CENGAGE Learning™

JAMES STEWART

Cálculo de una variable

Trascendentes tempranas

7E

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

SÉPTIMA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY

Y

UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción
María del Carmen Rodríguez Pedroza

Revisión técnica
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Aplicadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

Dr. Abel Flores Amado
Coordinador de la materia de Cálculo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Puebla

Mtro. Gustavo Zamorano Montiel
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning

Cálculo de una variable
Trascendentes tempranas
Séptima edición
James Stewart

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español
Pilar Hernández Santamarina

Coordinador de Manufactura
Rafael Pérez González

Editores
Sergio Cervantes González
Gloria Luz Olguín Sarmiento

Diseño de portada
Irene Morris

Imagen de portada
Irene Morris

Composición tipográfica
6Ns

Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

Traducido del libro *Calculus. Single variable. Early trascendentals.* Seventh Edition.
James Stewart
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2012
ISBN: 978-0-538-49867-8

Datos para catalogación bibliográfica
Stewart James
Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.
Séptima edición
ISBN: 978-607-481-784-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Contenido

3 Reglas de derivación 173

4 Aplicaciones de la derivada 273

5 Integrales 359

6 Aplicaciones de la integración 421

7 Técnicas de integración 463

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 635

11 Sucesiones y series infinitas 689

Apéndices A1

Índice A115

4 Aplicaciones de la derivada

El cálculo que usted aprenderá en este capítulo le permitirá explicar la posición del arcoíris en el cielo y por qué los colores del arcoíris secundario aparecen en el orden invertido a las del arcoíris primario. (Véase el proyecto de las páginas 282-283.)

Ya hemos investigado algunas de las aplicaciones de la derivada, pero ahora que conocemos las reglas de derivación nos encontramos en mejor posición para continuar con mayor profundidad con las aplicaciones de la derivada. Aquí aprenderemos cómo la derivada afecta la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayuda a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área, o bien, encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, seremos capaces de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que resolveremos en este capítulo son.

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuá1 es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una importante pregunta para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Para empezar, primero explicaremos exactamente lo que son estos valores.

En la figura 1, se muestra la gráfica de una función en la que el punto más alto es (3, 5). En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Por otro lado, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, usamos la siguiente definición:

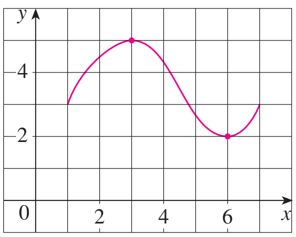


FIGURA 1

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

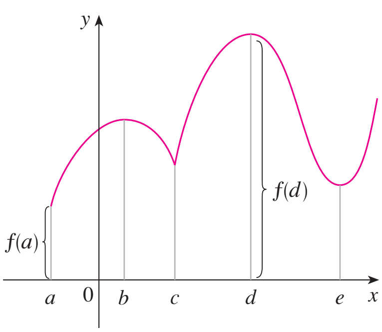


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locales $f(c)$, $f(e)$, máximos locales $f(b)$, $f(d)$

Un máximo o mínimo absolutos se les llama a veces máximo o mínimo **global**. Los valores máximo y mínimo de f se llaman **valores extremos** de f.

La figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en $x = d$ y mínimo absoluto en $x = a$. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la figura 2, si consideramos sólo valores de x cercanos a b [p. ej., si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de f. Por otro lado, $f(c)$ se llama valor *mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercana a c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en $x = e$. En general, tenemos la siguiente definición.

