Cengage Learning®

Métodos cuantitativos para los NEGOCIOS

13a. edición

David R. Anderson · Dennis J. Sweeney
Thomas A. Williams · Jeffrey D. Camm
James J. Cochran · Michael J. Fry
Jeffrey W. Ohlmann

CENGAGE
Learning

Métodos cuantitativos para los negocios 13a ed.

Thomas A. Williams
Rochester Institute of Technology

David R. Anderson
University of Cincinnati

Dennis J. Sweeney
University of Cincinnati

Jeffrey D. Camm
University of Cincinnati

James J. Cochran
University of Alabama

Michael J. Fry
University of Cincinnati

Jeffrey W. Ohlmann
University of Iowa

Traducción:
Víctor Altamirano García
Traductor profesional

Revisión técnica:
José Cruz Ramos Báez
Vinicio Pérez Fonseca
Ignacio García Juárez
Iren Castillo Saldaña
Eduardo López Chávez
María de Guadalupe Arroyo Santisteban
Academia de Matemáticas ECEE (Escuela de Ciencias Económicas Empresariales), Universidad Panamericana

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning®

***Métodos cuantitativos para los negocios*, Decimotercera edición**

David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, Jeffrey D. Camm, James J. Cochran, Michael J. Fry, Jeffrey W. Ohlmann

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Omegar Martínez

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres

Imágenes de portada:
Shutterstock

Composición tipográfica:
Gerardo Larios
Luis Á. Arroyo

Datos para catalogación bibliográfica:
Traducido del libro *Quantitative Methods for Business*, Thirteenth Edition.
David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, *et al*.
Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-285-86631-4

Datos para catalogación bibliográfica:
Anderson, Sweeney, et al.,
Métodos cuantitativos para los negocios, 13a. ed.

ISBN: 978-607-522-845-7

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 18 17 16 15

Contenido

Capítulo 3 Distribuciones de probabilidad 61

Capítulo 4 Análisis de decisiones 103

Capítulo 13 Programación de proyectos: PERT / CPM 592

Capítulo 14 Modelos de inventario 631

Capítulo 16 Simulación 719

CAPÍTULO 1

Introducción

CONTENIDO

Este libro se enfoca en el uso de los métodos cuantitativos como apoyo para la toma de decisiones. No pone énfasis en los métodos en sí, sino en la manera en que éstos pueden contribuir a tomar mejores decisiones. Existen muchos nombres para el *corpus* de conocimientos que incluye los enfoques cuantitativos para la toma de decisiones; en la actualidad, los términos de uso más común, ciencias de la administración, investigación de operaciones y ciencias de la decisión, suelen usarse de forma indistinta.

La revolución de la administración científica de principios del siglo XX, iniciada por Frederic W. Taylor, proporcionó los fundamentos para el uso de los métodos cuantitativos en la administración. No obstante, la mayor parte de la investigación moderna sobre el uso de métodos cuantitativos en la toma de decisiones se originó durante la Segunda Guerra Mundial. En ese periodo se formaron equipos conformados por personas con diversas especialidades (es decir, matemáticos, ingenieros y científicos del comportamiento) para que abordaran los problemas estratégicos y tácticos que enfrentaban las fuerzas armadas. Después de la guerra, muchos de los miembros de estos equipos continuaron su investigación sobre los métodos cuantitativos para la toma de decisiones.

Dos acontecimientos que ocurrieron durante el periodo posterior a la Segunda Guerra Mundial condujeron al crecimiento y el uso de los métodos cuantitativos en aplicaciones no militares. Primero, la investigación continua dio como resultado varios desarrollos metodológicos. Es probable que el acontecimiento más significativo fuera el descubrimiento del método simplex para resolver los problemas de programación lineal que realizó George Dantzig en 1947. Al mismo tiempo que ocurrieron estos desarrollos metodológicos, las computadoras digitales impulsaron una explosión virtual en la capacidad de procesamiento de cómputo. Las computadoras permitieron a los profesionales utilizar los avances metodológicos para resolver una gran variedad de problemas. La explosión de la tecnología continúa y las computadoras personales ahora pueden usarse para resolver problemas mayores de los que resolvían los *mainframes* en la década de los noventa.

Con el fin de reforzar la naturaleza aplicada del libro y proporcionar un mejor entendimiento de la variedad de aplicaciones en que los *métodos cuantitativos* (M. C.) se han usado con éxito, a lo largo del texto se presentan artículos de M. C. en Acción. Cada artículo de M. C. en Acción resume un uso de los métodos cuantitativos en la práctica. El primer artículo de M. C. en Acción, Administración de ingresos en AT&T Park, describe uno de los usos más importantes de los métodos cuantitativos en la industria del deporte y el entretenimiento.

M.C. *en* ACCIÓN

*ADMINISTRACIÓN DE INGRESOS EN AT&T PARK**

Imaginen la difícil posición en que se encontraba Russ Stanley, vicepresidente de Servicios de Boletaje de los Giants de San Francisco, a finales de la temporada de béisbol de 2010. Antes de esta temporada, su organización había adoptado un enfoque dinámico para determinar el precio de sus boletos, similar al modelo iniciado de manera exitosa por Thomas M. Cook y su grupo de investigación de operaciones en American Airlines. Stanley deseaba con desesperación que los Giants se aseguraran un renacimiento en los *playoffs,* pero no quería que el equipo lo hiciera *demasiado pronto.*

Cuando se determina el precio de un bien o servicio de manera dinámica, las organizaciones suelen revisar de modo regular la oferta y la demanda del producto y utiliza la investigación de operaciones para determinar si el precio debe cambiar con el fin de reflejar estas condiciones. Conforme se acerca la fecha de despegue de un vuelo, el costo de los boletos aumenta si los asientos en éste son relativamente escasos. Mientras que la aerolínea ofrece descuentos en los boletos de un vuelo cercano con pocos pasajeros. Gracias al uso de la optimización para establecer de modo dinámico los precios de los boletos, American Airlines genera casi mil millones de dólares anualmente en ingresos progresivos.

El equipo administrativo de los Giants de San Francisco reconoció las similitudes entre su producto principal (bo-

(*continúa*)

* Basado en Peter Horner, "The Sabre Story", *OR/MS Today* (junio 2000); Ken Belson, "Baseball Tickets Too Much? Check Back Tomorrow", *New York Times.com* (mayo 18, 2009); y Rob Gloster, "Giants Quadruple Price of Cheap Seats as Playoffs Drive Demand", *Bloomberg Bussinessweek* (septiembre 20, 2010).

letos para partidos en casa) y el producto principal de las aerolíneas (boletos para vuelos), y adoptó un sistema similar de administración de ingresos. Si un juego específico de los Giants atrae a los fanáticos, los boletos se venden rápidamente y la demanda excede por mucho la oferta conforme se acerca el juego; bajo estas condiciones, los fans estarán dispuestos a pagar más y los Giants pueden cobrar un recargo por el boleto. De igual manera, los boletos para partidos menos atractivos son sujetos de descuentos que reflejan la demanda relativamente baja por parte de los fans. Por esta razón Stanley se encontraba en un dilema al final de la temporada de béisbol de 2010. Los Giants estaban inmersos en una cerrada competencia con los Padres de San Diego por el título, lo que incrementó la demanda de boletos para los juegos de los Giants, y el equipo debía jugar los últimos tres juegos de la temporada contra los Padres en San Francisco. Sin bien Stanley indudablemente deseaba que su equipo ganara su división y llegara a los *playoffs* de las ligas mayores, también reconocía que los ingresos de su equipo mejorarían enormemente si no calificaba para los *playoffs* hasta el último día de la temporada. "Supongo que, desde una perspectiva financiera, sería mejor esperarse hasta el último juego —dijo Stanley en una entrevista a finales de la temporada—. Los nervios nos están comiendo, no dejamos de dar vueltas mientras vemos estos partidos".

¿En verdad funcionan la administración de ingresos y la investigación de operaciones? Actualmente, casi todas las aerolíneas usan algún tipo de sistema de administración de ingresos, y los cruceros, hoteles y los servicios de renta de automóviles también utilizan algún tipo de método de administración de ingresos. En lo que respecta a los Giants, Stanley afirmó que la asignación dinámica de precios proporcionó un aumento de 7% u 8% en los ingresos por asiento de los juegos en casa de los Giants durante la temporada de 2010. Casualmente, los Giants ganaron la división oeste de la Liga nacional el último día de la temporada y finalmente ganaron la Serie Mundial. Muchas franquicias profesionales de deportes observan el ejemplo de los Giants y consideran la implementación de sistemas de asignación de precios del boletaje con dinámicas similares.

1.1 Solución de problemas y toma de decisiones

La solución de problemas se puede definir como el proceso de identificar una diferencia entre el estado actual de las cosas y el estado deseado y luego emprender acciones para reducir o eliminar la diferencia. Para problemas que tienen la suficiente importancia como para justificar el tiempo y el esfuerzo de un análisis minucioso, el proceso de solución de problemas implica los pasos siguientes:

1. Identificar y definir el problema
2. Determinar el conjunto de soluciones alternas
3. Determinar el criterio o los criterios que se utilizarán para evaluar las alternativas
4. Evaluar las alternativas
5. Elegir una alternativa
6. Implementar la alternativa seleccionada
7. Evaluar los resultados para determinar si se ha obtenido una solución satisfactoria

La toma de decisiones es el término generalmente asociado con los primeros cinco pasos del proceso de solución de problemas. Por ende, el primer paso de la toma de decisiones es identificar y definir el problema. La toma de decisiones finaliza con la elección de una alternativa, lo que constituye el acto de tomar la decisión.

