\{7\}$

b. Números enteros no negativos: $\{0, 7\}$

c. Enteros: $\{-13, -1, 0, 7\}$

d. Números racionales: $\left\{-13, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, 7\right\}$

e. Números irracionales: $\{-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \pi\}$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 11.

Los números reales se representan de manera gráfica en la **recta de números reales**. Cuando traza un punto en la recta de números reales que corresponde a un número real, está **graficando** el número real. El punto 0 en la recta de números reales es el **origen**. Los números a la derecha del 0 son positivos y los números a la izquierda del 0 son negativos, como se muestra en la Figura P.2. El término **no negativo** describe un número que es positivo o cero.

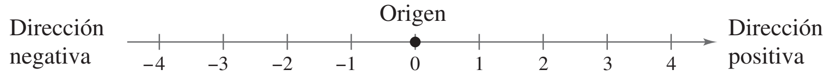
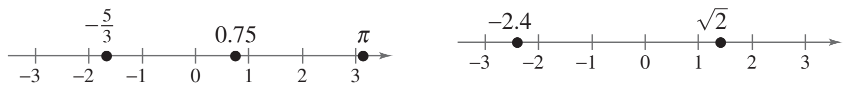


FIGURA P.2 La recta de números reales

Como se ilustra en la Figura P.3, existe una *correspondencia uno a uno* entre los números reales y los puntos en la recta de números reales.



Cada número real corresponde a exactamente a un punto en la recta de números reales.

Cada punto en la recta de números reales corresponde a exactamente un número real.

FIGURA P.3 Correspondencia uno a uno

Ejemplo 2 Graficación de puntos en la recta de números reales

Grafique los números reales en la recta de números reales.

a. $-\dfrac{7}{4}$

b. 2.3

c. $\dfrac{2}{3}$

d. -1.8

Solución

En la Figura P.4 se muestran los cuatro puntos.

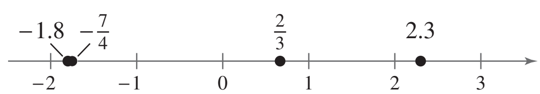


FIGURA P.4

a. El punto que representa el número real $-\frac{7}{4} = -1.75$ se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales.

b. El punto que representa el número real 2.3 se encuentra entre 2 y 3, pero más cercano a 2, en la recta de números reales.

c. El punto que representa el número real $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ se encuentra entre 0 y 1, pero más cercano a 1, en la recta de números reales.

d. El punto que representa el número real -1.8 se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales. Observe que el punto que representa a -1.8 se encuentra ligeramente a la izquierda del punto que representa a $-\frac{7}{4}$.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 17.

Ordenamiento de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que están *ordenados*.

Definición del orden en la recta de números reales

Si a y b son números reales, a es menor que b si $b - a$ es positivo. El **orden** de a y b se indica por medio de la **desigualdad** $a < b$. Esta relación también puede describirse diciendo que b es *mayor que* a y escribiendo $b > a$. La desigualdad $a \leq b$ significa que a es *menor o igual a* b y la desigualdad $b \geq a$ significa que b es *mayor o igual a* a. Los símbolos $<$, $>$, $\leq$, y $\geq$ son *símbolos de desigualdad*.

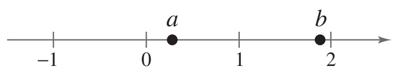


FIGURA P.5 $a < b$ si y sólo si a se encuentra a la izquierda de b

De manera geométrica, esta definición implica que $a < b$ si y sólo si a se encuentra a la *izquierda* de b en la recta de números reales, como se muestra en la Figura P.5.

Ejemplo 3 Ordenamiento de números reales

Coloque el símbolo de desigualdad apropiado ($<$ o $>$) entre el par de números reales.

a. $-3, 0$ **b.** $-2, -4$ **c.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$

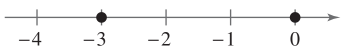


FIGURA P.6

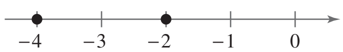


FIGURA P.7

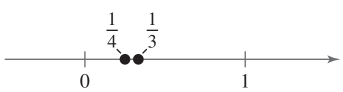


FIGURA P.8

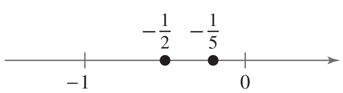


FIGURA P.9

Solución

a. Debido a que -3 se encuentra a la izquierda del 0 en la recta de números reales, como se muestra en la Figura P.6, puede decir que -3 es *menor que* 0 y escribir $-3 < 0$.

b. Debido a que -2 se encuentra a la derecha de -4 en la recta de números reales, como se muestra en la Figura P.7, puede decir que -2 es *mayor que* -4 y escribir $-2 > -4$.

c. Debido a que $\frac{1}{4}$ se encuentra a la izquierda de $\frac{1}{3}$ en la recta de números reales, como se muestra en la Figura P.9, puede decir que $\frac{1}{4}$ es *mayor que* $\frac{1}{3}$, y escribir $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

d. Debido a que $-\frac{1}{5}$ se encuentra a la derecha de $-\frac{1}{2}$ en la recta de números reales, como se muestra en la Figura P.9, puede decir que $-\frac{1}{5}$ es *mayor que* $-\frac{1}{2}$, y escribir $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 25.

Ejemplo 4 Interpretación de las desigualdades

Describa el subconjunto de números reales representados por cada desigualdad.

a. $x \leq 2$ **b.** $-2 \leq x < 3$

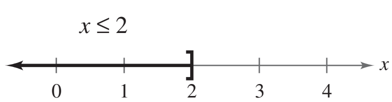


FIGURA P.10

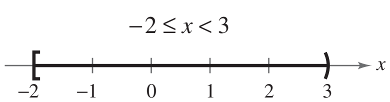


FIGURA P.11

Solución

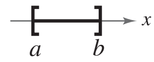
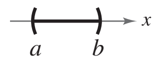
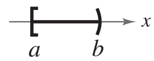
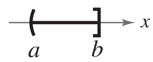
a. La desigualdad $x \leq 2$ indica todos los números reales menores o iguales a 2, como se muestra en la Figura P.10.

b. La desigualdad $-2 \leq x < 3$ significa que $x \geq -2$ y $x < 3$. Esta "desigualdad doble" indica todos los números reales entre -2 y 3, incluyendo el -2 pero sin incluir el 3, como se muestra en la Figura P.11.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 31.

Las desigualdades pueden usarse para describir subconjuntos de números reales llamados **intervalos**. En los intervalos definidos abajo, los números reales a y b son los **puntos extremos** de cada intervalo. Los puntos extremos de un intervalo cerrado se incluyen en el intervalo, mientras que los puntos extremos de un intervalo abierto no se incluyen en el intervalo.

Intervalos definidos en la recta de números reales

Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, b]$	Cerrado	$a \le x \le b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$		$a \le x < b$	
$(a, b]$		$a < x \le b$	

Tip de estudio

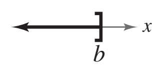
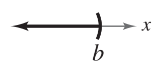
La razón de que a los cuatro tipos de intervalos a la derecha se les llaman *definidos* es que cada uno tiene una longitud finita. Un intervalo que no posee una longitud finita está *no definido* (vea abajo).

PRECAUCIÓN / CUIDADO

Ya sea que escriba un intervalo que contenga ∞ o $-\infty$, siempre use un paréntesis y nunca un corchete. Esto es debido a que ∞ o $-\infty$, nunca son un punto extremo de un intervalo y por tanto no están incluidos en el intervalo.

Los símbolos ∞, **infinito positivo**, y $-\infty$, **infinito negativo**, no representan números reales. Simplemente son símbolos convenientes empleados para describir la no definición de un intervalo como $(1, \infty)$ o $(-\infty, 3]$.

Intervalos no definidos en la recta de números reales

Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, \infty)$		$x \ge a$	
(a, ∞)	Abierto	$x > a$	
$(-\infty, b]$		$x \le b$	
$(-\infty, b)$	Abierto	$x < b$	
$(-\infty, \infty)$	Toda la recta de reales	$-\infty < x < \infty$	

Ejemplo 5 Utilización de desigualdades para representar intervalos

Use la notación de desigualdad para describir cada uno de los siguientes.

a. c es a lo sumo 2. **b.** m es al menos -3. **c.** Todo x en el intervalo $(-3, 5]$.

Solución

a. El enunciado "c es a lo sumo 2" puede representarse por medio de $c \le 2$.

b. El enunciado "m es al menos -3" puede representarse por medio de $m \ge -3$.

c. "Todo x en el intervalo $(-3, 5]$" puede representarse por medio de $-3 < x \le 5$.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 45.

Ejemplo 6 **Interpretación de intervalos**

Dé una descripción verbal de cada intervalo.

a. $(-1, 0)$ **b.** $[2, \infty)$ **c.** $(-\infty, 0)$

Solución

a. Este intervalo consiste en todos los números reales que son mayores que -1 y menores que 0.

b. Este intervalo consiste en todos los números reales que son mayores que o iguales a 2.

c. Este intervalo consiste en todos los números reales negativos.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 41.

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número real es su *magnitud*, o la distancia entre el origen y el punto que representa el número real en la recta de números reales.

Definición del valor absoluto

Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Observe en esta definición que el valor absoluto de un número real nunca es negativo. Por ejemplo, si $a = -5$, entonces $|-5| = -(-5) = 5$. El valor absoluto de un número real es positivo o cero. Además, 0 es el único número real cuyo valor absoluto es 0. Por lo que, $|0| = 0$.

Ejemplo 7 **Obtención de valores absolutos**

a. $|-15| = 15$ **b.** $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

c. $|-4.3| = 4.3$ **d.** $-|-6| = -(6) = -6$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 51.

Ejemplo 8 **Evaluación del valor absoluto de un número**

Evalúe $\dfrac{|x|}{x}$ para (a) $x > 0$ y (b) $x < 0$.

Solución

a. Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.

b. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 59.

La **Ley de tricotomía** enuncia que para dos números reales cualesquiera a y b, es posible de *manera precisa* sólo una de tres relaciones:

$$a = b, \quad a < b, \quad \text{o} \quad a > b. \qquad \text{Ley de tricotomía}$$

Ejemplo 9 Comparación de números reales

Coloque el símbolo apropiado (<, > o =) entre el par de números reales.

a. $|-4| \;\square\; |3|$ **b.** $|-10| \;\square\; |10|$ **c.** $-|-7| \;\square\; |-7|$

Solución

a. $|-4| > |3|$ debido a que $|-4| = 4$ y $|3| = 3$, y 4 es mayor que 3.

b. $|-10| = |10|$ debido a que $|-10| = 10$ y $|10| = 10$.

c. $-|-7| < |-7|$ debido a que $-|-7| = -7$ y $|-7| = 7$, y -7 es menor que 7.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 61.