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

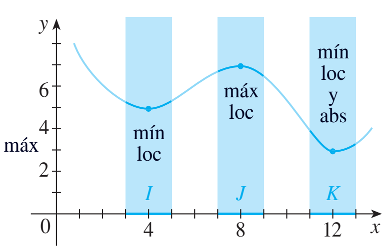


FIGURA 3

En la definición 2 (y en otros lugares), si decimos que algo es cierto **cerca** de c, queremos decir que es cierto en algún intervalo abierto que contiene a c. Por ejemplo, en la figura 3 vemos que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el menor valor de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ tiene valores menores cuando x está cerca de 12 (en el intervalo de K, por ejemplo). De hecho $f(12) = 3$ es un mínimo local y el mínimo absoluto. De modo similar, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) igual a 1, infinitas veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

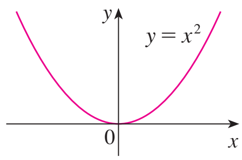


FIGURA 4
Valor mínimo $= 0$. No hay máximo

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 4.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 5, se ve que no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.

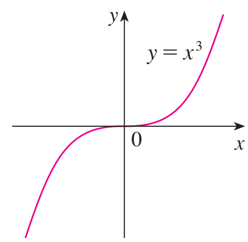


FIGURA 5
No hay mínimo ni máximo

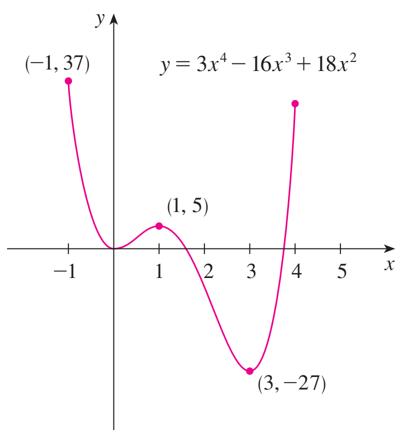


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 6. Podemos observar que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Observe que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$.

Hemos visto que algunas funciones tienen valores extremos, mientras que otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.

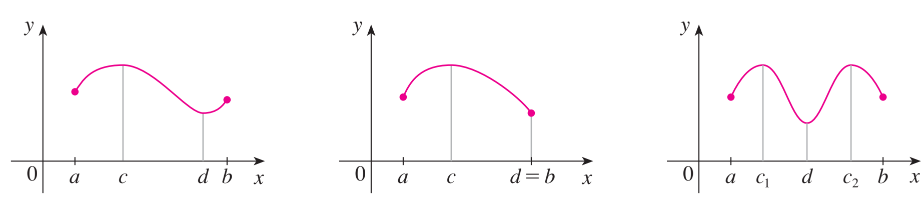


FIGURA 7

En las figuras 8 y 9 se muestra que una función no tiene que poseer valores extremos si no se satisface cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

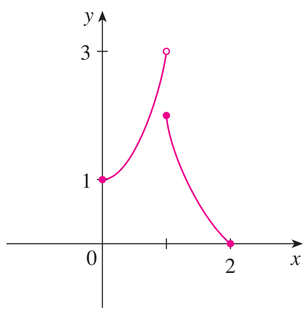


FIGURA 8
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

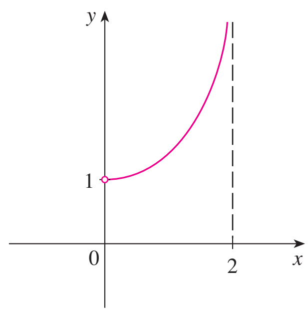


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 8, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$, pero no tiene valor máximo. (Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13b.]

La función g que se muestra en la figura 9 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo señala que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

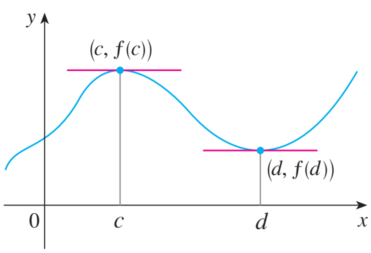


FIGURA 10

En la figura 10 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en $x = c$ y un mínimo local en $x = d$. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

Fermat

El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó a las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar rectas tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención del límite y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del Cálculo Diferencial.

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

DEMOSTRACIÓN Para la consideración de la conclusión, suponga que f tiene un máximo local en $x = c$. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por consiguiente,

$$f(c + h) - f(c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tenemos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad $\boxed{5}$ se invierte cuando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya hemos mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya hemos demostrado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local puede demostrarse de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que ya ha demostrado (véase el ejercicio 77).