Considere el ejemplo siguiente del proceso de toma de decisiones. Suponga que por el momento está desempleado y que le gustaría ocupar un puesto que le permita tener una carrera satisfactoria. Imagine que su búsqueda de empleo da como resultado ofertas de empresas en Rochester (Nueva York), Dallas (Texas), Greensboro, Carolina del Norte y Pittsburgh (Pensilvania). Por tanto, las alternativas para su problema de decisión pueden plantearse como sigue:

1. Aceptar el puesto en Rochester
2. Aceptar el puesto en Dallas
3. Aceptar el puesto en Greensboro
4. Aceptar el puesto en Pittsburgh

El paso siguiente del proceso de solución de problemas consiste en determinar los criterios que se utilizarán para evaluar las cuatro alternativas. Como es lógico, el sueldo inicial es un factor importante. Si el sueldo fuera el único criterio importante, la alternativa seleccionada como "mejor" sería aquella con el sueldo inicial más alto. Los problemas en los cuales el objetivo es encontrar la mejor solución con respecto a un criterio único se conocen como **problemas de decisión con un solo criterio**.

Imagine también que llega a la conclusión de que la posibilidad de crecimiento y la ubicación del trabajo son otros dos criterios importantes. Por tanto, los tres criterios en su problema de decisión son el sueldo inicial, la posibilidad de crecimiento y la ubicación. Los problemas que involucran más de un criterio se conocen como **problemas de decisión con criterios múltiples**.

El paso siguiente en este proceso es evaluar cada una de las alternativas con respecto a cada criterio. Por ejemplo, la evaluación de cada alternativa con respecto al criterio de sueldo inicial se realiza sencillamente al registrar el sueldo inicial para cada alternativa de trabajo. Sin embargo, es más difícil evaluar cada alternativa de trabajo con respecto a la posibilidad de crecimiento y la ubicación del trabajo, debido a que estas evaluaciones se basan principalmente en factores subjetivos que con frecuencia es difícil cuantificar. Suponga que decide medir la posibilidad de crecimiento y la ubicación del trabajo al calificar cada uno de estos criterios como malo, medio, bueno o excelente. Los datos que recolecta se muestran en la tabla 1.1.

Ahora está listo para elegir una de las alternativas disponibles. Lo que hace tan difícil esta fase de elección es que tal vez no todos los criterios tengan la misma importancia y que ninguna alternativa sea "mejor" que el resto de los criterios. Aun cuando se presentará más adelante un método para lidiar con situaciones como ésta, por ahora suponga que después de una evaluación detallada de los datos de la tabla 1.1, usted decide seleccionar la alternativa 3. Por tanto, la alternativa 3 es la **decisión**.

En este punto el proceso de toma de decisiones está completo. En resumen, este proceso implica cinco pasos:

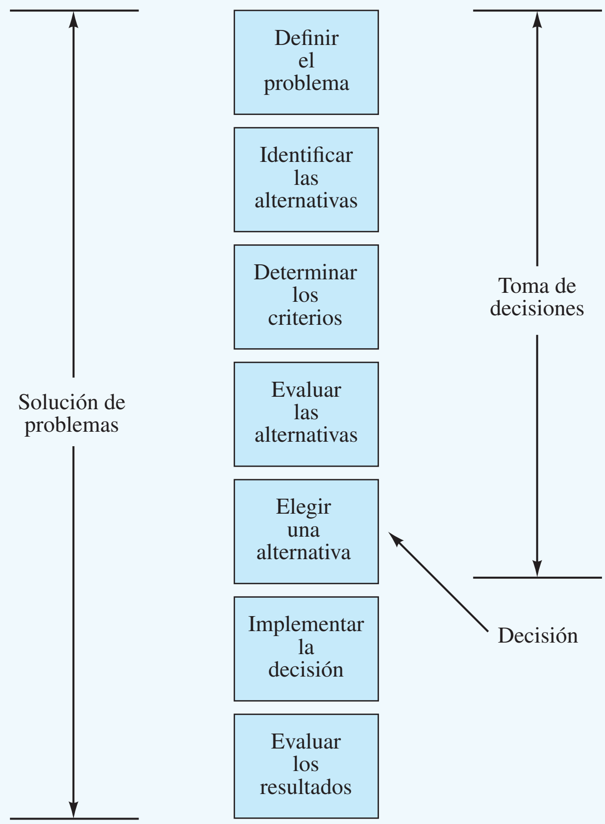
1. Definir el problema
2. Identificar las alternativas
3. Determinar los criterios
4. Evaluar las alternativas
5. Elegir una alternativa

Observe que en esta lista faltan los dos últimos pasos en el proceso de solución de problemas: implementar la alternativa seleccionada y evaluar los resultados para determinar si se ha obtenido una solución satisfactoria. Esta omisión no pretende disminuir la importancia de cada una de estas actividades, sino hacer hincapié en que el término *toma de decisiones* tiene un alcance

TABLA 1.1 DATOS DEL PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL PUESTO

Alternativa	Sueldo inicial	Posibilidad de crecimiento	Ubicación
1. Rochester	$48,500	Promedio	Promedio
2. Dallas	$46,000	Excelente	Buena
3. Greensboro	$46,000	Buena	Excelente
4. Pittsburgh	$47,000	Promedio	Buena

FIGURA 1.1 RELACIÓN ENTRE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TOMA DE DECISIONES



más limitado cuando se compara con el término *solución de problemas*. La figura 1.1 resume la relación entre estos dos conceptos.

1.2 Análisis cuantitativo y toma de decisiones

Considere el diagrama de flujo presentado en la figura 1.2. Observe que combinamos los primeros tres pasos del proceso de toma de decisiones bajo el título de “Estructuración del problema” y los últimos dos pasos bajo el título “Análisis del problema”. Ahora consideremos con mayor detalle cómo realizar las actividades que conforman el proceso de toma de decisiones.

La figura 1.3 muestra que la fase de análisis del proceso de toma de decisiones puede adoptar dos formas básicas: cuantitativa y cualitativa. El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio y la experiencia del gerente; incluye la “intuición” del administrador respecto al problema y es más un arte que una ciencia. Si el administrador ha tenido experiencia con problemas parecidos, o si el problema es relativamente sencillo, puede hacer mucho énfasis en el análisis cualitativo. Sin embargo, si el gerente tiene poca experiencia con problemas parecidos,

FIGURA 1.2 UNA SUBCLASIFICACIÓN DEL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES

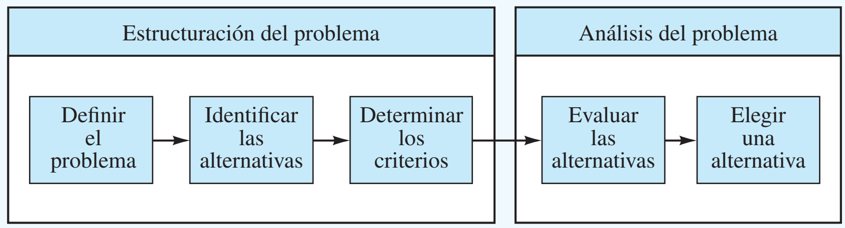
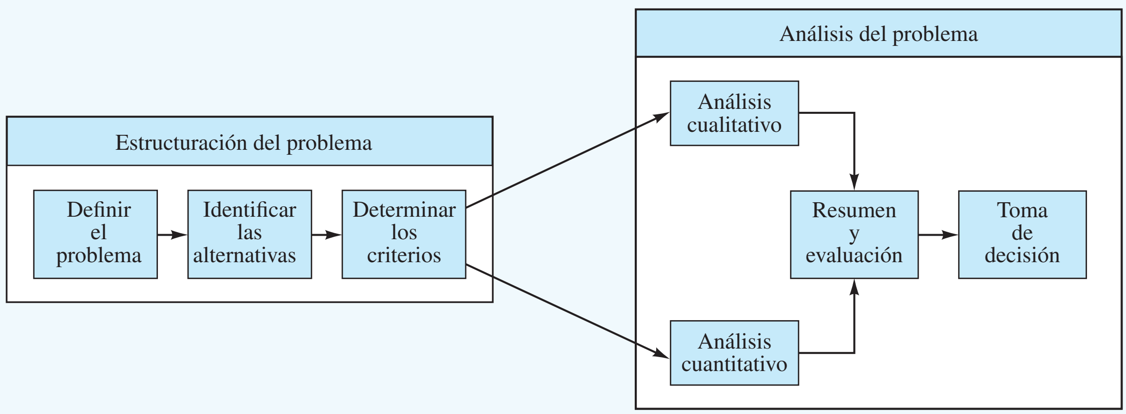


FIGURA 1.3 EL PAPEL DE LOS ANÁLISIS CUALITATIVOS Y CUANTITATIVOS



Los métodos cuantitativos son especialmente útiles para problemas grandes y complejos. Por ejemplo, en la coordinación de las miles de tareas asociadas con el alunizaje seguro del Apollo 11, las técnicas cuantitativas ayudaron a asegurar que las más de 300,000 piezas de trabajo realizadas por más de 400,000 personas se integraran sin problemas.

o si el problema es muy complejo, entonces el análisis cuantitativo del problema puede ser una consideración especialmente importante en la decisión final del gerente.

Cuando se utiliza el enfoque cuantitativo, el analista se concentrará en los hechos cuantitativos o datos asociados con el problema y desarrollará expresiones matemáticas que describan los objetivos, restricciones y otras relaciones que existen en el problema. Por tanto, al utilizar uno o más métodos cuantitativos, el analista hará una recomendación con base en los aspectos cuantitativos del problema.

Aunque las habilidades en el enfoque cualitativo son inherentes al gerente y por lo general, aumentan con la experiencia, las habilidades del enfoque cuantitativo sólo pueden aprenderse al estudiar los supuestos y métodos de las ciencias de la administración. El gerente puede aumentar la efectividad de la toma de decisiones al aprender más sobre la metodología cuantitativa y comprender mejor su contribución al proceso de toma de decisiones. Un gerente informado acerca de los procedimientos cuantitativos de la toma de decisiones está en una posición mucho mejor para comparar y evaluar las fuentes cualitativas y cuantitativas de una recomendación y a la larga podrá combinar ambos aspectos para tomar la mejor decisión.

El cuadro de la figura 1.3 titulado “Análisis cuantitativo” abarca la mayor parte del contenido de este libro. Consideraremos un problema de administración, presentaremos la metodología cuantitativa apropiada y luego desarrollaremos la decisión recomendada.