Propiedades de los valores absolutos

1. $|a| \geq 0$

2. $|-a| = |a|$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

El valor absoluto puede usarse para definir la distancia entre dos puntos en la recta de números reales. Por ejemplo, la distancia entre -3 y 4 es

$$\begin{aligned}|-3 - 4| &= |-7|\\ &= 7\end{aligned}$$

como se muestra en la Figura P.12.

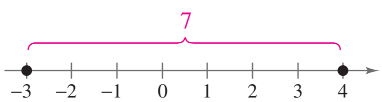


FIGURA P.12 La distancia entre -3 y 4 es 7.

Distancia entre dos puntos en la recta de números reales

Sean a y b números reales. La **distancia entre *a* y *b*** es

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|.$$

Ejemplo 10 Obtención de una distancia

Encuentre la distancia entre -25 y 13.

Solución

La distancia entre -25 y 13 está dada por

$$|-25 - 13| = |-38| = 38. \qquad \text{Distancia entre } -25 \text{ y } 13$$

La distancia también puede encontrarse como a continuación.

$$|13 - (-25)| = |38| = 38 \qquad \text{Distancia entre } -25 \text{ y } 13$$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 67.

Expresiones algebraicas

Una característica del álgebra es el uso de letras para representar números. Las letras son **variables** y las combinaciones de letras y números son **expresiones algebraicas**. Aquí se dan unos cuantos ejemplos de expresiones algebraicas.

$$5x, \qquad 2x - 3, \qquad \frac{4}{x^2 + 2}, \qquad 7x + y$$

Definición de una expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una colección de letras **(variables)** y números reales **(constantes)** combinadas usando las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación.

Los **términos** de una expresión algebraica son aquellos que están separados por el *más*. Por ejemplo,

$$x^2 - 5x + 8 = x^2 + (-5x) + 8$$

tiene tres términos: x^2 y $-5x$ son los **términos variables** y 8 es el **término constante**. Al factor numérico de un término se le llama **coeficiente**. Por ejemplo, el coeficiente de $-5x$ es -5 y el coeficiente de x^2 es 1.

Ejemplo 11 Identificación de términos y coeficientes

Expresión algebraica	*Términos*	*Coeficientes*
a. $5x - \frac{1}{7}$	$5x, -\frac{1}{7}$	$5, -\frac{1}{7}$
b. $2x^2 - 6x + 9$	$2x^2, -6x, 9$	$2, -6, 9$
c. $\frac{3}{x} + \frac{1}{2}x^4 - y$	$\frac{3}{x}, \frac{1}{2}x^4, -y$	$3, \frac{1}{2}, -1$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 89.

Para **evaluar** una expresión algebraica, se sustituyen los valores numéricos para cada una de las variables en la expresión, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12 Evaluación de expresiones algebraicas

Expresión	*Valor asignado a la variable*	*Sustitución*	*Valor de la expresión*
a. $-3x + 5$	$x = 3$	$-3(3) + 5$	$-9 + 5 = -4$
b. $3x^2 + 2x - 1$	$x = -1$	$3(-1)^2 + 2(-1) - 1$	$3 - 2 - 1 = 0$
c. $\frac{2x}{x + 1}$	$x = -3$	$\frac{2(-3)}{-3 + 1}$	$\frac{-6}{-2} = 3$

Observe que debe sustituir el valor para *cada* ocurrencia de la variable.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 95.

Cuando se evalúa una expresión algebraica, se emplea el **Principio de sustitución**. Enuncia que: "Si $a = b$, entonces a puede ser reemplazado por b en cualquier expresión que involucre a." Por ejemplo, en el Ejemplo 12(a), 3 es *sustituido* por x en la expresión $-3x + 5$.

Reglas básicas del álgebra

Existen cuatro expresiones aritméticas con números reales: *suma*, *multiplicación*, *resta* y *división*, indicados por medio de los símbolos $+$, $\times$ o $\cdot$, $-$ y $\div$ o $/$. De éstos, la suma y la multiplicación son las dos operaciones principales. La resta y la división son las operaciones inversas de la suma y la multiplicación, respectivamente.

Definiciones de la resta y la división

Resta: Sumar el inverso aditivo.

$$a - b = a + (-b)$$

División: Multiplicar por el inverso multiplicativo.

Si $b \neq 0$, entonces $a/b = a\left(\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a}{b}$.

En estas definiciones, $-b$ es el **inverso aditivo** (u opuesto) de b y $1/b$ es el **inverso multiplicativo** (o recíproco) de b. En la forma fraccional a/b, a es el **numerador** de la fracción y b es el **denominador**.

Debido a que las propiedades de los números reales mostradas abajo son verdaderas para las variables y expresiones algebraicas al igual que para los números reales, con frecuencia se les llaman **Reglas básicas del álgebra**. Trate de formular una descripción verbal de cada propiedad. Por ejemplo, la primera propiedad establece que *el orden en el que se suman dos números reales no afecta su suma*.

Reglas básicas del álgebra

Sean a, b y c números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad		*Ejemplo*
Propiedad conmutativa de la suma:	$a + b = b + a$	$4x + x^2 = x^2 + 4x$
Propiedad conmutativa de la multiplicación:	$ab = ba$	$(4 - x)x^2 = x^2(4 - x)$
Propiedad asociativa de la suma:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(x + 5) + x^2 = x + (5 + x^2)$
Propiedad asociativa de la multiplicación:	$(ab)c = a(bc)$	$(2x \cdot 3y)(8) = (2x)(3y \cdot 8)$
Propiedades distributivas:	$a(b + c) = ab + ac$	$3x(5 + 2x) = 3x \cdot 5 + 3x \cdot 2x$
	$(a + b)c = ac + bc$	$(y + 8)y = y \cdot y + 8 \cdot y$
Propiedad de neutro aditivo:	$a + 0 = a$	$5y^2 + 0 = 5y^2$
Propiedad de neutro multiplicativo:	$a \cdot 1 = a$	$(4x^2)(1) = 4x^2$
Propiedad de inverso aditivo:	$a + (-a) = 0$	$5x^3 + (-5x^3) = 0$
Propiedad de inverso multiplicativo:	$a \cdot \dfrac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$	$(x^2 + 4)\left(\dfrac{1}{x^2 + 4}\right) = 1$

Debido a que la resta se define como “sumar el opuesto”, la Propiedad distributiva también es verdadera para la resta. Por ejemplo, la “forma de resta” de $a(b + c) = ab + ac$ es $a(b - c) = ab - ac$. Observe que las operaciones de la resta y la división no son conmutativas ni asociativas. Los ejemplos

$$7 - 3 \neq 3 - 7 \quad \text{y} \quad 20 \div 4 \neq 4 \div 20$$

muestran que la resta y la división no son conmutativas. De manera similar

$$5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2 \quad \text{y} \quad 16 \div (4 \div 2) \neq (16 \div 4) \div 2$$

demuestre que la resta y la división no son asociativas.

Ejemplo 13 Identificación de las reglas del álgebra

Identifique la regla del álgebra ilustrada por el enunciado.

a. $(5x^3)2 = 2(5x^3)$

b. $\left(4x + \frac{1}{3}\right) - \left(4x + \frac{1}{3}\right) = 0$

c. $7x \cdot \frac{1}{7x} = 1, \quad x \neq 0$

d. $(2 + 5x^2) + x^2 = 2 + (5x^2 + x^2)$

Solución

a. Este enunciado ilustra la Propiedad conmutativa de la multiplicación. En otras palabras, obtiene el mismo resultado si multiplica $5x^3$ por 2 o 2 por $5x^3$.

b. Este enunciado ilustra la Propiedad de inverso aditivo. En términos de resta, esta propiedad simplemente enuncia que cuando se resta cualquier expresión de sí misma el resultado es cero.

c. Este enunciado ilustra la Propiedad de inverso multiplicativo. Observe que es importante que x sea un número distinto a cero. Si x fuera 0, el recíproco de x estaría indefinido.

d. Este enunciado ilustra la Propiedad asociativa de la suma. En otras palabras, para formar la suma

$$2 + 5x^2 + x^2$$

no importa si se suma primero 2 y $5x^2$ o $5x^2$ y x^2.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 101.

Tip de estudio

Observe la diferencia entre el *opuesto de un número* y un *número negativo*. Si a ya es negativo, entonces su opuesto, $-a$, es positivo, por ejemplo, si $a = -5$, entonces

$$-a = -(-5) = 5.$$

Propiedades de negación e igualdad

Sean a, b y c números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad	*Ejemplo*
1. $(-1)a = -a$	$(-1)7 = -7$
2. $-(-a) = a$	$-(-6) = 6$
3. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-5)3 = -(5 \cdot 3) = 5(-3)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-x) = 2x$
5. $-(a + b) = (-a) + (-b)$	$-(x + 8) = (-x) + (-8)$ $= -x - 8$
6. Si $a = b$, entonces $a \pm c = b \pm c$.	$\frac{1}{2} + 3 = 0.5 + 3$
7. Si $a = b$, entonces $ac = bc$.	$4^2 \cdot 2 = 16 \cdot 2$
8. Si $a \pm c = b \pm c$, entonces $a = b$.	$1.4 - 1 = \frac{7}{5} - 1 \Longrightarrow 1.4 = \frac{7}{5}$
9. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.	$3x = 3 \cdot 4 \Longrightarrow x = 4$

Tip de estudio

El "o" en la Propiedad del factor cero incluye la posibilidad de que cualquiera o ambos factores pueda(n) ser cero. Ésta es una **disyunción lógica** y es la manera en la que se emplea por lo general la letra "o" en las matemáticas.

Propiedades del cero

Sean a y b números reales, variables o expresiones algebraicas.

1. $a + 0 = a$ y $a - 0 = a$
2. $a \cdot 0 = 0$
3. $\dfrac{0}{a} = 0, \quad a \neq 0$
4. $\dfrac{a}{0}$ no está definida.
5. **Propiedad del factor cero**: Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Propiedades y operaciones de fracciones

Sean a, b, c y d números reales, variables o expresiones algebraicas tal que $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

1. **Fracciones equivalentes:** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$.
2. **Reglas de los signos:** $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ y $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$
3. **Generación de fracciones equivalentes:** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}, \quad c \neq 0$
4. **Suma o resta con denominadores comunes:** $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \pm c}{b}$
5. **Suma o resta con denominadores no comunes:** $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$
6. **Multiplicación de fracciones:** $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
7. **División de fracciones:** $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}, \quad c \neq 0$

Tip de estudio

En la propiedad 1 de las fracciones, la frase "si y sólo si" implica dos enunciados. Un enunciado es: Si $a/b = c/d$, entonces $ad = bc$. El otro enunciado es: Si $ad = bc$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $a/b = c/d$.