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No podemos esperar localizar valores extremos haciendo simplemente $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

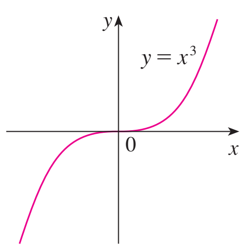


FIGURA 11
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (0 bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

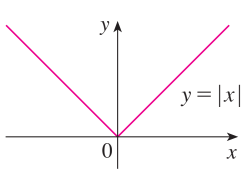


FIGURA 12
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

$\boxed{6}$ **Definición** Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En la figura 13 hay una gráfica de la función f del ejemplo 7, que apoya nuestra respuesta, porque hay una recta tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una recta tangente vertical cuando $x = 0$.

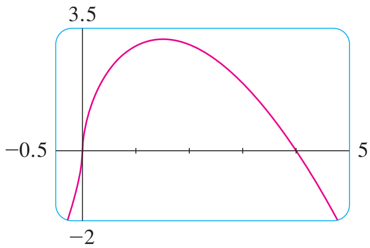


FIGURA 13

V EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto nos da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Se obtienen los mismos valores escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Así que $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; es decir $x = \frac{3}{2}$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0.

En términos de números críticos, el teorema de Fermat puede replantearse como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> $\boxed{7}$ Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que o es un extremo local [en cuyo caso, por $\boxed{7}$, se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el siguiente procedimiento de tres pasos siempre funciona.

> **Método del intervalo cerrado** Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:
>
> **1.** Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
>
> **2.** Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
>
> **3.** El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

V EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos utilizar el teorema del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando estos cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

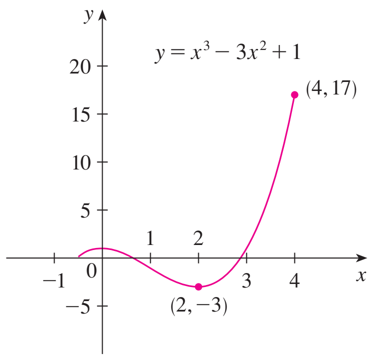


FIGURA 14

Tenga en cuenta que, en este ejemplo, el máximo absoluto ocurre en un extremo del intervalo, mientras que el mínimo absoluto ocurre en un número crítico. La gráfica de f se esboza en la figura 14.

Si tiene una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos, es posible estimar los valores máximos y mínimos muy fácilmente. Pero, como se muestra en el ejemplo siguiente, es necesario el cálculo para encontrar los valores *exactos*.

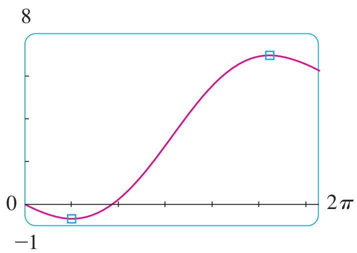


FIGURA 15

EJEMPLO 9

a) Utilice un dispositivo de gráficos para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

b) Utilice el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

SOLUCIÓN

a) La figura 15 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Moviendo el cursor cerca del punto máximo, vemos que las coordenadas y no cambian mucho en las proximidades del máximo. El valor máximo absoluto es aproximadamente 6.97 y ocurre cuando $x \approx 5.2$. Del mismo modo, moviendo el cursor cerca al punto mínimo, vemos que el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se produce cuando $x \approx 1.0$. Es posible obtener estimaciones más precisas al hacer acercamientos hacia los puntos máximos y mínimos; pero, en vez de esto, utilizaremos el cálculo.

b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Debido a que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o bien $5\pi/3$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y
$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Comparando estos cuatro números y utilizando el método del intervalo cerrado, vemos que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el máximo valor absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso a) sirven para verificar nuestro resultado.

NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial *Hubble* fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN No de la función velocidad dada, se nos pide hallar los valores extremos, sino de la función aceleración. Así que primero tenemos que derivar para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos del intervalo, tenemos

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

Así que la aceleración máxima es aproximadamente 62.87 pies/s^2, y la aceleración mínima es aproximadamente 21.52 pies/s^2.

4.1 Ejercicios

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

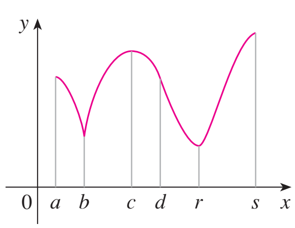
2. Supongamos que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?

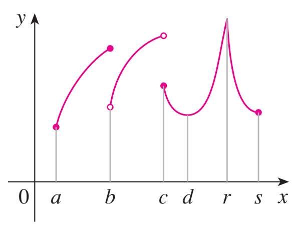
b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

3-4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

3.

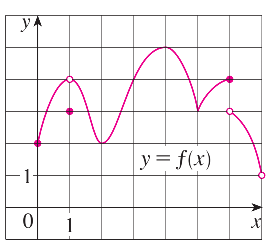


4.

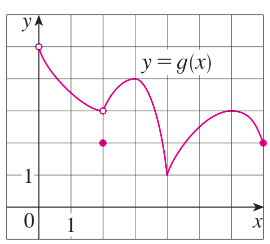


5-6 Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7-10 Esboce la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4.

10. f no tiene mínimo ni máximo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. a) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.

b) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua, pero no derivable, en 2.

c) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.

b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

13. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.

b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que es discontinua, pero que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

14. a) Esboce la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.

b) Esboce la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15-28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las graficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29-44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$

30. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45-46 Se da la fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47-62 Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 12 + 4x - x^2, \quad [0, 5]$

48. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3, \quad [0, 4]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\tan^{-1}x, \quad [0, 4]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Utilice una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ con una aproximación de un decimal.

65-68

a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la función con una aproximación de dos decimales.

b) Por medio del cálculo encuentre los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T, está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Un modelo para el precio promedio en EU de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función

$$A(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t es medido en años desde agosto de 1993. Estime los tiempos cuando el azúcar era más barata y más cara durante el periodo 1993-2003.

72. El 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo de un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4 151

a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el intervalo de tiempo $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje esta función polinomial.
b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y utilícelo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento en la presión de los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo que se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un espasmo de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).
a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con la evidencia experimental?
b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?
c) Esboce la gráfica de v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un número crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

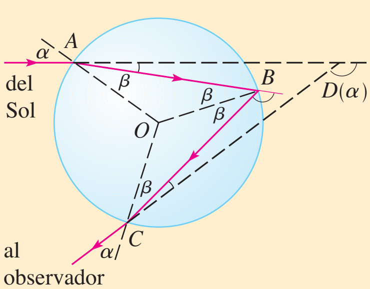
no tiene ni máximo local ni mínimo local.

76. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor mínimo local en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el que f tiene un mínimo local en c.

78. Una función cúbica es una función polinomial de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.
a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o no tener números críticos. Proporcione ejemplos y dibuje para ilustrar las tres posibilidades.
b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN CÁLCULO DE ARCOÍRIS

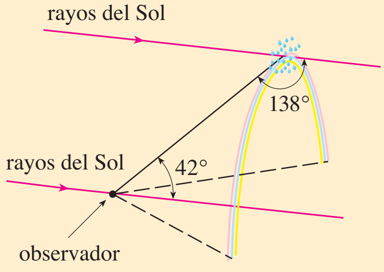


Formación del arcoíris primario

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la Humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que atraviesa una gota esférica de lluvia en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja; pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Observe que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

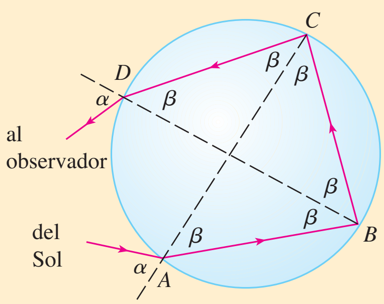
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$



Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que cuando $\alpha \approx 59.4°$ tenemos $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea el brillo del arcoíris primario. En la figura a la izquierda se muestra que el ángulo de elevación desde el observador hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$ (A este ángulo se le llama *ángulo de arcoíris*).