Enseguida se presentan algunas de las razones para utilizar un enfoque cuantitativo en el proceso de toma de decisiones:

1. El problema es complejo y el gerente no puede encontrar una buena solución sin la ayuda del análisis cuantitativo.
2. El problema es especialmente importante (por ejemplo, hay mucho dinero involucrado) y el gerente quiere hacer un análisis minucioso antes de que intente tomar la decisión.
3. El problema es nuevo y el gerente no tiene experiencia previa en la cual basarse.
4. El problema es repetitivo y el gerente ahorra tiempo y esfuerzo al basarse en procedimientos cuantitativos para hacer recomendaciones cuando se toma una decisión de rutina.

1.3 Análisis cuantitativo

A partir de la figura 1.3 vemos que el análisis cuantitativo comienza una vez que el problema se ha estructurado. Por lo general, se requiere imaginación, trabajo en equipo y un esfuerzo considerable para transformar la descripción general de un problema en un problema bien definido que puede abordarse por medio del análisis cuantitativo. Entre más se involucren los interesados (quien toma la decisión, los usuarios de los resultados, etc.) en el proceso de estructuración del problema, más probabilidad habrá de que el análisis cuantitativo subsiguiente contribuya de forma importante al proceso de toma de decisiones. Cuando todos los que están familiarizados con el problema están de acuerdo en que el problema se ha estructurado de manera adecuada, se puede comenzar a desarrollar un modelo que represente el problema de forma matemática, y es aquí donde se emplean los procedimientos de solución para encontrar la mejor solución para el modelo. Esta mejor solución después se vuelve una recomendación para quien toma las decisiones. El proceso de desarrollar y resolver modelos es la esencia del proceso del análisis cuantitativo.

Desarrollo de modelos

Los **modelos** son representaciones de objetos o situaciones reales y pueden presentarse en varias formas. Por ejemplo, un modelo a escala de un avión es una representación de un avión real. De modo parecido, un camioncito de juguete es un modelo de un camión real. El modelo de avión y el camioncito de juguete son ejemplos de modelos que son réplicas físicas de objetos reales. En la terminología del modelado, las réplicas físicas se conocen como **modelos icónicos**.

Una segunda clasificación incluye modelos que tienen la misma forma física pero no la misma apariencia que el objeto modelado. Estos modelos se conocen como **modelos análogos**. El velocímetro de un automóvil es un modelo análogo; la posición de la aguja en el cuadrante representa la velocidad del automóvil. Un termómetro es otro modelo análogo que representa la temperatura.

Una tercera clasificación de modelos, el tipo que estudiaremos principalmente, incluye representaciones de un problema mediante un sistema de símbolos y relaciones o expresiones matemáticas. Estos modelos se conocen como **modelos matemáticos** y son parte fundamental de cualquier método cuantitativo para la toma de decisiones. Por ejemplo, la utilidad o ganancia total de la venta de un producto puede determinarse al multiplicar la utilidad por unidad por la cantidad vendida. Suponga que x es el número de unidades producidas y vendidas, y P la utilidad total. Con una utilidad de $10 por unidad, el modelo matemático siguiente define las ganancias totales obtenidas al producir y vender x unidades:

$$P = 10x \tag{1.1}$$

El propósito, o valor, de cualquier modelo es que nos permite hacer inferencias acerca de la situación real al estudiar y analizar el modelo. Por ejemplo, un diseñador de aviones podría probar un modelo icónico de un nuevo avión en un túnel de viento para saber cuáles son las características potenciales de vuelo del avión de tamaño natural. Del mismo modo, un modelo matemático se puede utilizar para hacer inferencias sobre cuánta utilidad se ganará si se vende una cantidad específica de un producto en particular. De acuerdo con el modelo matemático de la ecuación 1.1, esperaríamos que la venta de tres unidades del producto ($x = 3$) diera como resultado una utilidad $P = 10(3) = \$30$.

En general, la experimentación con modelos requiere menos tiempo y es más barata que experimentar con el objeto o la situación real. Un modelo de avión desde luego es más rápido y menos caro de construir y estudiar que el avión de tamaño natural. Asimismo, el modelo matemático de la ecuación 1.1 permite una identificación rápida de las expectativas esperadas sin requerir realmente que el gerente produzca y venda x unidades. Los modelos también reducen los riesgos asociados con la experimentación en la situación real. De hecho, los malos diseños o las malas decisiones que provocan que un modelo de avión choque o un modelo matemático prevea una pérdida de $10,000 pueden evitarse en la situación real.

Herbert A. Simon, ganador del Premio Nobel de Economía y experto en la toma de decisiones, afirmó que un modelo matemático no tiene que ser exacto; sólo tiene que ser lo bastante aproximado para proporcionar mejores resultados de los que pueden obtenerse mediante el sentido común.

El valor de las conclusiones y decisiones basadas en el modelo dependen de lo bien que el modelo represente la situación real. Cuanto más fiel sea la representación del modelo de avión respecto al avión real, más precisas serán las conclusiones y predicciones. De igual modo, cuanto más fielmente represente el modelo matemático la relación utilidad-volumen verdadera de la empresa, más precisas serán las proyecciones de las utilidades.

Dado que este libro trata sobre el análisis cuantitativo basado en modelos matemáticos, estudiemos más de cerca el proceso de modelado matemático. Cuando empezamos a considerar un problema administrativo, por lo general, encontramos que la fase de definición del problema conduce a un objetivo específico, como la maximización de las utilidades o la minimización de los costos y posiblemente, a un conjunto de limitaciones o **restricciones**, tales como las capacidades de producción. El éxito del modelo matemático y del enfoque cuantitativo dependerá en gran medida de la precisión con que puedan expresarse el objetivo y las restricciones de las relaciones o ecuaciones matemáticas.

La expresión matemática que define la cantidad a maximizar o minimizar se conoce como **función objetivo**. Por ejemplo, suponga que x denota el número de unidades producidas y vendidas cada semana, y el objetivo de la empresa es maximizar la utilidad semanal total. Con una ganancia de $10 por unidad, la función objetivo es $10x$. Sería necesario hacer una restricción de la capacidad de producción si, por ejemplo, se requieren cinco horas para producir cada unidad y sólo se dispone de 40 horas por semana. La restricción de la capacidad de producción está determinada por la fórmula

$$5x \leq 40 \tag{1.2}$$

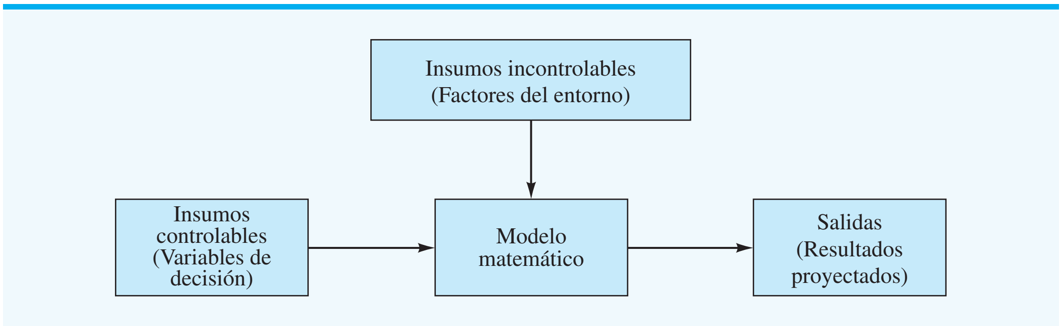
El valor $5x$ es el tiempo total requerido para producir x unidades; el símbolo $\leq$ indica que el tiempo de producción requerido debe ser menor o igual que las 40 horas disponibles.

El problema o la interrogante de decisión es el siguiente: ¿cuántas unidades del producto deben producirse cada semana para maximizar las utilidades? Un modelo matemático completo para este sencillo problema de producción es

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 10x \quad \text{función objetivo} \\ \text{sujeto a (s.a.)} & \\ & \left.\begin{array}{r} 5x \leq 40 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \text{restricción} \end{array}$$

La restricción $x \geq 0$ requiere que la cantidad de producción x sea mayor o igual que cero, lo que tan sólo reconoce el hecho de que no es posible fabricar un número negativo de unidades.

FIGURA 1.4 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE LOS INSUMOS DEL MODELO EN SALIDAS

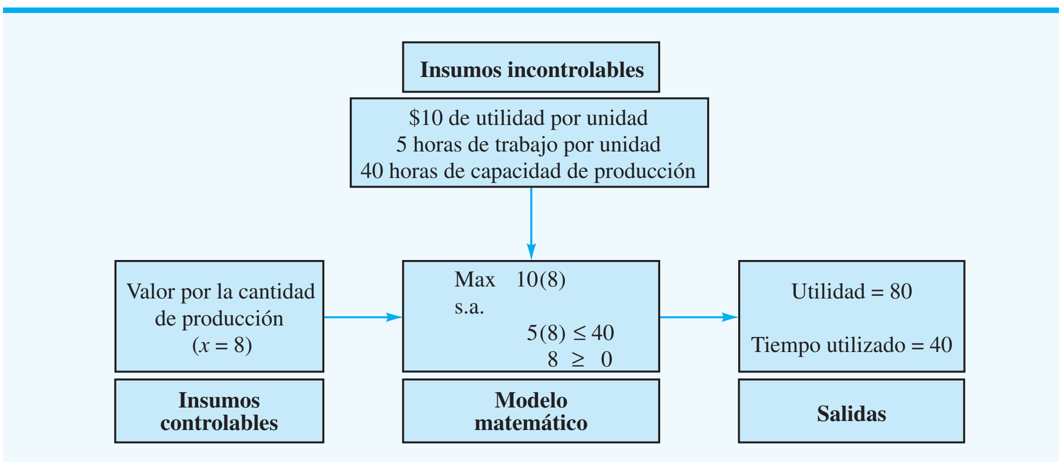


La solución óptima a este modelo se calcula fácilmente y es $x = 8$, con una utilidad asociada de \$80. Este modelo es un ejemplo de modelo de programación lineal. En capítulos posteriores se estudiarán modelos matemáticos más complicados y aprenderemos a resolverlos en situaciones donde las respuestas no son tan obvias.