Ejemplo 14 Propiedades y operaciones de fracciones

a. Fracciones equivalentes: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{3 \cdot x}{3 \cdot 5} = \dfrac{3x}{15}$

b. División de fracciones: $\dfrac{7}{x} \div \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{x} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3x}$

c. Suma de fracciones con denominadores no comunes:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{5 \cdot x + 3 \cdot 2x}{3 \cdot 5} = \frac{11x}{15}$$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 119.

Si a, b y c son enteros tal que $ab = c$, entonces a y b son **factores** o **divisores** de c. Un **número primo** es un entero que tiene exactamente dos factores positivos —a sí mismo y 1— como el 2, 3, 5, 7 y 11. Los números 4, 6, 8, 9 y 10 son **compuestos** debido a que pueden escribirse como el producto de dos o más números primos. El número 1 no es primo ni compuesto. El **Teorema fundamental de la aritmética** enuncia que todo entero positivo mayor que 1 puede escribirse como el producto de número primos en precisamente una manera (sin importar el orden). Por ejemplo, la *factorización en primos* del 24 es $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

P.1 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Complete los espacios.

1. Un número real es ________ si puede escribirse como la razón $\frac{p}{q}$ de dos enteros, donde $q \neq 0$.
2. Los números ________ tienen representaciones decimales sin repetir infinitas.
3. Al punto 0 en la recta de números reales se le llama ________.
4. La distancia entre el origen y un punto que representa un número en la recta de números reales es el ________ del número real.
5. Un número que puede escribirse como el producto de dos o más números primos se llama número ________.
6. Un entero que tiene exactamente dos factores positivos, el entero en sí mismo y el 1, se llama número ________.
7. Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas ________ y números reales llamados ________.
8. Los ________ de una expresión algebraica son aquellas partes separadas por un más.
9. El factor numérico de un término variable es el ________ del término variable.
10. La ________ ________ enuncia que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-16, determine qué números en el conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros no negativos, (c) enteros, (d) números racionales y (e) números irracionales.

11. $\left\{-9, -\frac{7}{2}, 5, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 1, -4, 2, -11\right\}$
12. $\left\{\sqrt{5}, -7, -\frac{7}{3}, 0, 3.12, \frac{5}{4}, -3, 12, 5\right\}$
13. $\{2.01, 0.666\ldots, -13, 0.010110111\ldots, 1, -6\}$
14. $\{2.3030030003\ldots, 0.7575, -4.63, \sqrt{10}, -75, 4\}$
15. $\left\{-\pi, -\frac{1}{3}, \frac{6}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -7.5, -1, 8, -22\right\}$
16. $\left\{25, -17, -\frac{12}{5}, \sqrt{9}, 3.12, \frac{1}{2}\pi, 7, -11.1, 13\right\}$

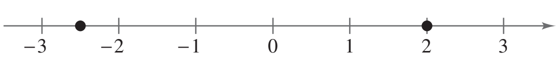
En los Ejercicios 17 y 18, grafique los número reales en la recta de números reales.

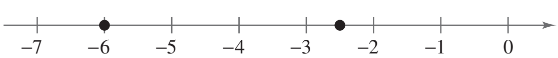
17. (a) 3 (b) $\frac{7}{2}$ (c) $-\frac{5}{2}$ (d) -5.2
18. (a) 8.5 (b) $\frac{4}{3}$ (c) -4.75 (d) $-\frac{8}{3}$

En los Ejercicios 19-22, use una calculadora para encontrar la forma decimal del número racional. Si es un decimal sin terminación, escriba el patrón de repetición.

19. $\frac{5}{8}$
20. $\frac{1}{3}$
21. $\frac{41}{333}$
22. $\frac{6}{11}$

En los Ejercicios 23 y 24, aproxime los números y coloque el símbolo correcto ($<$ o $>$) entre ellos.

23. 

24. 

En los Ejercicios 25-30, grafique los dos números reales en la recta de números reales. Después coloque el símbolo de desigualdad apropiado ($<$ o $>$) entre ellos.

25. $-4, -8$
26. $-3.5, 1$
27. $\frac{3}{2}, 7$
28. $1, \frac{16}{3}$
29. $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$
30. $-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}$

En los Ejercicios 31-42, (a) dé una descripción verbal del subconjunto de números reales representado por la desigualdad o el intervalo, (b) grafique el subconjunto en la recta de números reales y (c) enuncie si el intervalo está definido o indefinido.

31. $x \leq 5$
32. $x \geq -2$
33. $x < 0$
34. $x > 3$
35. $[4, \infty)$
36. $(-\infty, 2)$
37. $-2 < x < 2$
38. $0 \leq x \leq 5$
39. $-1 \leq x < 0$
40. $0 < x \leq 6$
41. $[-2, 5)$
42. $(-1, 2]$

En los Ejercicios 43-50, use la notación de desigualdad y la notación de intervalo para describir el conjunto.

43. y es no negativo.
44. y no es mayor que 25.
45. x es mayor que -2 a lo sumo 4.
46. y es al menos -6 y menor que 0.
47. t es al menos 10 y a lo más 22.
48. k es menor que 5 pero no menor que -3.
49. El peso del perro W es mayor a 65 libras.
50. Se espera que la razón anual de inflación r sea al menos del 2.5% pero no mayor al 5%.

En los Ejercicios 51-60, evalúe la expresión.

51. $|-10|$

52. $|0|$

53. $|3 - 8|$

54. $|4 - 1|$

55. $|-1| - |-2|$

56. $-3 - |-3|$

57. $\dfrac{-5}{|-5|}$

58. $-3|-3|$

59. $\dfrac{|x + 2|}{x + 2}, \quad x < -2$

60. $\dfrac{|x - 1|}{x - 1}, \quad x > 1$

En los Ejercicios 61-66, coloque el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) entre los dos números reales.

61. $|-3| \;\square\; -|-3|$

62. $|-4| \;\square\; |4|$

63. $-5 \;\square\; -|5|$

64. $-|-6| \;\square\; |-6|$

65. $-|-2| \;\square\; -|2|$

66. $-(-2) \;\square\; -2$

En los Ejercicios 67-72, encuentre la distancia entre ***a*** y ***b***.

67. $a = 126, b = 75$

68. $a = -126, b = -75$

69. $a = -\frac{5}{2}, b = 0$

70. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{11}{4}$

71. $a = \frac{16}{5}, b = \frac{112}{75}$

72. $a = 9.34, b = -5.65$

En los Ejercicios 73-78, use la notación de valor absoluto para describir la situación.

73. La distancia entre x y 5 no es mayor a 3.

74. La distancia entre x y -10 es al menos de 6.

75. y está al menos a seis unidades del 0.

76. y está a lo más a dos unidades de a.

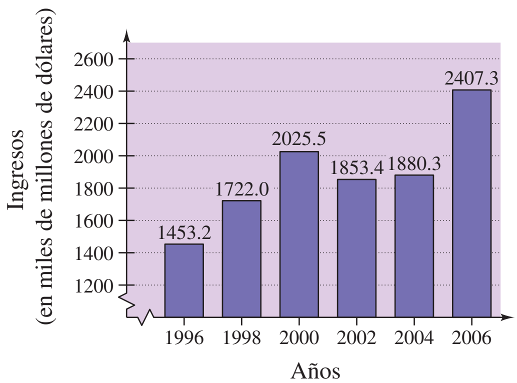
77. Mientras que usted recorre la autopista de Pennsylvania, atraviesa el poste miliar 57 cerca de Pittsburgh, después el poste miliar 236 cerca de Gettysburg. ¿Cuántas millas ha recorrido durante ese periodo?

78. La temperatura en Bismarck, Dakota del Norte, era de 60°F al mediodía, después de 23°F a la medianoche. ¿Cuál es el cambio en temperatura en el periodo de 12 horas?

VARIANZA DEL PRESUPUESTO En los Ejercicios 79-82, el departamento de contabilidad de una compañía que embotella una bebida deportiva está comprobando si los gastos reales de un departamento difieren de los gastos presupuestados en más de \$500 o en más del 5%. Complete las partes faltantes de la tabla y determine si cada gasto real pasa “la prueba de la varianza del presupuesto”.

	Gasto presupuestal, b	*Gasto real, a*	$\lvert a - b\rvert$	$0.05b$
79. Salarios	\$112 700	\$113 356		
80. Utilidades	\$9 400	\$9 772		
81. Impuestos	\$37 640	\$37 335		
82. Aseguramiento	\$2 575	\$2 613		

DÉFICIT FEDERAL En los Ejercicios 83-88, use la gráfica de barras, la cual muestra los ingresos del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para los años seleccionados de 1996 al 2006. En cada ejercicio se le proporcionan los gastos del gobierno federal. Encuentre la magnitud del excedente o déficit del año. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)



Año	*Ingresos*	*Gastos*	$\lvert$*Ingresos − Gastos*$\rvert$
83. 1996		\$1560.6 miles de millones	
84. 1998		\$1652.7 miles de millones	
85. 2000		\$1789.2 miles de millones	
86. 2002		\$2011.2 miles de millones	
87. 2004		\$2293.0 miles de millones	
88. 2006		\$2655.4 miles de millones	

En los Ejercicios 89-94, identifique los términos. Después identifique los coeficientes de los términos variables de la expresión.

89. $7x + 4$

90. $6x^3 - 5x$

91. $\sqrt{3}x^2 - 8x - 11$

92. $3\sqrt{3}x^2 + 1$

93. $4x^3 + \dfrac{x}{2} - 5$

94. $3x^4 - \dfrac{x^2}{4}$

En los Ejercicios 95-100, evalúe la expresión para cada valor de x. (Si no es posible, enuncie la razón.)

Expresión	*Valores*	
95. $4x - 6$	(a) $x = -1$	(b) $x = 0$
96. $9 - 7x$	(a) $x = -3$	(b) $x = 3$
97. $x^2 - 3x + 4$	(a) $x = -2$	(b) $x = 2$
98. $-x^2 + 5x - 4$	(a) $x = -1$	(b) $x = 1$
99. $\dfrac{x+1}{x-1}$	(a) $x = 1$	(b) $x = -1$
100. $\dfrac{x}{x+2}$	(a) $x = 2$	(b) $x = -2$

En los Ejercicios 101-112, identifique la(s) regla(s) del álgebra ilustrada(s) por el enunciado.