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, pero, ¿cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos con un prisma en 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$, en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de $42.3°$ para el arco rojo y de $40.6°$ para el arco violeta. Así pues, el arcoíris consta en realidad de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



Formación del arcoíris secundario

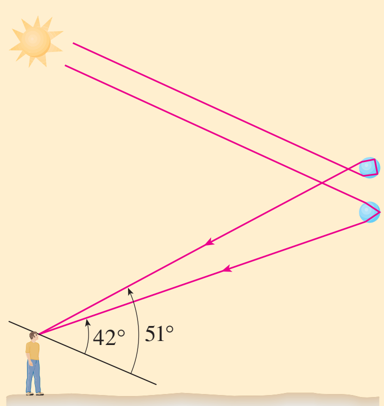
3. Quizás haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que aparece a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es aproximadamente $129°$ y que el ángulo de arcoíris para el arcoíris secundario es de cerca de $51°$, como se muestra en la figura a la izquierda.



4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden invertido al del primario.

4.2 Teorema del valor medio

Vamos a ver que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho central, llamado teorema del valor medio. Pero, para llegar a este teorema, veremos primero el siguiente resultado.

Rolle

El teorema de Rolle fue publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado *Méthode pour resoudre les Egalitez*. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, vamos a echar un vistazo a las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por consiguiente, el teorema de Rolle es verosímil.

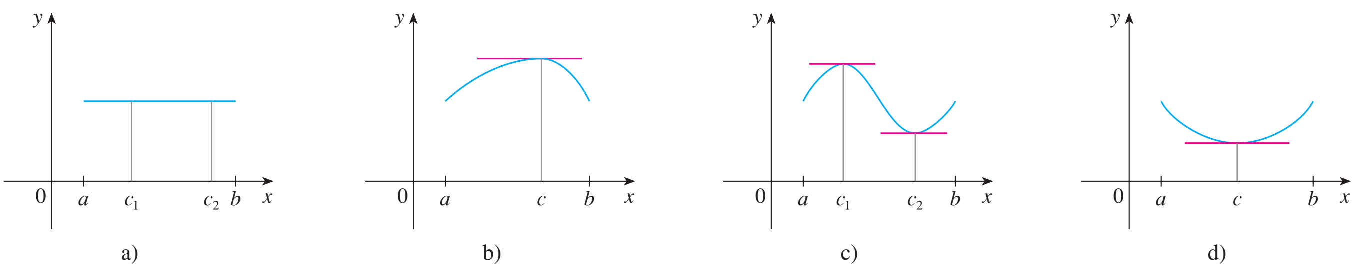


FIGURA 1

RP Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I $f(x) = k$**, una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el número c puede tomar *cualquier* número en (a, b).

CASO II $f(x) > f(a)$ **para alguna** x **en** (a, b) [como en la figura 1b) o c)]
Por el teorema del valor extremo (que podemos aplicar por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Ya que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar este valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b), entonces f tiene un máximo *local* en c y, por la hipótesis 2, f es derivable en c. Por tanto, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ **para algún** x **en** (a, b) [como en la figura 1c) o d)]
Por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, como $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número $x = c$ en (a, b). Otra vez, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

EJEMPLO 1 Vamos a aplicar el teorema de Rolle a la función posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle señala que hay algún instante de tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, puede verse que esto es cierto cuando se lanza una bola directamente hacia arriba.)

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

SOLUCIÓN Primero utilizamos el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Entonces $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$.

La figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida en el ejemplo 2. El teorema de Rolle muestra que no importa cuánto ampliemos el rectángulo de vista, nunca podremos encontrar una segunda intersección con el eje x.