En el modelo matemático anterior, la utilidad por unidad (\$10), el tiempo de producción por unidad (5 horas) y la capacidad de producción (40 horas) son factores que no están bajo el control del gerente o de quien toma las decisiones. Estos factores pueden afectar tanto a la función objetivo como a las restricciones y se conocen como **insumos incontrolables** del modelo. Los insumos que están controlados o determinados por quien toma las decisiones se conocen como **insumos controlables** del modelo. En el ejemplo expuesto, la cantidad de producción x es el insumo controlable del modelo. Los insumos controlables son alternativas de decisión especificadas por el gerente y por tanto, también se llaman **variables de decisión** del modelo.

Una vez que se especifican todos los insumos controlables e incontrolables, se puede evaluar la función objetivo y las restricciones, y con ello, determinar la salida del modelo. En este sentido, la salida del modelo es sencillamente la proyección de lo que ocurriría si dichos factores del entorno y decisiones en particular ocurrieran en la situación real. En la figura 1.4 aparece un diagrama de flujo de cómo los insumos controlables e incontrolables se transforman en salidas mediante el modelo matemático. Un diagrama de flujo similar que muestra los detalles específicos para el modelo de producción se presenta en la figura 1.5. Observe que hemos utilizado “Max” como abreviación de maximizar.

FIGURA 1.5 DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL MODELO DE PRODUCCIÓN



Como se expuso antes, los insumos incontrolables son aquellos en que quien toma las decisiones no puede influir. Los insumos controlables e incontrolables específicos de un modelo dependen del problema o de la situación de toma de decisiones particular. En el problema de producción, el tiempo de producción disponible (40) es un insumo incontrolable. Sin embargo, si fuera posible contratar a más empleados o trabajar tiempo extra, el número de horas de producción sería un insumo controlable y, por consiguiente, una variable de decisión en el modelo.

Los insumos incontrolables pueden conocerse con exactitud o ser inciertos y estar sujetos a variación. Si se conocen todos los insumos incontrolables de un modelo y éstos no pueden variar, se trata de un **modelo determinista**. El gerente no puede influir en las tasas de impuestos al ingreso empresarial y por tanto, constituyen un insumo incontrolable en muchos modelos de decisión. Debido a que estas tasas son conocidas y fijas (al menos a corto plazo), un modelo matemático con tasas de impuestos al ingreso empresarial como el único insumo incontrolable sería un modelo determinista. La característica distintiva de un modelo determinista es que los valores de los insumos incontrolables se conocen con anticipación.

Si alguno de los insumos incontrolables es incierto y está sujeto a variación, el modelo es un **modelo estocástico** o **probabilístico**. Un insumo incontrolable en muchos modelos de planeación de la producción es la demanda del producto. Dado que la demanda futura puede tomar cualquier valor dentro de un rango de valores, un modelo matemático que trata la demanda con incertidumbre sería un modelo estocástico. En el modelo de producción, el número de horas de tiempo de producción requerido por unidad, el total de horas disponibles y la utilidad por unidad eran insumos incontrolables. Como se sabía que todos los insumos incontrolables tomaban valores fijos, el modelo era determinista. No obstante, si el número de horas de tiempo de producción por unidad pudiera variar de 3 a 6 horas, dependiendo de la calidad de la materia prima, el modelo sería estocástico. La característica distintiva de un modelo estocástico es que el valor de la salida no se puede determinar, aunque se conozca el valor del insumo controlable, debido a que se desconocen los valores específicos de los insumos incontrolables. De ahí que los modelos estocásticos suelan ser más difíciles de analizar.

Preparación de los datos

Otro paso en el análisis cuantitativo de un problema es la preparación de los datos requeridos por el modelo. Los datos en este contexto se refieren a los valores de los insumos incontrolables del modelo. Todos los insumos o datos incontrolables deben especificarse antes de que podamos analizar el modelo y recomendar una decisión o solución para el problema.

En el modelo de producción los valores de los insumos o datos incontrolables fueron \$10 por unidad por utilidad, 5 horas por unidad por tiempo de producción y 40 horas para la capacidad de producción. En la elaboración del modelo, se conocían estos valores de los datos y se incorporaron al modelo conforme se fue desarrollando. Si el modelo es relativamente pequeño y los valores de los insumos incontrolables o los datos requeridos son pocos, es probable que el analista cuantitativo combine el desarrollo del modelo y la preparación de los datos en un solo paso. En estas situaciones los valores de los datos se insertan a medida que las ecuaciones del modelo matemático se desarrollan.

Sin embargo, en muchas situaciones de modelado matemático, no se cuenta con los valores de los datos o los insumos incontrolables. Cuando esto ocurre, el analista puede saber que el modelo necesita datos sobre la utilidad por unidad, el tiempo y la capacidad de producción, pero para obtener los valores tendrá que consultar a los departamentos de contabilidad, producción e ingeniería. En vez de intentar recabar los datos requeridos conforme se desarrolla el modelo, el analista por lo general adopta una notación general para el paso de desarrollo del modelo y luego establece un paso separado para la preparación de los datos con el fin de obtener los valores de los insumos incontrolables que requiere el modelo.

Uso de la notación general

$$c = \text{utilidad por unidad}$$
$$a = \text{tiempo de producción en horas por unidad}$$
$$b = \text{capacidad de producción en horas}$$

el paso de desarrollo del modelo para el problema de producción daría como resultado el modelo general siguiente (recuerde que x = número de unidades para producir y vender):

$$\begin{aligned} &\text{Max } cx \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad ax \leq b \\ &\qquad\ \ x \geq 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para completar el modelo es necesario un paso de preparación de los datos independiente que permita identificar los valores de c, a y b.

Muchos analistas cuantitativos inexpertos dan por sentado que una vez que se define el problema y se desarrolla un modelo general, el problema básicamente está resuelto. Estas personas tienden a creer que la preparación de los datos es un paso trivial en el proceso y que puede manejarlo fácilmente el personal gerencial. En realidad, este supuesto no podría estar más alejado de la verdad, en particular cuando se trata de modelos a gran escala que tienen varios valores de entrada de datos. Por ejemplo, un modelo de programación lineal de tamaño moderado con 50 variables de decisión y 25 restricciones podría tener más de 1,300 elementos de datos que deban identificarse en el paso de preparación de los datos. El tiempo requerido para preparar estos datos y la posibilidad de errores en la recolección de los mismos hará del paso de preparación de los datos una parte crucial del proceso del análisis cuantitativo. A menudo se necesita una base de datos muy grande para apoyar al modelo matemático, por lo que en el paso de preparación de los datos también participan los especialistas en sistemas de información.

Solución de modelos

Una vez que los pasos de desarrollo del modelo y preparación de los datos se han completado, proseguimos con el paso de solución del modelo. En este paso, el analista intenta identificar los valores de las variables de decisión que proporcionan la "mejor" salida para el modelo. El valor o valores específicos de las variables de decisión que proporciona la "mejor" salida se conoce como la **solución óptima** del modelo. Para el problema de producción, el paso de la solución del modelo consiste en determinar el valor de la variable de decisión de la cantidad de producción x que maximiza la utilidad sin violar la restricción de la capacidad de producción.

Un procedimiento que podría utilizarse en el paso de solución del modelo consiste en un método de prueba y error en que el modelo se utiliza para probar y evaluar varias alternativas de decisión. En el modelo de producción este procedimiento significaría la prueba y evaluación del modelo usando varias cantidades de producción o valores de x. Como se observa en la figura 1.5, podríamos introducir valores de prueba para x y comprobar la salida correspondiente para la utilidad prevista y si se cumple la restricción de la capacidad de producción. Si una alternativa de decisión no cumple con una o más restricciones del modelo, la alternativa de decisión se rechaza por ser solución **no factible**, sin importar cuál sea el valor de la función objetivo. Si se cumple con todas las restricciones, la alternativa de decisión es solución **factible** y candidata para la "mejor" decisión recomendada. Gracias a este proceso de prueba y error para evaluar las alternativas de decisión seleccionadas, un tomador de decisiones puede identificar una solución factible adecuada, quizá la mejor, para el problema. Esta solución luego sería la decisión recomendada para el problema.

TABLA 1.2 SOLUCIÓN DE PRUEBA Y ERROR PARA EL MODELO DE PRODUCCIÓN DE LA FIGURA 1.5

Alternativa de decisión (Cantidad de producción) x	Utilidad prevista	Total de horas de producción	¿Solución factible? (Horas empleadas $\leq$ 40)
0	0	0	Sí
2	20	10	Sí
4	40	20	Sí
6	60	30	Sí
8	80	40	Sí
10	100	50	No
12	120	60	No

La tabla 1.2 muestra los resultados de un método de prueba y error para resolver el modelo de producción de la figura 1.5. La decisión recomendada es una cantidad de producción de 8 unidades debido a que la solución factible con la mayor utilidad prevista ocurre cuando $x = 8$.

Aun cuando el proceso de solución de prueba y error con frecuencia es aceptable y puede proporcionar información valiosa para el administrador, tiene la desventaja de que no necesariamente proporciona la mejor solución y es ineficiente pues requiere numerosos cálculos si se prueban muchas alternativas de decisión. Por esta razón, los analistas cuantitativos han desarrollado procedimientos de solución especiales para muchos modelos que son mucho más eficientes que este método. A lo largo del libro se presentan procedimientos de solución aplicables a modelos matemáticos específicos que se estudian. Algunos modelos o problemas relativamente pequeños se pueden resolver por medio de cálculos manuales; pero la mayoría de las aplicaciones prácticas requiere del uso de una computadora.

Los pasos de desarrollo del modelo y la solución del modelo no son completamente independientes. Un analista utilizará ambos para elaborar un modelo o representación precisa del problema real y encontrar así una solución para el modelo. Si en el paso del desarrollo del modelo intentamos encontrar el modelo matemático más preciso y realista, podríamos obtener un modelo tan grande y complejo que sería imposible obtener una solución. En este caso es preferible un modelo más sencillo, que se entienda con facilidad y que tenga una solución más fácil de obtener, incluso si la solución recomendada es sólo una aproximación y no la mejor decisión. A medida que usted aprenda más sobre los procedimientos cuantitativos de solución, comprenderá mejor los tipos de modelos matemáticos que se pueden desarrollar y resolver.