101. $x + 9 = 9 + x$

102. $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

103. $\dfrac{1}{h+6}(h + 6) = 1, \quad h \neq -6$

104. $(x + 3) - (x + 3) = 0$

105. $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$

106. $(z - 2) + 0 = z - 2$

107. $1 \cdot (1 + x) = 1 + x$

108. $(z + 5)x = z \cdot x + 5 \cdot x$

109. $x + (y + 10) = (x + y) + 10$

110. $x(3y) = (x \cdot 3)y = (3x)y$

111. $3(t - 4) = 3 \cdot t - 3 \cdot 4$

112. $\frac{1}{7}(7 \cdot 12) = \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right)12 = 1 \cdot 12 = 12$

En los Ejercicios 113-120, desarrolle la(s) operación(es). (Escriba las respuestas fraccionales en la forma más reducida.)

113. $\frac{3}{16} + \frac{5}{16}$

114. $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$

115. $\frac{5}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

116. $\frac{10}{11} + \frac{6}{33} - \frac{13}{66}$

117. $12 \div \frac{1}{4}$

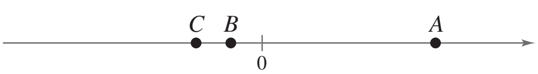
118. $-\left(6 \cdot \frac{4}{8}\right)$

119. $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{x}{4}$

120. $\dfrac{5x}{6} \cdot \dfrac{2}{9}$

EXPLORACIÓN

En los Ejercicios 121 y 122, use los números reales A, B y C mostrados en la recta de números reales. Determine el signo de cada expresión.



121. (a) $-A$
(b) $B - A$

122. (a) $-C$
(b) $A - C$

123. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

n	1	0.5	0.01	0.0001	0.000001
$5/n$					

(b) Emplee el resultado del inciso (a) para formar una conjetura acerca del valor de $5/n$ a medida que n se aproxima a 0.

124. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

n	1	10	100	10,000	100,000
$5/n$					

(b) Emplee el resultado del inciso (a) para formar una conjetura acerca del valor de $5/n$ a medida que n aumenta sin límite.

¿FALSO O VERDADERO? En los Ejercicios 125-128, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

125. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a - b > 0$.

126. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.

127. Si $a < b$, y $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$, entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

128. Debido a que $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$, entonces $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$.

129. PIENSE EN ELLO Considere $|u + v|$ y $|u| + |v|$, donde $u \neq 0$ y $v \neq 0$.

(a) ¿Los valores de las expresiones son siempre iguales? Si no, ¿bajo qué condiciones son diferentes?

(b) Si las dos expresiones no son iguales para ciertos valores de u y v, ¿una de las expresiones es siempre mayor que la otra? Explique.

130. PIENSE EN ELLO ¿Existe alguna diferencia entre decir que un número real es positivo y decir que un número real es no negativo? Explique.

131. PIENSE EN ELLO Debido a que todo número par es divisible entre 2, ¿es posible que exista algún número primo par? Explique.

132. PIENSE EN ELLO ¿Es posible que un número real sea racional e irracional? Explique.

133. ESCRITURA ¿Puede ser verdadero que $|a| = -a$ para un número real a? Explique

134. TOQUE FINAL Describa las diferencia entre los conjuntos de números naturales, números enteros, enteros no negativos, números racionales y números irracionales.

P.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Lo que debe aprender

- Identificar los diferentes tipos de ecuaciones.
- Resolver ecuaciones lineales con una variable y ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales.
- Resolver ecuaciones cuadráticas factorizando, extrayendo raíces cuadradas, completando el cuadrado y usando la Fórmula cuadrática.
- Resolver ecuaciones polinómicas de tercer o mayor grado.
- Resolver ecuaciones que involucran radicales.
- Resolver ecuaciones con valores absolutos.

Por qué debe aprenderlo

Las ecuaciones lineales se usan en varias aplicaciones en el mundo real. Por ejemplo, en los Ejercicios 155 y 156 en la página 27, pueden emplearse ecuaciones lineales para modelar la relación entre la longitud de un fémur y la altura de una persona, lo que ayuda a los investigadores a aprender acerca de culturas antiguas.

Ecuaciones y soluciones de ecuaciones

Una **ecuación** en x es una aseveración de que dos expresiones algebraicas son iguales. Por ejemplo

$$3x - 5 = 7, x^2 - x - 6 = 0, \text{ y } \sqrt{2x} = 4$$

son ecuaciones. El **resolver** una ecuación en x significa encontrar todos los valores para los que la ecuación es verdadera. Tales valores son las **soluciones**. Por ejemplo, $x = 4$ es una solución de la ecuación

$$3x - 5 = 7$$

debido a que $3(4) - 5 = 7$ es una aseveración verdadera.

Las soluciones de una ecuación dependen de los tipos de números que se están considerando. Por ejemplo, en el conjunto de los números racionales, $x^2 = 10$ no tiene solución debido a que no existe algún número racional cuyo cuadrado sea 10. Sin embargo, en el conjunto de números reales, la ecuación tiene dos soluciones $x = \sqrt{10}$ y $x = -\sqrt{10}$.

A una ecuación que es verdadera para *todo* número real en el *dominio* de la variable se le llama **identidad**. El dominio es el conjunto de todos los números reales para los que la ecuación está definida. Por ejemplo

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \qquad \text{Identidad}$$

es una identidad debido a que es una aseveración verdadera para cualquier valor de x. La ecuación

$$\frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x} \qquad \text{Identidad}$$

donde $x \neq 0$, es una identidad debido a que es verdadera para cualquier valor real distinto de cero de x.

Una ecuación que es verdadera para sólo *algunos* (o incluso ninguno) de los números reales en el dominio de la variable se le llama **ecuación condicional**. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{Ecuación condicional}$$

es condicional debido a que $x = 3$ y $x = -3$ son los únicos valores en el dominio que satisfacen la ecuación. La ecuación $2x - 4 = 2x + 1$ es condicional debido a que no hay algún valor real de x para el cual la ecuación es verdadera.

Ecuaciones lineales con una incógnita

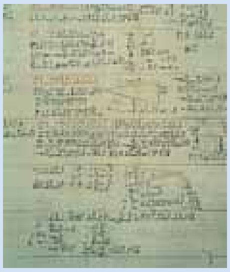
Definición de ecuación lineal

Una **ecuación lineal con una incógnita** x es una ecuación que puede escribirse en la forma estándar

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$.

NOTA HISTÓRICA



Museo británico

Este papiro del antiguo Egipto, descubierto en 1858, contiene uno de los primeros ejemplos de escritura matemática en existencia. El papiro se remonta a alrededor de 1650 a.C., pero es en realidad una copia de escrituras de dos siglos antes. Las ecuaciones algebraicas del papiro se escribieron en palabras. Diofanto, un griego que vivió alrededor de 250 d.C., con frecuencia se le llama el Padre del álgebra. Fue el primero en usar formas de palabras abreviadas en ecuaciones.

Una ecuación lineal con una incógnita, escrita en forma estándar, siempre tiene *exactamente una* solución. Para ver esto, considere los siguientes pasos.

$ax + b = 0$ Ecuación original, con $a \neq 0$

$ax = -b$ Restar b de cada lado.

$x = -\dfrac{b}{a}$ Dividir cada lado entre a.

Para resolver una ecuación condicional en x, aísle x en un lado de la ecuación por una secuencia de **ecuaciones equivalentes** (y por lo regular más sencillas), cada una teniendo la(s) misma(s) solución(es) que la ecuación original. Las operaciones que dan ecuaciones equivalentes provienen del Principio de sustitución y de las Propiedades de igualdad estudiadas en la Sección P.1.

Generación de ecuaciones equivalentes

Una ecuación puede transformarse en una *ecuación equivalente* por medio de uno o más de los siguientes pasos.

	Ecuación dada	*Ecuación equivalente*
1. Eliminar símbolos de agrupación, combinar términos similares o simplificar fracciones en uno o ambos lados de la ecuación.	$2x - x = 4$	$x = 4$
2. Sumar (o restar) la misma cantidad a (de) *cada* lado de la ecuación.	$x + 1 = 6$	$x = 5$
3. Multiplicar (o dividir) *cada* lado de la ecuación por (entre) la misma cantidad *distinta a cero*.	$2x = 6$	$x = 3$
4. Intercambiar los dos lados de la ecuación.	$2 = x$	$x = 2$

Tip de estudio

Después de resolver una ecuación, debe comprobar cada solución en la ecuación original. Por ejemplo, puede comprobar la solución del Ejemplo 1(a) como a continuación.

$3x - 6 = 0$ Escribir la ecuación original.

$3(2) - 6 \stackrel{?}{=} 0$ Sustituir 2 por x.

$0 = 0$ La solución concuerda. ✓

Intente comprobar la solución del Ejemplo 1(b).

Ejemplo 1 Resolución de una ecuación lineal

a. $3x - 6 = 0$ Ecuación original

$3x = 6$ Sumar 6 a cada lado.

$x = 2$ Dividir cada lado entre 3.

b. $5x + 4 = 3x - 8$ Ecuación original

$2x + 4 = -8$ Restar $3x$ de cada lado.

$2x = -12$ Restar 4 de cada lado.

$x = -6$ Dividir cada lado entre 2.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 15.

Números complejos

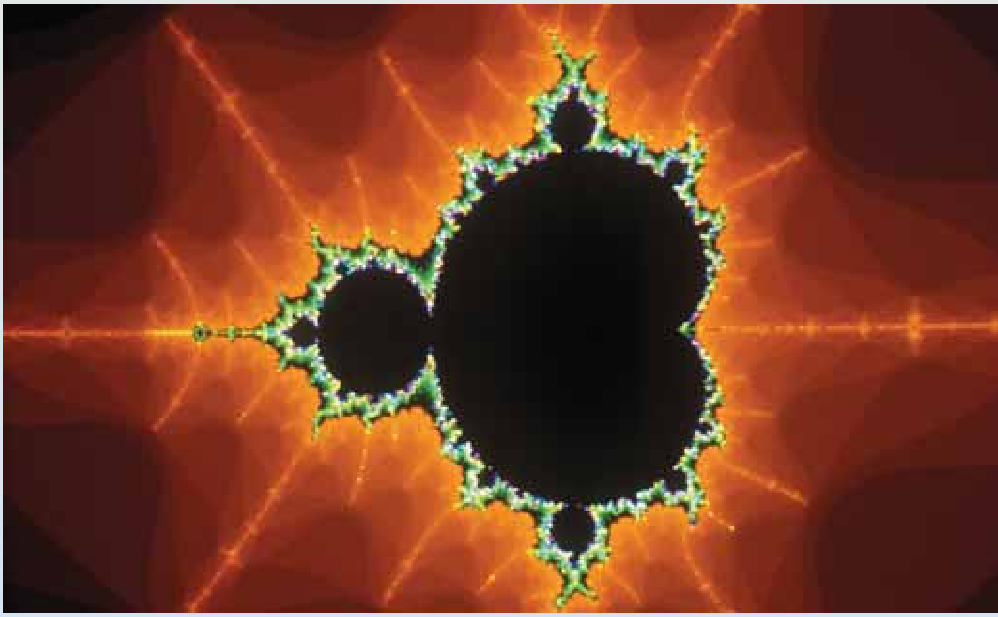
4

En matemáticas

El conjunto de números complejos incluye los números reales y los números imaginarios. Los números complejos pueden utilizarse para resolver ecuaciones que no tienen soluciones reales.