Resuelva el problema 8 para comprobar que comprendió el concepto de modelo matemático y lo que se conoce como solución óptima del modelo.

Después de obtener una solución del modelo, tanto al analista cuantitativo como al gerente les interesará determinar cuán adecuada es la solución en realidad. Aun cuando el analista sin duda ha tomado muchas precauciones para desarrollar un modelo realista, a menudo no se puede evaluar la bondad o precisión del modelo hasta que se generan las soluciones del mismo. La prueba y validación del modelo con frecuencia se realizan con problemas de "prueba" relativamente pequeños con soluciones conocidas o al menos esperadas. Si el modelo genera las soluciones esperadas, y si la información de salida parece correcta, se puede autorizar el uso del modelo en el problema real. Pero si la prueba y validación del modelo identifican problemas potenciales o imprecisiones inherentes al modelo, se pueden aplicar acciones correctivas, como la modificación del modelo o la recolección de datos de entrada más precisos. Sea cual fuere la acción correctiva, la solución del modelo no se utilizará en la práctica hasta que el modelo pase satisfactoriamente la prueba y la validación.

CAPÍTULO 3

Distribuciones de probabilidad

CONTENIDO

En este capítulo continuamos el estudio de la probabilidad al introducir los conceptos de variables aleatorias y distribuciones de probabilidad. Consideramos las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias tanto discretas como continuas. De particular interés son cinco distribuciones de probabilidad especiales: binomial, Poisson, uniforme, y las distribuciones de probabilidad exponencial, estas últimas se consideran importantes porque se utilizan mucho en la práctica. El artículo de M. C. en Acción "ESPN y la probabilidad", describe cómo la elaboración y el uso de una distribución de probabilidad ayudaron a esta organización a mejorar el disfrute y entendimiento de su público hacia los deportes.

M.C. en ACCIÓN

*ESPN Y LA PROBABILIDAD**

La Enterntainment and Sports Programming Network, conocida como ESPN desde 1985, se estableció originalmente como una cadena nacional de televisión por cable dedicada a transmitir y producir programas relacionados con los deportes. Esta cadena, con base en Briston Connecticut, que transmite las 24 horas del día a lo largo del año, ha crecido con rapidez desde su debut el 7 de septiembre de 1979. En diversos momentos, su programación ha incluido béisbol de las Grandes Ligas, la Liga Nacional de Futbol Americano (NFL), la Asociación Nacional de Basquetbol (NBA), la Liga Nacional de Hockey (NHL), NASCAR, futbol americano y basquetbol universitarios, Major League Soccer (MLS), las asociaciones profesionales de hombres y mujeres golfistas (PGA y LPGA) y tenis profesional masculino y femenino (ATP y WTA). ESPN ahora llega a más de 100 millones de casas en Estados Unidos e ESPN International se extiende por más de 200 países y territorios en todos los continentes e incluye 46 cadenas de televisión con más de 350 millones de suscriptores en 16 idiomas, además de productos inalámbricos, interactivos, impresos, radiofónicos, de banda ancha, administración de eventos y de consumo.

El rápido crecimiento de ESPN coincide con un aumento dramático en el deseo de los fans de deportes por análisis más sofisticados. Esta organización respondió a esta tendencia al establecer su departamento de Análisis de Producción, un grupo de analistas que proporcionan análisis estadísticos a todas las plataformas de medios de ESPN para una amplia variedad de problemas deportivos. El director del departamento de Análisis de Producción Jeff Bennet explica que "ESPN aprecia la pasión que los fans de los deportes tienen por análisis significativos; estamos comprometidos con crear y proporcionar este contenido. La probabilidad básica y la estadística son herramientas esenciales en nuestro arsenal analítico".

Alok Pattani, especialista en análisis del departamento de Análisis de Producción, describe la manera en que el departamento usa algunos conceptos específicos de probabilidad. "Por ejemplo, utilizamos una probabilidad muy básica para determinar la posibilidad de que un equipo de la NBA gane una de las tres primeras elecciones del *draft* de la NBA. La liga lleva a cabo una lotería para determinar cuál de los 14 equipos que no calificaron a los *playoffs* en la temporada más reciente recibirá cada una de las tres primeras elecciones, mismas que se consideran extremadamente valiosa. La lotería se pondera para que los equipos con los peores récords tengan mejores oportunidades de obtener una de las primeras elecciones, nosotros usamos la información de cuántas oportunidades recibe cada equipo para calcular la probabilidad de que cualquiera de éstos gane alguna de estas elecciones principales.

"La probabilidad condicional también es muy importante, cuando consideramos la probabilidad que un equipo tiene que ganar un juego en casa o de que un jugador reciba un golpe cuando juega en la noche, utilizamos la probabilidad condicional". Alok continúa, "Utilizamos las distribuciones de probabilidad ampliamente en nuestro trabajo, en especial las distribuciones binomial y normal. Utilizamos la distribución binomial en todo tipo de situaciones de éxito o fracaso como las victorias y las derrotas, goles de campo y tiros perdidos en basquetbol, pases completos e incompletos y bateos y outs en béisbol. La distribución binomial también es útil cuando se estima la probabilidad de una racha de turnos al bat o una racha ganadora en cualquier deporte".

A esto añade Bennet, "Los resultados de este tipo de análisis son de gran interés para la base de ESPN. Mejoran el disfrute y el entendimiento que los fans tienen de sus deportes favoritos, y eso es un buen negocio para ESPN".

* Los autores están en deuda con Jeff Bennet y Alok Pattani de ESPN Inc. por sus contribuciones a este M. C. en Acción.

3.1 Variables aleatorias

Recuerde que en el capítulo 2 definimos un experimento como cualquier proceso que genere resultados bien definidos. Ahora queremos concentrarnos en el proceso de asignar *valores numéricos* a los resultados experimentales. Para hacerlo presentamos la noción de variable aleatoria.

Para cualquier experimento en particular puede definirse una variable aleatoria de modo que cada resultado experimental posible genere exactamente un valor numérico para la variable aleatoria. Por ejemplo, si consideramos el experimento de vender automóviles un día en una concesionaria, podríamos describir los resultados experimentales en función del *número* de automóviles vendidos. En este caso, si x = cantidad de automóviles vendidos, x se conoce como variable aleatoria. El valor numérico particular que asume este tipo de variable depende del resultado del experimento; es decir, el valor específico de la variable aleatoria no se conoce hasta que se observa el resultado experimental. Por ejemplo, si cierto día se venden tres automóviles, el valor de la variable aleatoria es 3; si otro día (una repetición del experimento) se venden cuatro automóviles, el valor es 4. Definimos una variable aleatoria como sigue:

Las variables aleatorias deben asumir valores numéricos.

Una **variable aleatoria** es la descripción numérica del resultado de un experimento.

La tabla 3.1 proporciona algunos ejemplos adicionales y sus variables aleatorias asociadas. Aunque muchos experimentos tienen resultados experimentales que se prestan de manera muy natural a representarse como valores numéricos, otros no lo hacen. Por ejemplo, para el experimento de lanzar una moneda al aire, el resultado experimental será cara o cruz, de los cuales ninguno tiene un valor numérico natural; sin embargo, podríamos querer expresar los resultados en función de una variable aleatoria. Por tanto, necesitamos una regla que pueda utilizarse para asignar un valor numérico a cada uno de los resultados experimentales. Una posibilidad es establecer la variable aleatoria $x = 1$ si el resultado experimental es cara, y $x = 0$ si el resultado experimental es cruz. Aunque los valores numéricos para x son arbitrarios, x es una variable aleatoria porque describe los resultados experimentales en forma numérica.

Una variable aleatoria puede clasificarse ya sea como discreta o continua, dependiendo de los valores numéricos que asuma. Si sólo puede asumir una secuencia finita o infinita de valores (por ejemplo, 1, 2, 3, …) se trata de una **variable aleatoria discreta**. La cantidad de unidades vendidas, el número de defectos observados, el número de clientes que entra en un banco en un día de operación, etc., son ejemplos de variables aleatorias discretas. Las primeras dos y la última variable aleatoria de la tabla 3.1 son discretas. Otros ejemplos, como el peso, el tiempo y la temperatura que pueden asumir cualquier valor en un intervalo determinado o en una colección de intervalos son **variables aleatorias continuas**. Por ejemplo, la tercera variable aleatoria de la tabla 3.1 es una variable aleatoria continua, ya que puede asumir cualquier valor del intervalo de 0 a 100 (por ejemplo, 56.33 o 64.223).

Resuelve el problema 1 para practicar la identificación de las variables aleatorias continuas y discretas.

TABLA 3.1 EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS

Experimento	Variable aleatoria (x)	Posibles valores para la variable aleatoria
Hacer 100 llamadas de ventas	Número total de ventas	0, 1, 2, . . . , 100
Inspeccionar un embarque de 70 radiorreceptores	Número de radiorreceptores defectuosos	0, 1, 2, . . . , 70
Construir una nueva biblioteca	Porcentaje del proyecto completado después de seis meses	$0 \leq x \leq 100$
Dirigir un restaurante	Número de clientes que entran en un día	0, 1, 2, . . .

NOTAS Y COMENTARIOS

1. Una manera de determinar si una variable aleatoria es discreta o continua es pensar en los valores como si fueran puntos de una recta. Elija dos puntos que representen los valores que la variable aleatoria puede asumir. Si el segmento de recta entero entre los dos puntos también representa los valores posibles de la variable aleatoria, ésta es continua. Una manera alternativa (aunque equivalente) de determinar si una variable aleatoria es discreta o continua consiste en elegir dos puntos que representen valores que la variable aleatoria podría asumir. Sin importar qué puntos hayas elegido inicialmente, si siempre puedes encontrar un tercer punto entre los dos puntos iniciales que también represente un valor de la variable aleatoria, la variable aleatoria es continua. Por ejemplo, si su variable aleatoria es el peso exacto de una bolsa de papas fritas y elige 16.0005 onzas y 16.0006 onzas como puntos iniciales, el punto 16.00051 (o 16.00052 o 16.00053, etc.) onzas representa un valor posible del peso exacto de la bolsa de papas fritas y se encuentra entre sus puntos iniciales. Por otra parte, si su variable aleatoria es el número de clientes que entra a un restaurante en un día dado y elige 109 clientes y 110 clientes como sus dos puntos iniciales, no existe punto alguno que represente un valor de la variable aleatoria y se encuentre entre estos dos puntos (es decir, no se pueden tener 109.7 clientes que entren a un restaurante en un día específico). Esto indica que la variable aleatoria es discreta.

3.2 Variables aleatorias discretas

Podemos demostrar el uso de una variable aleatoria discreta al considerar las ventas de automóviles en DiCarlo Motors, Inc., con sede en Saratoga, Nueva York. El propietario de esta compañía está interesado en el volumen de ventas diario de los automóviles. Suponga que x es una variable aleatoria que denota la cantidad de automóviles vendidos en un día determinado. Los registros de ventas muestran que 5 es el número máximo de automóviles que DiCarlo vendió en un día. El propietario considera que el historial de ventas anterior representa de manera adecuada lo que ocurrirá en el futuro, así que esperaríamos que la variable aleatoria x asumiera uno de los valores numéricos 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Los valores posibles de la variable aleatoria son finitos; por tanto, clasificaremos a x como una variable aleatoria discreta.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Suponga que al revisar los registros de ventas de DiCarlo descubrimos que el año pasado la empresa estuvo abierta durante 300 días. El volumen de ventas generado y la frecuencia de su ocurrencia se resumen en la tabla 3.2. Con estos datos históricos disponibles, el propietario de

TABLA 3.2 AUTOMÓVILES VENDIDOS POR DÍA EN DICARLO MOTORS

Volumen de ventas	Número de días
Sin ventas	54
Un automóvil	117
Dos automóviles	72
Tres automóviles	42
Cuatro automóviles	12
Cinco automóviles	3
Total	300

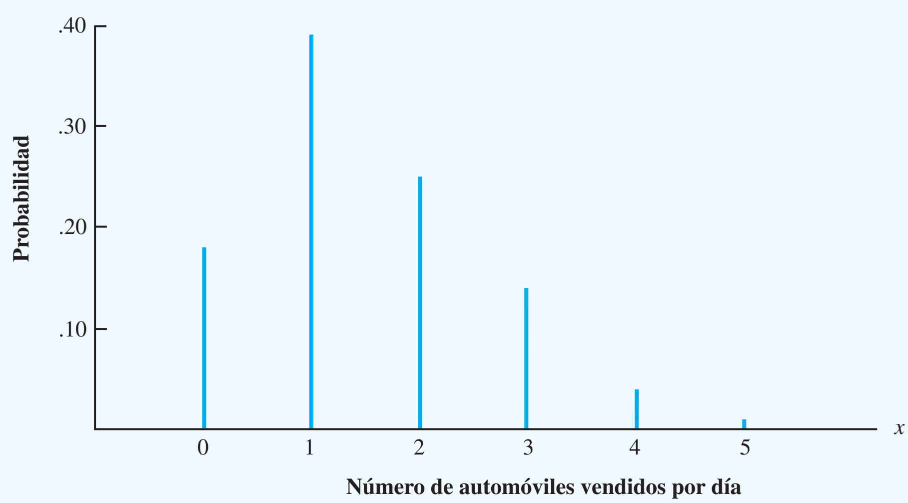
TABLA 3.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL NÚMERO DE AUTOMÓVILES VENDIDOS POR DÍA

x	$f(x)$
0	0.18
1	0.39
2	0.24
3	0.14
4	0.04
5	0.01
Total	1.00

esta empresa piensa que el método de frecuencia relativa proporcionará un medio razonable para evaluar las probabilidades de la variable aleatoria x. La *función de probabilidad*, denotada por $f(x)$, determina la probabilidad de que la variable aleatoria x tome un valor específico. Dado que en 54 de los 300 días del historial de datos DiCarlo Motors no vendió ningún automóvil y como ninguna venta corresponde a $x = 0$, asignamos a $f(0)$ el valor $^{54}/_{300} = 0.18$. De igual modo, $f(1)$ indica la probabilidad de que x tome el valor 1, así que asignamos a $f(1)$ el valor de $^{117}/_{300} = 0.39$. Después de calcular las frecuencias relativas para los otros valores posibles de x, podemos elaborar una tabla de valores de x y $f(x)$. La tabla 3.3 muestra una presentación tabular de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria x.

También se puede representar gráficamente la distribución de x. En la figura 3.1 los valores de la variable aleatoria x se muestran en el eje horizontal. La probabilidad de que x tome estos valores se muestra en el eje vertical. Para muchas variables aleatorias discretas la distribución de probabilidad también puede representarse mediante una fórmula que proporciona $f(x)$ para todo valor posible de x. Este método se ejemplifica en la siguiente sección.

FIGURA 3.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL NÚMERO DE AUTOMÓVILES VENDIDOS POR DÍA



En la sección 2.2 definimos los dos requisitos básicos de todas las asignaciones de probabilidad como $0 \leq P(E_i) \leq 1$ y $\Sigma P(E_i) = 1$. Las ecuaciones 3.1 y 3.2 son los análogos de estos requisitos básicos.

En la elaboración de una **distribución de probabilidad discreta**, siempre deben cumplirse dos requisitos:

$$f(x) \geq 0 \tag{3.1}$$

$$\Sigma f(x) = 1 \tag{3.2}$$

La ecuación 3.1 especifica que las probabilidades asociadas con cada valor de x deben ser mayores o iguales a cero, mientras que la ecuación 3.2 indica que la suma de las probabilidades de todos los valores de la variable aleatoria x deben ser iguales a 1. La tabla 3.3 muestra que se cumplen las ecuaciones (3.1) y (3.2); por lo tanto, la distribución de probabilidad elaborada para DiCarlo Motors es una distribución de probabilidad discreta válida.

Después de establecer una variable aleatoria y su distribución de probabilidad, podemos determinar una variedad de información de probabilidad adicional, dependiendo de las necesidades e intereses de quien toma las decisiones. Por ejemplo, en el problema de DiCarlo Motors la distribución de probabilidad mostrada en la tabla 3.3 se puede utilizar para proporcionar la información siguiente:

1. Existe una probabilidad de 0.18 de que no se venda ningún automóvil durante un día.
2. El volumen de ventas más probable es 1, con $f(1) = 0.39$.
3. Hay una probabilidad de 0.05 de que haya un día de ventas excepcional en que se vendan cuatro o cinco automóviles.

Resuelva el problema 3 para practicar la construcción de una distribución de probabilidad discreta.

Utilizando información de probabilidad como la que acabamos de proporcionar, la administración de DiCarlo Motors puede entender mejor las incertidumbres asociadas con la operación de ventas. Quizás esta comprensión más profunda pueda servir como base para una nueva política o decisión que aumente la efectividad de la empresa.

Valor esperado

Después de construir la distribución de probabilidad para una variable aleatoria, con frecuencia queremos calcular la media o valor esperado de esa variable. El **valor esperado** de una variable aleatoria discreta es un promedio ponderado de todos los valores posibles de la misma, en que los pesos son las probabilidades asociadas con los valores. La fórmula matemática para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta x es

$$E(x) = \mu = \Sigma x\, f(x) \tag{3.3}$$

Como muestra la ecuación 3.3, las dos notaciones $E(x)$ y μ se utilizan para referirse al valor esperado de una variable aleatoria.

Para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta, debemos multiplicar el valor de la variable aleatoria por su probabilidad correspondiente y luego sumar los términos resultantes. El cálculo del valor esperado de la variable aleatoria (cantidad de ventas diaria) para DiCarlo Motors se muestra en la tabla 3.4. La primera columna contiene los valores de la variable aleatoria x y la segunda columna señala sus probabilidades asociadas $f(x)$. La multiplicación de cada valor de x por su probabilidad $f(x)$ proporciona los $xf(x)$ valores en la tercera columna. Siguiendo la ecuación 3.3, sumamos esta columna, $\Sigma xf(x)$, para obtener el valor esperado de 1.50 automóviles vendidos por día.

El valor esperado de una variable aleatoria es el valor medio o promedio. Para experimentos que pueden repetirse varias veces, el valor esperado se interpreta como el valor medio "a largo plazo" para la variable aleatoria. Sin embargo, el valor esperado no necesariamente es el nú-

TABLA 3.4 CÁLCULO DEL VALOR ESPERADO

x	$f(x)$	$xf(x)$
0	0.18	0 (0.18) = 0.00
1	0.39	1 (0.39) = 0.39
2	0.24	2 (0.24) = 0.48
3	0.14	3 (0.14) = 0.42
4	0.04	4 (0.04) = 0.16
5	0.01	5 (0.01) = 0.05
		$E(x)$ = 1.50

mero que pensamos asumirá la variable aleatoria la siguiente vez que se realice el experimento. De hecho, es imposible que DiCarlo Motors venda exactamente 1.50 automóviles en un día cualquiera. No obstante, si imaginamos que en esta compañía se venden automóviles durante muchos días en el futuro, el valor esperado de 1.50 automóviles proporciona el volumen medio, o promedio, de ventas diario.

El valor esperado puede ser importante para un administrador o gerente desde el punto de vista de la planeación y de la toma de decisiones. Por ejemplo, suponga que DiCarlo Motors estará abierta 60 días durante los tres meses siguientes, ¿cuántos automóviles se venderán durante este tiempo? Aunque podemos especificar las ventas exactas para cualquier día, el valor esperado de 1.50 automóviles por día proporciona una estimación de ventas esperada o promedio de 60(1.50) = 90 automóviles para el periodo siguiente de tres meses. En cuanto a establecer cuotas de ventas o planear pedidos, el valor esperado puede ser una información útil para la toma de decisiones.