En el mundo real

Los números complejos pueden emplearse para crear imágenes hermosas llamadas fractales. El fractal más famoso es el Conjunto de Mandelbrot, nombrado en honor al matemático Benoit Mandelbrot. (Vea el Ejercicio 11, página 374.)



EN CARRERAS

Existen varias carreras que emplean números complejos. A continuación se listan varias.

- Electricista
  Ejercicio 89, página 344
- Economista
  Ejercicio 85, página 352
- Analista de ventas
  Ejercicio 86, página 352
- Analista de investigación del consumidor
  Ejercicio 48, página 368

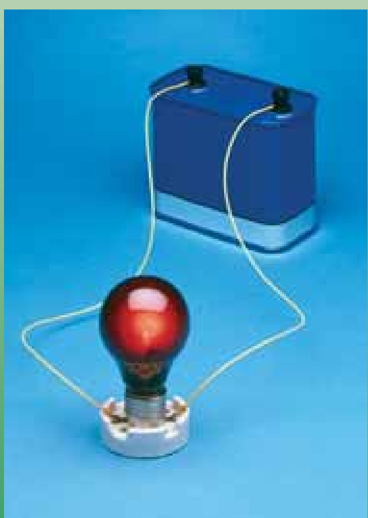
4.1 NÚMEROS COMPLEJOS

Lo que debe aprender

- Usar la unidad imaginaria *i* para escribir números complejos.
- Sumar, restar y multiplicar números complejos.
- Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar.
- Encontrar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas.

Por qué debe aprenderlo

Puede emplear números complejos para modelar y resolver problemas en el mundo real. Por ejemplo, en el Ejercicio 89 en la página 344, aprenderá cómo utilizar los números complejos para encontrar la impedancia de un circuito eléctrico.



Unidad imaginaria *i*

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real debido a que no existe un número real x que pueda elevarse al cuadrado para producir -1. Para superar esta deficiencia, los matemáticos crearon un sistema expandido de números empleando la **unidad imaginaria *i***, definida como

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{Unidad imaginaria}$$

donde $i^2 = -1$. Al sumar números reales a múltiplos reales de esta unidad imaginaria, se obtiene el conjunto de **números complejos**. Cada número complejo puede escribirse en **forma estándar *a* + *bi***. Por ejemplo, la forma estándar del número complejo $-5 + \sqrt{-9}$ es $-5 + 3i$ debido a que

$$-5 + \sqrt{-9} = -5 + \sqrt{3^2(-1)} = -5 + 3\sqrt{-1} = -5 + 3i.$$

En forma estándar $a + bi$, al número real a se le llama la **parte real** del **número complejo *a* + *bi*** y al número bi (donde b es un número real) se le llama la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición de un número complejo

Si a y b son números reales, el número $a + bi$ es un **número complejo** y se dice que está escrito en **forma estándar**. Si $b = 0$, el número $a + bi = a$ es un número real. Si $b \neq 0$, al número $a + bi$ se le llama **número complejo**.
Un número de la forma bi, donde $b \neq 0$, se llama **número imaginario puro**.

El conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos, como se muestra en la Figura 4.1. Esto es verdadero debido a que todo número real a puede escribirse como un número complejo utilizando $b = 0$. Es decir, para todo número real a, puede escribir $a = a + 0i$.

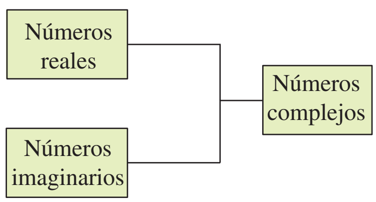


FIGURA 4.1

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí

$$a + bi = c + di \qquad \text{Igualdad de dos números complejos}$$

si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Operaciones con números complejos

Para sumar (o restar) dos números complejos, sume (o reste) por separado las partes reales e imaginarias de los números.

Suma y resta de números complejos

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma estándar, su suma y resta se definen como a continuación.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Resta: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

El **neutro aditivo** en el sistema de números complejos es cero (al igual que en el sistema de números reales). Además, el **inverso aditivo** del número complejo $a + bi$ es

$$-(a + bi) = -a - bi. \qquad \text{Inverso aditivo}$$

Por lo que tiene

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

Ejemplo1 Suma y resta de números complejos

a. $(4 + 7i) + (1 - 6i) = 4 + 7i + 1 - 6i$ Eliminar paréntesis.

$= (4 + 1) + (7i - 6i)$ Agrupar términos comunes.

$= 5 + i$ Escribir en forma estándar.

b. $(1 + 2i) - (4 + 2i) = 1 + 2i - 4 - 2i$ Eliminar paréntesis.

$= (1 - 4) + (2i - 2i)$ Agrupar términos comunes.

$= -3 + 0$ Simplificar.

$= -3$ Escribir en forma estándar.

c. $3i - (-2 + 3i) - (2 + 5i) = 3i + 2 - 3i - 2 - 5i$

$= (2 - 2) + (3i - 3i - 5i)$

$= 0 - 5i$

$= -5i$

d. $(3 + 2i) + (4 - i) - (7 + i) = 3 + 2i + 4 - i - 7 - i$

$= (3 + 4 - 7) + (2i - i - i)$

$= 0 + 0i$

$= 0$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 21.

Observe en los Ejemplos 1(b) y 1(d) que la suma de dos números complejos puede ser un número real.

Muchas de las propiedades de los números reales también son válidas para los números complejos. Aquí algunos ejemplos.

Propiedades asociativas de la suma y la multiplicación

Propiedades conmutativas de la suma y la multiplicación

Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

Observe abajo cómo se emplean estas propiedades cuando se multiplican dos números complejos.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(-1) && i^2 = -1\\ &= ac - bd + (ad)i + (bc)i && \text{Propiedad conmutativa}\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Propiedad asociativa}\end{aligned}$$

En vez de tratar de memorizar esta regla de multiplicación, simplemente debe recordar cómo se utiliza la Propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos.

Ejemplo 2 Multiplicación de números complejos

a. $$\begin{aligned}4(-2 + 3i) &= 4(-2) + 4(3i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= -8 + 12i && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(2 - i)(4 + 3i) &= 2(4 + 3i) - i(4 + 3i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 8 + 6i - 4i - 3i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 8 + 6i - 4i - 3(-1) && i^2 = -1\\ &= (8 + 3) + (6i - 4i) && \text{Agrupar términos comunes.}\\ &= 11 + 2i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(3 + 2i)(3 - 2i) &= 3(3 - 2i) + 2i(3 - 2i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9 - 6i + 6i - 4i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9 - 6i + 6i - 4(-1) && i^2 = -1\\ &= 9 + 4 && \text{Simplificar.}\\ &= 13 && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(3 + 2i)^2 &= (3 + 2i)(3 + 2i) && \text{Cuadrado de un binomio}\\ &= 3(3 + 2i) + 2i(3 + 2i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9 + 6i + 6i + 4i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9 + 6i + 6i + 4(-1) && i^2 = -1\\ &= 9 + 12i - 4 && \text{Simplificar.}\\ &= 5 + 12i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 31.

Tip de estudio

El procedimiento descrito arriba es similar a la multiplicación de dos polinomios y a la agrupación de términos comunes, como en el Método FOIL. Por ejemplo, puede emplear el Método FOIL para multiplicar los dos números complejos del Ejemplo 2(b).

$$(2 - i)(4 + 3i) = \overset{F}{8} + \overset{O}{6i} - \overset{I}{4i} - \overset{L}{3i^2}$$

Complejo conjugado

Observe en el Ejemplo 2(c) que el producto de dos números complejos puede ser un número real. Esto ocurre con pares de números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, llamados **complejo conjugado**.

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2\\ &= a^2 - b^2(-1)\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Multiplicación de conjugados

Multiplique cada número complejo por su complejo conjugado.

a. $1 + i$ **b.** $4 - 3i$

Solución

a. El conjugado de $1 + i$ es $1 - i$.

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

b. El complejo conjugado de $4 - 3i$ es $4 + 3i$.

$$(4 - 3i)(4 + 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 41.

Para escribir el cociente de $a + bi$ y $c + di$ en forma estándar, donde c y d no son cero, multiplique el numerador y el denominador por el complejo conjugado del *denominador* para obtener

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di}\left(\frac{c - di}{c - di}\right)\\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}. \qquad \text{Forma estándar}\end{aligned}$$

Tip de estudio

Observe que cuando multiplica el numerador y el denominador de un cociente de números complejos por

$$\frac{c - di}{c - di}$$

en realidad está multiplicando el cociente por una forma de 1. No está modificando la expresión original, sólo está creando una expresión que es equivalente a la expresión original.

Ejemplo 4 Escritura de un cociente de números complejos en forma estándar

$$\begin{aligned}\frac{2 + 3i}{4 - 2i} &= \frac{2 + 3i}{4 - 2i}\left(\frac{4 + 2i}{4 + 2i}\right) && \text{Multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador.}\\ &= \frac{8 + 4i + 12i + 6i^2}{16 - 4i^2} && \text{Expandir.}\\ &= \frac{8 - 6 + 16i}{16 + 4} && i^2 = -1\\ &= \frac{2 + 16i}{20} && \text{Simplificar.}\\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 53.

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se utiliza la Fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática, con frecuencia obtiene un resultado como $\sqrt{-3}$, el cual sabe que no es un número real. Al factorizar $i = \sqrt{-1}$, puede escribir este número en forma estándar.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$$

Al número $\sqrt{3}\,i$ se le llama *raíz cuadrada principal* de -3.

Ayuda en álgebra

En la Sección P.2 puede repasar las técnicas para el uso de la Fórmula cuadrática.

PRECAUCIÓN / CUIDADO

La definición de la raíz cuadrada principal emplea la regla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida si a y b son negativos. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\sqrt{-5}\sqrt{-5} &= \sqrt{5(-1)}\sqrt{5(-1)}\\ &= \sqrt{5}i\sqrt{5}i\\ &= \sqrt{25}i^2\\ &= 5i^2 = -5\end{aligned}$$

mientras que

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5.$$

Para evitar problemas con las raíces cuadradas de números negativos, asegúrese de convertir los números complejos a la forma estándar *antes* de la multiplicación.

Raíz cuadrada principal de un número negativo

Si a es un número positivo, la **raíz cuadrada principal** del número negativo $-a$ se define como

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo 5 Escritura de números complejos en forma estándar

a. $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}\,i\sqrt{12}\,i = \sqrt{36}\,i^2 = 6(-1) = -6$

b. $\sqrt{-48} - \sqrt{-27} = \sqrt{48}\,i - \sqrt{27}\,i = 4\sqrt{3}\,i - 3\sqrt{3}\,i = \sqrt{3}\,i$

c.
$$\begin{aligned}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)^2 &= \left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)^2\\ &= (-1)^2 - 2\sqrt{3}\,i + \left(\sqrt{3}\right)^2(i^2)\\ &= 1 - 2\sqrt{3}\,i + 3(-1)\\ &= -2 - 2\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 63.

Ejemplo 6 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resuelva (a) $x^2 + 4 = 0$ y (b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución

a. $x^2 + 4 = 0$ Escribir la ecuación original.

$x^2 = -4$ Restar 4 de cada lado.

$x = \pm 2i$ Extraer raíces cuadradas.

b. $3x^2 - 2x + 5 = 0$ Escribir la ecuación original.

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$ Fórmula cuadrática

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$ Simplificar.

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{14}\,i}{6}$ Escribir $\sqrt{-56}$ en forma estándar.

$= \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}i$ Escribir en forma estándar.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 69.

4.1 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione el tipo de número complejo con su definición.

(a) Número real (i) $a + bi, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$

(b) Número complejo (ii) $a + bi, \quad a = 0, \quad b \neq 0$

(c) Número imaginario puro (iii) $a + bi, \quad b = 0$

En los Ejercicios 2-4, complete los espacios.

2. La unidad imaginaria i se define como $i =$ ________, donde $i^2 =$ ________.

3. Si a es un número positivo, la raíz ________ ________ del número negativo $-a$ se define como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$.

4. A los números $a + bi$ y $a - bi$ se les llama _____ _____ y su producto es un número real $a^2 + b^2$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los números reales *a* y *b* de tal manera que la ecuación sea verdadera.

5. $a + bi = -12 + 7i$ **6.** $a + bi = 13 + 4i$

7. $(a - 1) + (b + 3)i = 5 + 8i$

8. $(a + 6) + 2bi = 6 - 5i$

En los Ejercicios 9-20, escriba el número complejo en forma estándar.

9. $8 + \sqrt{-25}$ **10.** $5 + \sqrt{-36}$

11. $2 - \sqrt{-27}$ **12.** $1 + \sqrt{-8}$

13. $\sqrt{-80}$ **14.** $\sqrt{-4}$

15. 14 **16.** 75

17. $-10i + i^2$ **18.** $-4i^2 + 2i$

19. $\sqrt{-0.09}$ **20.** $\sqrt{-0.0049}$

En los Ejercicios 21-30, desarrolle la suma o la resta y escriba el resultado en forma estándar.

21. $(7 + i) + (3 - 4i)$ **22.** $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$

23. $(9 - i) - (8 - i)$ **24.** $(3 + 2i) - (6 + 13i)$

25. $\left(-2 + \sqrt{-8}\right) + \left(5 - \sqrt{-50}\right)$

26. $\left(8 + \sqrt{-18}\right) - \left(4 + 3\sqrt{2}i\right)$

27. $13i - (14 - 7i)$

28. $25 + (-10 + 11i) + 15i$

29. $-\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i\right)$

30. $(1.6 + 3.2i) + (-5.8 + 4.3i)$

En los Ejercicios 31-40, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

31. $(1 + i)(3 - 2i)$ **32.** $(7 - 2i)(3 - 5i)$

33. $12i(1 - 9i)$ **34.** $-8i(9 + 4i)$

35. $\left(\sqrt{14} + \sqrt{10}i\right)\left(\sqrt{14} - \sqrt{10}i\right)$

36. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}i\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}i\right)$

37. $(6 + 7i)^2$ **38.** $(5 - 4i)^2$

39. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$ **40.** $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

En los Ejercicios 41-48, escriba el complejo conjugado del número complejo. Después multiplique el número por su complejo conjugado.

41. $9 + 2i$ **42.** $8 - 10i$

43. $-1 - \sqrt{5}i$ **44.** $-3 + \sqrt{2}i$

45. $\sqrt{-20}$ **46.** $\sqrt{-15}$

47. $\sqrt{6}$ **48.** $1 + \sqrt{8}$

En los Ejercicios 49-58, escriba el cociente en forma estándar.

49. $\dfrac{3}{i}$ **50.** $-\dfrac{14}{2i}$

51. $\dfrac{2}{4 - 5i}$ **52.** $\dfrac{13}{1 - i}$

53. $\dfrac{5 + i}{5 - i}$ **54.** $\dfrac{6 - 7i}{1 - 2i}$

55. $\dfrac{9 - 4i}{i}$ **56.** $\dfrac{8 + 16i}{2i}$

57. $\dfrac{3i}{(4 - 5i)^2}$ **58.** $\dfrac{5i}{(2 + 3i)^2}$

En los Ejercicios 59-62, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

59. $\dfrac{2}{1 + i} - \dfrac{3}{1 - i}$

60. $\dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{5}{2 - i}$

61. $\dfrac{i}{3 - 2i} + \dfrac{2i}{3 + 8i}$

62. $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{3}{4 - i}$

En los Ejercicios 63-68, escriba el número complejo en forma estándar.

63. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$ **64.** $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$

65. $\left(\sqrt{-15}\right)^2$ **66.** $\left(\sqrt{-75}\right)^2$

67. $\left(3 + \sqrt{-5}\right)\left(7 - \sqrt{-10}\right)$ **68.** $\left(2 - \sqrt{-6}\right)^2$

En los Ejercicios 69-78, use la Fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática.

69. $x^2 - 2x + 2 = 0$ **70.** $x^2 + 6x + 10 = 0$

71. $4x^2 + 16x + 17 = 0$ **72.** $9x^2 - 6x + 37 = 0$

73. $4x^2 + 16x + 15 = 0$ **74.** $16t^2 - 4t + 3 = 0$

75. $\frac{3}{2}x^2 - 6x + 9 = 0$ **76.** $\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{16} = 0$

77. $1.4x^2 - 2x - 10 = 0$ **78.** $4.5x^2 - 3x + 12 = 0$

En los Ejercicios 79-88, simplifique el número complejo y escríbalo en forma estándar.

79. $-6i^3 + i^2$ **80.** $4i^2 - 2i^3$

81. $-14i^5$ **82.** $(-i)^3$

83. $\left(\sqrt{-72}\right)^3$ **84.** $\left(\sqrt{-2}\right)^6$

85. $\dfrac{1}{i^3}$ **86.** $\dfrac{1}{(2i)^3}$

87. $(3i)^4$ **88.** $(-i)^6$

89. IMPEDANCIA A la oposición a la corriente en un circuito eléctrico se le llama impedancia. La impedancia z en un circuito en paralelo con dos trayectorias satisface la ecuación

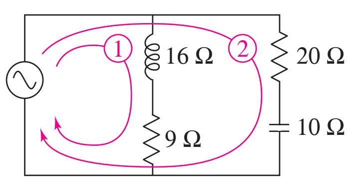
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

donde z_1 es la impedancia (en ohms) de la trayectoria 1 y z_2 es la impedancia de la trayectoria 2.

(a) La impedancia de cada trayectoria en un circuito en paralelo se encuentra sumando las impedancias de todos los componentes en la trayectoria. Use la tabla para encontrar z_1 y z_2.

(b) Encuentre la impedancia z.

	Resistencia	Bobina	Capacitor
Símbolo			
Impedancia	a	bi	$-ci$



90. Eleve al cubo cada número complejo.

(a) 2 (b) $-1 + \sqrt{3}i$ (c) $-1 - \sqrt{3}i$

91. Eleve a la cuarta potencia cada número complejo.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

92. Escriba cada una de las potencias de i como i, $-i$, 1 o -1.

(a) i^{40} (b) i^{25} (c) i^{50} (d) i^{67}

EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? **En los Ejercicios 93-96, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.**

93. No existe un número complejo que sea igual a su complejo conjugado.

94. $-i\sqrt{6}$ es una solución de $x^4 - x^2 + 14 = 56$.

95. $i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = -1$

96. La suma de dos números complejos siempre es un número real.

97. RECONOCIMIENTO DEL PATRÓN Complete lo siguiente.

$i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

$i^5 =$ ☐ $i^6 =$ ☐ $i^7 =$ ☐ $i^8 =$ ☐

$i^9 =$ ☐ $i^{10} =$ ☐ $i^{11} =$ ☐ $i^{12} =$ ☐

¿Qué patrón observa? Escriba una descripción breve de cómo encontraría i elevado a cualquier potencia entera positiva.

98. TOQUE FINAL Considere las funciones

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 4 \text{ y } g(x) = -2(x - 3)^2 - 4.$$

(a) Sin graficar alguna función, determine si la gráfica de f y la gráfica de g tienen intersecciones en x. Explique su razonamiento.

(b) Resuelva $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$.

(c) Explique cómo se relacionan los ceros de f y g si sus gráficas tienen intersecciones en x.

(d) Para la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, haga un enunciado general acerca de cómo son afectados a, h y k si la gráfica de f tiene intersecciones en x y si los ceros de f son reales o complejos.

99. ANÁLISIS DE ERRORES Describa el error.

$$\cancel{\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{(-6)(-6)} = \sqrt{36} = 6}$$

100. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el complejo conjugado del producto de dos números complejos $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ es el producto de sus complejos conjugados.

101. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el complejo conjugado de la suma de dos números complejos $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ es la suma de sus complejos conjugados.

4.2 SOLUCIONES COMPLEJAS DE ECUACIONES

Lo que debe aprender

- Determinar el número de soluciones de ecuaciones polinómicas.
- Encontrar las soluciones de ecuaciones polinómicas.
- Encontrar los ceros de funciones polinómicas y encontrar funciones polinómicas dados los ceros de las funciones.

Por qué debe aprenderlo

La obtención de los ceros de las funciones polinómicas es una parte importante de la resolución de problemas en el mundo real. Por ejemplo, en el Ejercicio 85 en la página 352, los ceros de una función polinómica pueden ayudarle a analizar la función de la ganancia para un horno de microondas.