Varianza

El valor esperado proporciona una idea del valor medio o central para la variable aleatoria; pero con frecuencia queremos una medida de la dispersión, o variabilidad, de los valores posibles de esta variable. Por ejemplo, si los valores de la variable aleatoria varían de muy grandes a muy pequeños, esperaríamos un valor grande para la medida de la variabilidad. Si los valores muestran sólo una variación modesta, esperaríamos un valor relativamente pequeño. La varianza es una medida que se utiliza comúnmente para resumir la variabilidad de los valores que asume una variable aleatoria. La expresión matemática para la *varianza* de una variable aleatoria discreta es

Una fórmula opcional para la varianza de una variable aleatoria discreta es $Var(x) = \Sigma x^2 f(x) - \mu^2$.

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) \tag{3.4}$$

Como muestra la ecuación 3.4, una parte esencial de la fórmula de la varianza es la desviación, $x - \mu$, que mide la distancia de un valor particular de la variable aleatoria al valor esperado o medio, μ. En el cálculo de la varianza de una variable aleatoria discreta, elevamos al cuadrado las desviaciones y luego las ponderamos por la probabilidad correspondiente. La suma de estas desviaciones cuadradas, ponderadas para todos los valores de la variable aleatoria, es la varianza. En otras palabras, la **varianza** es un promedio ponderado de las desviaciones elevadas al cuadrado.

El cálculo de la varianza para la cantidad de ventas diarias en el problema de DiCarlo Motors se resume en la tabla 3.5. Vemos que la varianza para la cantidad de automóviles vendidos por día es 1.25. Una medida de variabilidad relacionada es la **desviación estándar**, σ, que se define

TABLA 3.5 CÁLCULO DE LA VARIANZA

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$f(x)$	$(x - \mu)^2 f(x)$
0	$0 - 1.50 = -1.50$	2.25	0.18	$2.25\ (0.18) = 0.4050$
1	$1 - 1.50 = -0.50$	0.25	0.39	$0.25\ (0.39) = 0.0975$
2	$2 - 1.50 = 0.50$	0.25	0.24	$0.25\ (0.24) = 0.0600$
3	$3 - 1.50 = 1.50$	2.25	0.14	$2.25\ (0.14) = 0.3150$
4	$4 - 1.50 = 2.50$	6.25	0.04	$6.25\ (0.04) = 0.2500$
5	$5 - 1.50 = 3.50$	12.25	0.01	$12.25\ (0.01) = 0.1225$
				$\sigma^2 = 1.2500$

como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Para DiCarlo Motors la desviación estándar de la cantidad de automóviles vendidos por día es

$$\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118$$

Con el propósito de facilitar la interpretación gerencial, la desviación estándar puede preferirse sobre la varianza debido a que se mide en las mismas unidades que la variable aleatoria ($\sigma = 1.118$ automóviles vendidos por día). La varianza (σ^2) se mide en unidades cuadradas y por tanto, para un gerente es más difícil interpretarla.

Resuelva el problema 4 para asegurarse de que puede calcular el valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

En este punto nuestra interpretación de la varianza y la desviación estándar se limita a comparaciones de la variabilidad de diferentes variables aleatorias. Por ejemplo, si los datos de las ventas diarias de una segunda concesionaria de DiCarlo Motors en Albany, Nueva York, proporcionan $\sigma^2 = 2.56$ y $\sigma = 1.6$, podemos concluir que la cantidad de automóviles vendidos por día en esta concesionaria exhibe más variabilidad que en la primera concesionaria de DiCarlo, donde $\sigma^2 = 1.25$ y $\sigma = 1.118$. Más adelante, en este capítulo, se estudia la distribución normal. Para esta distribución de probabilidad mostramos que la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria resultan fundamentales para hacer cálculos de probabilidad.

El siguiente M. C. en Acción, “Long Island City, Nueva York”, describe la manera en que Citibank modela la longitud de las líneas de espera en sus cajeros automáticos como variables aleatorias discretas con el fin de proporcionar un mejor servicio a sus clientes.

M.C. *en* ACCIÓN

*CITIBANK**

LONG ISLAND CITY, NEW YORK

Citibank, la división comercial de Citigroup, ofrece una amplia gama de servicios financieros, entre ellos cuentas de cheques y de débito, préstamos e hipotecas, seguros y servicios de inversión. Citibank proporciona estos servicios a través de un sistema único al que se refiere como Citibanking.

Citibank fue uno de los primeros bancos en Estados Unidos que introdujo cajeros automáticos. Los cajeros automáticos de Citibank, localizados en los Citicard Banking Centers (CBC), permiten a los clientes llevar a cabo todas sus transacciones bancarias en un solo lugar con el toque de un dedo, las 24 horas del día, los siete días de la semana. Más de 150 funciones bancarias —desde depósitos hasta manejo de inversiones— se pueden llevar a cabo con facilidad. Los usuarios de Citibank utilizan cajeros automáticos para 80% de sus transacciones.

* Los autores están en deuda con la señora Stacey Karter de Citibank por proporcionar este M. C. en Acción.

(*continúa*)

Cada CBC de Citibank opera como un sistema de línea de espera con clientes que llegan de modo aleatorio en busca de servicios en alguno de los cajeros automáticos. Si todos los cajeros están ocupados, los clientes que llegan esperan en una línea. Se conducen estudios periódicos de las capacidades de los CBC con el fin de analizar los tiempos de espera de los clientes y determinar si se necesitan cajeros adicionales.

Los datos que Citibank recolecta mostraron que las llegadas aleatorias de clientes seguían una distribución de probabilidad conocida como distribución de Poisson. Mediante el uso de la distribución de Poisson, Citibank puede calcular las probabilidades de la cantidad de clientes que lleguen a un CBC en cualquier periodo y tomar decisiones sobre el número de cajeros automáticos necesarios. Por ejemplo, sea x = el número de clientes que llegan en un periodo de un minuto. Si se asume que un CBC específico tiene una media de índice de llegada de dos clientes por minuto, la siguiente tabla muestra las probabilidades del número de clientes que llegan en un periodo de un minuto.

x	**Probabilidad**
0	.1353
1	.2707
2	.2707
3	.1804
4	.0902
5 o más	.0527

Las distribuciones de probabilidad discretas, como las que usa Citibank, son el tema de este capítulo. Además de la distribución de Poisson, aprenderá sobre las distribuciones binomiales e hipergeométricas, así como la manera de utilizarlas para que proporcionen información útil.

3.3 Distribución de probabilidad binomial

En esta sección consideramos una clase de experimentos que cumple con las condiciones siguientes:

1. El experimento consiste en una secuencia de n ensayos idénticos.
2. Dos resultados son posibles en cada ensayo. Nos referimos a un resultado como un *éxito* y al otro como un *fracaso*.
3. Las probabilidades de los dos resultados no cambian de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes (es decir, el resultado de un ensayo no afecta al resultado del otro).

Se dice que los experimentos que satisfacen las condiciones 2, 3 y 4 se generan por medio de un *proceso de Bernoulli*. Además, si se satisface la condición 1 (hay n ensayos idénticos), tenemos un *experimento binomial*. Una variable aleatoria discreta importante que se asocia con el experimento binomial es el número de resultados etiquetados como exitosos en los n ensayos. Si x denota el valor de esta variable aleatoria, entonces x puede tener un valor de 0, 1, 2, 3, . . . , n, dependiendo del número de éxitos observados en los n ensayos. La distribución de probabilidad asociada con esta variable aleatoria se llama **distribución de probabilidad binomial**.

Resuelva los incisos (a–d) del problema 9, para practicar el cálculo de probabilidades binomiales.

En casos donde la distribución binomial se puede utilizar, la fórmula matemática para calcular la probabilidad de cualquier valor para la variable aleatoria es la función de probabilidad binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n \tag{3.5}$$

donde

$$\begin{aligned} n &= \text{número de ensayos} \\ p &= \text{probabilidad de éxito en un ensayo} \\ x &= \text{número de éxitos en } n \text{ ensayos} \\ f(x) &= \text{probabilidad de } x \text{ éxitos en } n \text{ ensayos} \end{aligned}$$

El término $n!$ en la expresión anterior se conoce como *n factorial* y se define como

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

Por ejemplo, $4! = (4)(3)(2)(1) = 24$. Además, por definición, el caso especial factorial de cero es $0! = 1$.

El problema de Nastke Clothing Store

Para ilustrar la distribución de probabilidad binomial considere el experimento de los clientes que entran a Nastke Clothing Store. Para mantener el problema relativamente pequeño, restringimos el experimento a los siguientes tres clientes. Si, con base en la experiencia, el gerente de la tienda estima que la probabilidad de que un cliente haga una compra es 0.30, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los tres clientes siguientes hagan una compra?

Primero queremos demostrar que tres clientes que entran a la tienda de ropa y deciden si hacen una compra, o no, puede considerarse como experimento binomial. Al revisar los cuatro requisitos para un experimento observamos lo siguiente:

1. El experimento puede describirse como una secuencia de tres ensayos idénticos, un ensayo por cada uno de los tres clientes que entrarán a la tienda.

2. Para cada ensayo hay dos resultados posibles: el cliente hace una compra (éxito) o el cliente no hace una compra (fracaso).

3. Se supone que las probabilidades de compra (0.30) y los resultados de no compra (0.70) son los mismos para todos los clientes.

4. La decisión de compra de cada cliente es independiente de la decisión de compra de los demás clientes.

Por tanto, si definimos la variable aleatoria x como el número de clientes que hacen una compra (es decir, el número de éxitos en los tres ensayos), cumplimos con los requisitos de la distribución de probabilidad binomial.

Con $n = 3$ ensayos y la probabilidad de una compra $p = 0.30$ para cada cliente, utilizamos la ecuación 3.5 para calcular la probabilidad de que dos clientes hagan una compra. Esta probabilidad, denotada por $f(2)$, es

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{3!}{2!1!}(0.30)^2(0.70)^1 \\ &= \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1}(0.30)^2(0.70)^1 = 0.189 \end{aligned}$$

Resuelva el problema 12 para una aplicación de la distribución binomial.

Asimismo, la probabilidad de que ningún cliente haga una compra, indicada por $f(0)$, es

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{3!}{0!3!}(0.30)^0(0.70)^3 \\ &= \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 2 \times 1}(0.30)^0(0.70)^3 = 0.343 \end{aligned}$$

TABLA 3.6 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACE UNA COMPRA

x	$f(x)$
0	0.343
1	0.441
2	0.189
3	0.027
Total	1.000

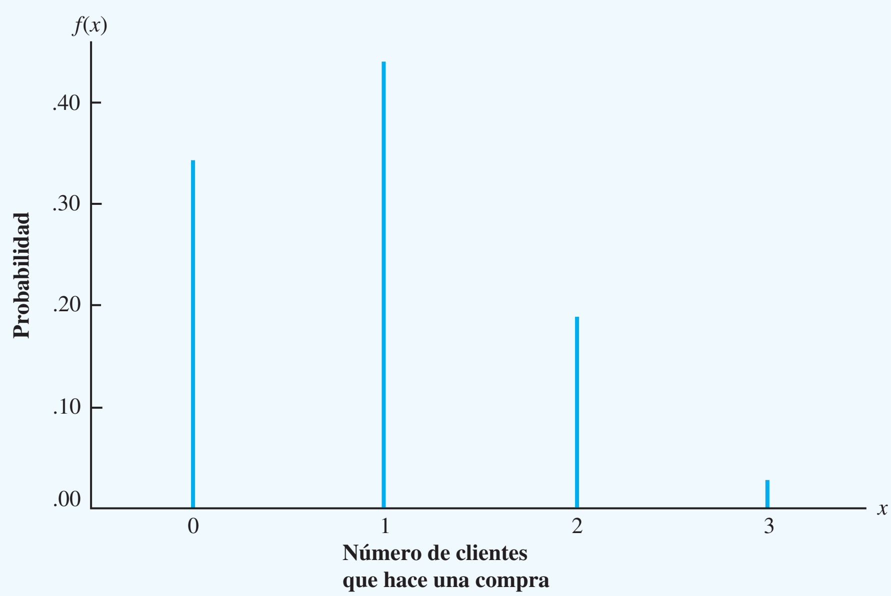
De modo parecido, la ecuación 3.5 puede utilizarse para mostrar que las probabilidades de una y tres compras son $f(1) = 0.441$ y $f(3) = 0.027$. La tabla 3.6 y la figura 3.2 resumen la distribución de probabilidad binomial para el problema de Nastke Clothing Store.

Si consideramos cualquier variación del problema de Nastke, por ejemplo que entran a la tienda 10 clientes en vez de 3, la función de probabilidad binomial dada por la ecuación 3.5 sigue funcionando. Por ejemplo, la probabilidad de que 4 de los 10 clientes hagan una compra es

$$f(4) = \frac{10!}{4!6!}(0.30)^4(0.70)^6 = 0.2001$$

En este experimento binomial, $n = 10$, $x = 4$ y $p = 0.30$.

FIGURA 3.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL PROBLEMA DE NASTKE CLOTHING STORE



Con las computadoras y calculadoras modernas, estas tablas resultan prácticamente innecesarias. Es sencillo evaluar la ecuación 3.5 directamente.

Con el uso de la ecuación 3.5 se han desarrollado tablas que proporcionan la probabilidad de x éxitos en n ensayos para un experimento binomial. Una tabla de valores de probabilidad binomial como ésta se incluye en el apéndice B. En la tabla 3.7 incluimos una tabla binomial parcial; para utilizarla, especifique los valores de n, p y x para el experimento binomial que nos interesa. Compruebe la utilidad de esta tabla al emplearla para verificar la probabilidad de cuatro éxitos en 10 ensayos para el problema de Nastke Clothing Store. Observe que el valor de $f(4) = 0.2001$ puede leerse directamente en la tabla de probabilidades binomiales, por lo que es innecesario realizar los cálculos que requiere la ecuación 3.5.

TABLA 3.7 VALORES ELEGIDOS PARA LA TABLA DE PROBABILIDAD BINOMIAL. EJEMPLO: $N = 10$, $X = 4$, $P = 0.30$; $F(4) = 0.2001$

n	*x*	*p*									
		0.05	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	**0.2001**	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0531	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005

Valor esperado y varianza para la distribución binomial

A partir de la distribución de probabilidad de la tabla 3.6 podemos utilizar la ecuación 3.3 para calcular el valor esperado o el número esperado de clientes que hace una compra:

$$\mu = \Sigma xf(x) = 0\,(0.343) + 1\,(0.441) + 2\,(0.189) + 3\,(0.027) = 0.9$$

Note que podríamos haber obtenido este mismo valor esperado con sólo multiplicar n (el número de ensayos) por p (la probabilidad de éxito en cualquier ensayo):

$$np = 3(0.30) = 0.9$$

Para el caso especial de una distribución de probabilidad binomial, el valor esperado de la variable aleatoria está dado por

$$\mu = np \tag{3.6}$$

Por tanto, si usted sabe que la distribución de probabilidad es binomial, no tiene que hacer los cálculos detallados requeridos por la ecuación 3.3 para calcular el valor esperado.

Suponga que durante el mes siguiente Nastke Clothing Store espera que 1000 clientes entren a la tienda. ¿Cuál es el número esperado de clientes que harán una compra? Utilizando la ecuación 3.6, la respuesta es $\mu = np = (1000)(0.3) = 300$. Para incrementar el número esperado de ventas, Nastke debe persuadir a más clientes para que entren a la tienda o aumentar de alguna manera la probabilidad de que cualquier persona haga una compra cuando esté adentro.

Para el caso especial de una distribución binomial, la varianza de la variable aleatoria es

Resuelva el inciso e) del problema 9 para practicar el cálculo del valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

$$\sigma^2 = np(1 - p) \tag{3.7}$$

Para el problema de Nastke Clothing Store con tres clientes, la varianza y la desviación estándar para el número de clientes que hacen una compra son

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 3(0.3)(0.7) = 0.63$$
$$\sigma = \sqrt{0.63} = 0.79$$

3.4 Distribución de probabilidad de Poisson

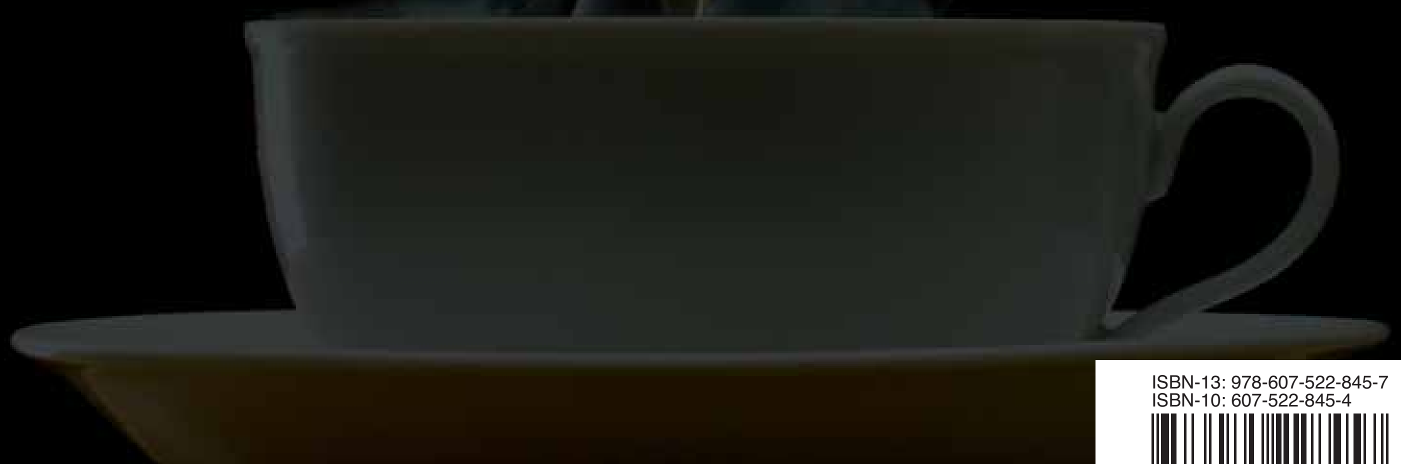
En esta sección consideraremos una variable aleatoria discreta, que con frecuencia resulta útil cuando tratamos con el número de ocurrencias de un evento durante un intervalo específico de tiempo o espacio. Por ejemplo, la variable aleatoria de interés podría ser la cantidad de automóviles que llega a un centro de lavado en una hora, el número de reparaciones necesarias en 10 kilómetros de carretera o, de fugas en 100 kilómetros de tubería. Si se cumplen los dos supuestos siguientes, se puede utilizar la **distribución de probabilidad de Poisson**:

1. La probabilidad de una ocurrencia del evento es la misma para dos intervalos de igual longitud.
2. La ocurrencia o no ocurrencia de un evento en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no ocurrencia en cualquier otro intervalo.

La función de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson se determina por medio de la ecuación 3.8:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{por } x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

La decimotercera edición de **Métodos cuantitativos para los negocios** proporciona a los estudiantes universitarios y de posgrado una comprensión conceptual del papel que juegan los métodos cuantitativos en el proceso de toma de decisiones. El libro describe los diversos métodos cuantitativos desarrollados a lo largo de los años, explica su funcionamiento y muestra cómo pueden usarse. Sus páginas están orientadas a las aplicaciones y utilizan un enfoque de escenarios problemáticos que logra presentar de manera sencilla materiales cuantitativos complicados; así, en cada capítulo se describe un problema junto con el procedimiento cuantitativo que representa. El desarrollo de la técnica o modelo cuantitativo incluye su utilización en el problema para generar una solución o una recomendación. Este enfoque, exclusivo de este libro, motiva a estudiantes, profesores y personas interesadas, ya que demuestra no sólo cómo funciona el procedimiento, sino también cómo contribuye al proceso de toma de decisiones.



ISBN-13: 978-607-522-845-7
ISBN-10: 607-522-845-4

9 786075 228457

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com