Brand X Pictures/Getty Images

Número de soluciones de una ecuación polinómica

El Teorema fundamental del álgebra implica que una ecuación polinómica de grado n tiene precisamente n soluciones en el sistema de números complejos. Estas soluciones pueden ser reales o complejas y pueden repetirse. El Teorema fundamental del álgebra y el Teorema de la factorización lineal se listan abajo para su repaso. Para una comprobación del Teorema de la factorización lineal, vea Demostraciones matemáticas en la página 372.

Teorema fundamental del álgebra

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.

Observe que el encontrar los ceros de una función polinómica f es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación polinómica $f(x) = 0$.

Teorema de la factorización lineal

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

Ejemplo 1 Soluciones de ecuaciones polinómicas

a. La ecuación de primer grado $x - 2 = 0$ tiene exactamente *una* solución: $x = 2$.

b. La ecuación de segundo grado

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad \text{Ecuación de segundo grado}$$
$$(x - 3)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *dos* soluciones: $x = 3$ y $x = 3$. (A esto se le llama *solución repetida*.)

c. La ecuación de tercer grado

$$x^3 + 4x = 0 \qquad \text{Ecuación de tercer grado}$$
$$x(x - 2i)(x + 2i) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *tres* soluciones: $x = 0$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d. La ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación de cuarto grado}$$
$$(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *cuatro* soluciones: $x = 1$, $x = -1$, $x = i$ y $x = -i$.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 5.

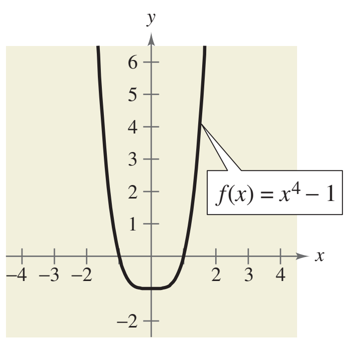


FIGURA 4.2

Puede emplear la gráfica para comprobar el número de soluciones *reales* de una ecuación. Como se muestra en la Figura 4.2, la gráfica de $f(x) = x^4 - 1$ tiene dos intersecciones en x, lo cual implica que tiene dos soluciones reales.

Toda ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene precisamente dos soluciones dadas por la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión dentro del radical, $b^2 - 4ac$, se le llama **discriminante** y puede emplearse para determinar si las soluciones son reales, repetidas o complejas.

1. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real repetida.

3. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Ejemplo 2 Uso del discriminante

Use el discriminante para encontrar el número de soluciones reales de cada ecuación.

a. $4x^2 - 20x + 25 = 0$ **b.** $13x^2 + 7x + 2 = 0$ **c.** $5x^2 - 8x = 0$

Solución

a. Para esta ecuación, $a = 4$, $b = -20$ y $c = 25$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(4)(25) = 400 - 400 = 0.$$

Debido a que el discriminante es cero, existe una solución real repetida.

b. Para esta ecuación, $a = 13$, $b = 7$ y $c = 2$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4(13)(2) = 49 - 104 = -55.$$

Debido a que el discriminante es negativo, existen dos soluciones complejas.

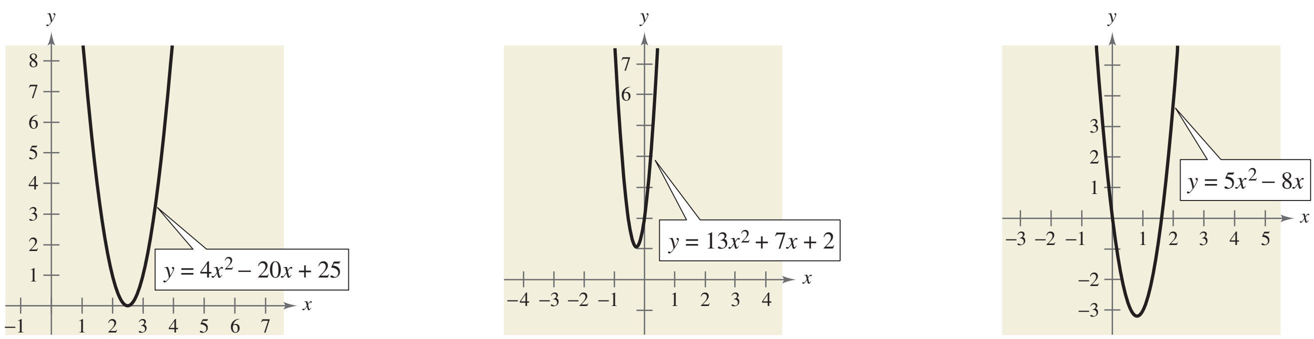
c. Para esta ecuación, $a = 5$, $b = -8$ y $c = 0$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(5)(0) = 64 - 0 = 64.$$

Debido a que el discriminante es positivo, existen dos soluciones reales distintas.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 9.

La Figura 4.3 muestra las gráficas de las funciones que corresponden a las ecuaciones en el Ejemplo 2. Observe que con una solución repetida, la gráfica *toca* el eje x en su intersección en x. Con dos soluciones complejas, la gráfica no tiene intersecciones en x. Con dos soluciones reales, la gráfica *atraviesa* el eje x en sus interseccciones en x.



(a) Solución real repetida **(b) Sin solución real** **(c) Dos soluciones reales distintas**

FIGURA 4.3

Determinación de las soluciones de ecuaciones polinómicas

Ejemplo 3 Resolución de una ecuación cuadrática

Resuelva $x^2 + 2x + 2 = 0$. Escriba las soluciones complejas en forma estándar.

Solución

Usando $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$, puede aplicar la fórmula cuadrática como a continuación.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \quad \text{Sustituir 1 para } a\text{, 2 para } b \text{ y 2 para } c.$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2} \quad \text{Simplificar.}$$

$$= -1 \pm i \quad \text{Escribir en forma estándar.}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 23.

En el Ejemplo 3, las dos soluciones complejas son **conjugadas**. Es decir, son de la forma $a \pm bi$. Esto no es una coincidencia, como se indica por medio del siguiente teorema.

Las soluciones complejas ocurren en pares conjugados

Si $a + bi$, $b \neq 0$, es una solución de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado $a - bi$ también es una solución de la ecuación.

Asegúrese de observar que este resultado sólo es verdadero si el polinomio tiene coeficientes *reales*. Por ejemplo, el resultado aplica para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, pero no para la ecuación $x - i = 0$.

Ejemplo 4 Resolución de una ecuación polinómica

Resuelva $x^4 - x^2 - 20 = 0$.

Solución

$$x^4 - x^2 - 20 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$(x^2 - 5)(x^2 + 4) = 0 \quad \text{Factorizar de manera parcial.}$$

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 2i)(x - 2i) = 0 \quad \text{Factorizar por completo.}$$

El igualar a cero cada factor da las soluciones $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -2i$ y $x = 2i$.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 51.

Determinación de los ceros de funciones polinómicas

El problema de encontrar los *ceros* de una función polinómica es en esencia el mismo problema que encontrar las soluciones de una ecuación polinómica. Por ejemplo, los ceros de la función polinómica

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

son simplemente las soluciones de la ecuación polinómica.

$$3x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Ejemplo 5 Obtención de los ceros de una función polinómica

Encuentre todos los ceros de

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

dado que $1 + 3i$ es un cero de f.

Solución algebraica

Debido a que los ceros complejos ocurren en pares conjugados, conoce que $1 - 3i$ también es un cero de f. Esto significa que

$$[x - (1 + 3i)] \quad \text{y} \quad [x - (1 - 3i)]$$

son factores de f. El multiplicar estos dos factores produce

$$\begin{aligned} [x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] &= [(x - 1) - 3i][(x - 1) + 3i] \\ &= (x - 1)^2 - 9i^2 \\ &= x^2 - 2x + 10. \end{aligned}$$

Utilizando la división larga, puede dividir $x^2 - 2x + 10$ en f para obtener lo siguiente:

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x^2 - 2x + 10 \overline{\smash{\big)}\, x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 10x^2} \\ -x^3 - 4x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - 10x} \\ -6x^2 + 12x - 60 \\ \underline{-6x^2 + 12x - 60} \\ 0 \end{array}$$

Por lo que tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) \\ &= (x^2 - 2x + 10)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

y puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 53.

Solución gráfica

Los ceros complejos siempre ocurren en pares conjugados, por lo que conoce que $1 - 3i$ también es un cero de f. Debido que el polinomio es un polinomio de cuarto grado, conoce que existen otros dos ceros de la función. Use una utilería de graficación para graficar

$$y = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

como se muestra en la Figura 4.4

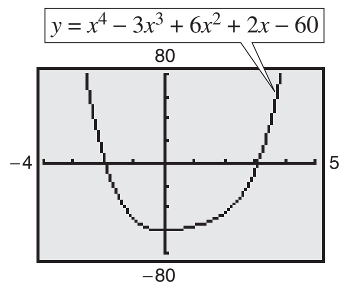


FIGURA 4.4

Puede observar que -2 y 3 parecen ser las intersecciones en x de la gráfica de la función. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* o *trace* de la utilería de graficación para confirmar que $x = -2$ y $x = 3$ son las intersecciones en x de la gráfica. Por lo que puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

Ejemplo 6 Obtención de un polinomio con los ceros dados

Encuentre una función polinómica de cuarto grado con los coeficientes reales que tienen a -1, -1 y $3i$ como ceros.

Solución

Debido a que $3i$ es un cero *y* se enuncia que el polinomio tiene coeficientes reales, conoce que el conjugado $-3i$ también debe ser un cero. Por lo que, a partir del Teorema de la factorización lineal, $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = a(x + 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i).$$

Por simplicidad, sea $a = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 9) \\ &= x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 65.

Ejemplo 7 Obtención de un polinomio con los ceros dados

Encuentre una función polinómica cúbica f con los coeficientes reales que tienen a 2 y $1 - i$ como ceros, tales que $f(1) = 3$.

Solución

Debido a que $1 - i$ es un cero de f, también lo es $1 + i$. Por lo que

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 2)[x - (1 - i)][x - (1 + i)] \\ &= a(x - 2)[(x - 1) + i][(x - 1) - i] \\ &= a(x - 2)[(x - 1)^2 - i^2] \\ &= a(x - 2)(x^2 - 2x + 2) \\ &= a(x^3 - 4x^2 + 6x - 4). \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de a, use el hecho de que $f(1) = 3$ y obtiene

$$\begin{aligned} f(1) &= a[1^3 - 4(1)^2 + 6(1) - 4] \\ 3 &= -a \\ -3 &= a. \end{aligned}$$

Por lo que $a = -3$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \\ &= -3x^3 + 12x^2 - 18x + 12. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora intente el Ejercicio 71.

4.2 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Complete los espacios.

1. El ________ ________ del ________ enuncia que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.
2. El ________ ________ ________ enuncia que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene precisamente n factores lineales, $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.
3. A dos soluciones complejas de la forma $a \pm bi$ de una ecuación polinómica con coeficientes reales se les llaman __________.
4. A la expresión dentro del radical de la Fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, se le llama el __________ y se le emplea para determinar los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, determine el número de soluciones de la ecuación en el sistema de números complejos.

5. $2x^3 + 3x + 1 = 0$
6. $x^6 + 4x^2 + 12 = 0$
7. $50 - 2x^4 = 0$
8. $14 - x + 4x^2 - 7x^5 = 0$

En los Ejercicios 9-16, use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación cuadrática.

9. $2x^2 - 5x + 5 = 0$
10. $2x^2 - x - 1 = 0$
11. $\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 8 = 0$
12. $\frac{1}{3}x^2 - 5x + 25 = 0$
13. $2x^2 - x - 15 = 0$
14. $-2x^2 + 11x - 2 = 0$
15. $x^2 + 2x + 10 = 0$
16. $x^2 - 4x + 53 = 0$

En los Ejercicios 17-30, resuelva la ecuación. Escriba las soluciones complejas en forma estándar.

17. $x^2 - 5 = 0$
18. $3x^2 - 1 = 0$
19. $(x + 5)^2 - 6 = 0$
20. $16 - (x - 1)^2 = 0$
21. $x^2 - 8x + 16 = 0$
22. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
23. $x^2 + 2x + 5 = 0$
24. $54 + 16x - x^2 = 0$
25. $4x^2 - 4x + 5 = 0$
26. $4x^2 - 4x + 21 = 0$
27. $230 + 20x - 0.5x^2 = 0$
28. $125 - 30x + 0.4x^2 = 0$
29. $8 + (x + 3)^2 = 0$
30. $(x - 1)^2 + 12 = 0$

ANÁLISIS GRÁFICO Y ANALÍTICO En los Ejercicios 31-34, (a) use una utilería de graficación para graficar la función, (b) encuentre todos los ceros de la función y (c) describa la relación entre el número de ceros reales y el número de intersecciones en x de la gráfica.

31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$
32. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
33. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$
34. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

En los Ejercicios 35-52, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como un producto de factores lineales.

35. $f(x) = x^2 + 36$
36. $f(x) = x^2 - x + 56$
37. $h(x) = x^2 - 2x + 17$
38. $g(x) = x^2 + 10x + 17$
39. $f(x) = x^4 - 81$
40. $f(y) = y^4 - 256$
41. $f(z) = z^2 - 2z + 2$
42. $h(x) = x^2 - 6x - 10$
43. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$
44. $f(x) = x^3 - 8x^2 - 12x + 96$
45. $h(x) = x^3 - 4x^2 + 16x - 64$
46. $h(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$
47. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 36x - 18$
48. $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 96x + 72$
49. $g(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 96x$
50. $h(x) = x^4 + x^3 + 100x^2 + 100x$
51. $f(x) = x^4 + 10x^2 + 9$
52. $f(x) = x^4 + 29x^2 + 100$

En los Ejercicios 53-62, use el cero dado para encontrar todos los ceros de la función.

	Función	*Cero*
53.	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 50x + 75$	$5i$
54.	$f(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$	$3i$
55.	$f(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$	$2i$
56.	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$	i
57.	$g(x) = 4x^3 + 23x^2 + 34x - 10$	$-3 + i$
58.	$g(x) = x^3 - 7x^2 - x + 87$	$5 + 2i$
59.	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 40$	$3 - i$
60.	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 14x + 20$	$-1 - 3i$
61.	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 21x + 22$	$-3 + \sqrt{2}i$
62.	$h(x) = 3x^3 - 4x^2 + 8x + 8$	$1 - \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 63-68, encuentre una función polinómica con los coeficientes reales que tengan los ceros dados. (Existen varias respuestas correctas.)

63. $1, 5i$

64. $4, -3i$

65. $2, 5 + i$

66. $5, 3 - 2i$

67. $\frac{2}{3}, -1, 3 + \sqrt{2}i$

68. $-5, -5, 1 + \sqrt{3}i$

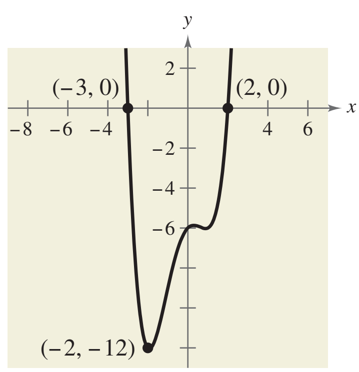
En los Ejercicios 69-74, encuentre una función polinómica cúbica *f* con los coeficientes reales que tengan los ceros dados y el valor de la función dada.

	Ceros	*Valor de la función*
69.	$1, 2i$	$f(-1) = 10$
70.	$2, i$	$f(-1) = 6$
71.	$-1, 2 + i$	$f(2) = -9$
72.	$-2, 1 - 2i$	$f(2) = -10$
73.	$\frac{1}{2}, 1 + \sqrt{3}i$	$f(1) = -3$
74.	$\frac{3}{2}, 2 + \sqrt{2}i$	$f(1) = -6$

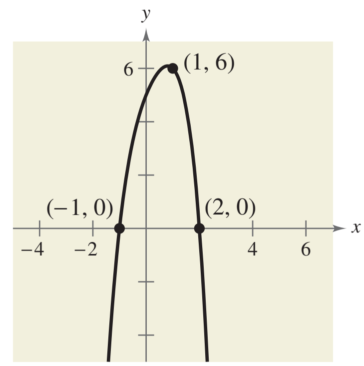
En los Ejercicios 75-80, encuentre una función polinómica *f* con los coeficientes reales que tengan los ceros complejos y la intersección en *x* dados. (Existen varias respuestas correctas.)

	Ceros complejos	*Intersección en x*
75.	$x = 4 \pm 2i$	$(-2, 0)$
76.	$x = 3 \pm i$	$(1, 0)$
77.	$x = 2 \pm \sqrt{6}i$	$(-1, 0)$
78.	$x = 2 \pm \sqrt{5}i$	$(2, 0)$
79.	$x = -1 \pm \sqrt{3}i$	$(4, 0)$
80.	$x = -3 \pm \sqrt{2}i$	$(-2, 0)$

81. Encuentre la función polinómica de cuarto grado f con los coeficientes reales que tengan los ceros $x = \pm\sqrt{2}i$ y las intersecciones en x mostradas en la gráfica.



82. Encuentre la función polinómica de cuarto grado f con los coeficientes reales que tengan los ceros $x = \pm\sqrt{5}i$ y las intersecciones en x mostradas en la gráfica.



83. ALTURA DE UN BALÓN Un balón es pateado hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La altura h (en pies) del balón está dada por $h(t) = -16t^2 + 48t$, $0 \le t \le 3$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) Complete la tabla para encontrar las alturas h del balón para los tiempos dados t.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
h							

(b) A partir de la tabla en el inciso (a), ¿aparece que el balón alcanza una altura de 64 pies?

(c) Determine de manera algebraica si el balón alcanza una altura de 64 pies.

(d) Use una utilería de graficación para graficar la función. Determine de manera gráfica si el balón alcanza una altura de 64 pies.

(e) Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

84. ALTURA DE UNA PELOTA DE BEISBOL Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 5 pies con una velocidad inicial de 79 pies por segundo. La altura h (en pies) de la pelota de beisbol está dada por $h = -16t^2 + 79t + 5$, $0 \le t \le 5$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) Complete la tabla para encontrar las alturas h de la pelota de beisbol para los tiempos dados t.

t	0	1	2	3	4	5
h						

(b) A partir de la tabla en el inciso (a), ¿aparece que la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies?

(c) Determine de manera algebraica si la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies.

(d) Use una utilería de graficación para graficar la función. Determine de manera gráfica si la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies.

(e) Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

Este texto líder en el mercado sigue ofreciendo a los estudiantes y profesores explicaciones estructuradas de los conceptos matemáticos. Diseñado para un curso de un semestre, prepara a los estudiantes a estudiar cálculo. La nueva octava edición conserva las características que han hecho de este texto una solución completa para los estudiantes y los instructores: aplicaciones interesantes, diseño de vanguardia y tecnología innovadora, combinados con una gran cantidad de ejercicios cuidadosamente escritos.

Características

- *Nuevas entradas de capítulo* La *entrada de capítulo* consta de tres partes, *En matemáticas*, *En el mundo real* y *En carreras*. *En matemáticas* describe un tema matemático importante enseñado en el capítulo. *En el mundo real* le indica a los estudiantes dónde se encontrarán este tema en situaciones reales. *En carreras* relaciona los ejercicios de aplicaciones a una variedad de carreras.
- *Nuevos tips de estudio y Precauciones/cuidado* A los estudiantes se les da la información perspicaz en dos características nuevas. El *Tip de estudio* le provee a los estudiantes información o sugerencias útiles para el aprendizaje del tema. Los recuadros *Precaución/Cuidado* señalan los errores matemáticos comunes cometidos por los estudiantes.
- *Nuevas ayudas en álgebra* Las *Ayudas en álgebra* remiten a los estudiantes a las secciones del libro donde pueden repasar las habilidades del álgebra necesarias para dominar el tema actual.
- *Nuevos Ejemplos lado a lado* A lo largo del libro, presentamos soluciones para muchos ejemplos desde múltiples perspectivas, de manera algebraica, gráfica y numérica. El formato lado a lado de esta característica pedagógica ayuda a los estudiantes a observar que un problema puede resolverse en más de una manera y observar que diferentes métodos producen el mismo resultado.
- *Nuevos ejercicios de Toque final* Son problemas conceptuales que sintetizan los temas clave y proveen a los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos de cada sección. Los ejercicios de Toque final son excelentes para las explicaciones en el salón de clases o para la preparación de exámenes y los profesores pueden encontrar un valor agregado en la integración de estos problemas en sus repasos de la sección.
- *Nuevos Resúmenes del capítulo* Los *Resúmenes del capítulo* incluyen ahora una explicación y/o ejemplo de cada objetivo enseñado en el capítulo.
- *Conjuntos de ejercicios revisados* Los conjuntos de ejercicios han sido examinados de manera cuidadosa y extensiva para asegurar que son rigurosos y cubren todos los temas sugeridos por nuestros usuarios. Se han añadido muchos ejercicios desafiantes y de construcción de habilidades.

ISBN 13: 978-607481734-8
ISBN 10: 607481734-0
9 786074 817348

CENGAGE Learning™
http://latinoamerica.cengage.com