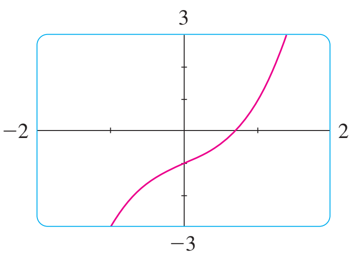


FIGURA 2

El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Como el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle aseguran que existe un número con una determinada propiedad, pero no nos dicen cómo encontrar el número.

Dado que f es una función polinomial, es continua, por lo que el teorema del valor intermedio establece que existe un número $x = c$ entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$, de lo que se deduce que la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otras raíces reales, utilizamos el teorema de Rolle y argumentamos por contradicción. Supongamos que tenemos dos raíces a y b. Entonces $f(a) = 0 = f(b)$ y, dado que f es una función polinomial, es derivable en (a, b) y continua sobre $[a, b]$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un número $x = c$ entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

(ya que $x^2 \geqslant 0$), por lo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto conduce a una contradicción, por tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales.

El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el importante teorema siguiente, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph Louis Lagrange.

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, podemos ver que es razonable desde la interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

3 $$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Dado que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB. En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB (imagine una recta paralela a AB, moviéndose desde lejos manteniendo el paralelismo hasta que toque la gráfica por primera vez).

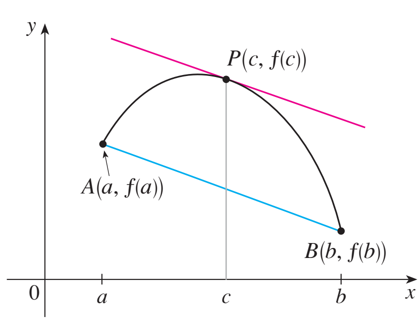


FIGURA 3

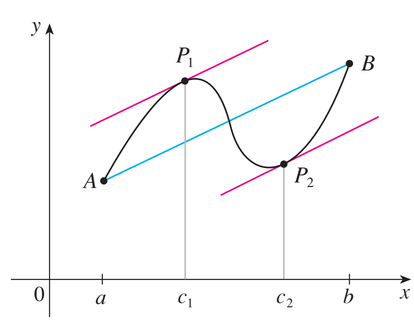


FIGURA 4

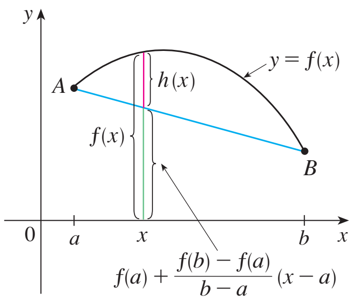


FIGURA 5

DEMOSTRACIÓN Aplicamos el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la recta secante AB. Mediante la ecuación 3, vemos que la ecuación de la recta AB puede escribirse como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Lagrange y el teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue formulado primero por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín a la tierna edad de 19 años. Lagrange hizo grandes contribuciones a la teoría de números, teoría de las funciones, teoría de las ecuaciones y a la mecánica celeste y analítica. En particular, aplicó el cálculo en el análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación a París del rey Luis XVI, donde recibió apartamentos en el Louvre y un cargo de profesor en la Escuela Politécnica. A pesar de todos los lujos y la fama, era un hombre tranquilo, viviendo sólo para la ciencia.

Primero, debemos verificar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua sobre $[a, b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.
2. La función h es derivable sobre (a, b) porque f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular h' directamente de la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Note que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por tanto, $h(a) = h(b)$.

Dado que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, que señala que existe un número $x = c$ en (a, b) tal que $h'(c) = 0$, entonces se tiene

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

así que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

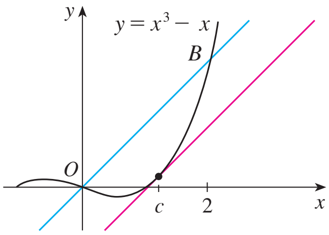


FIGURA 6

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en $(0, 2)$, así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB.

V EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la función posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. Así, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) nos indica que en algún momento $t = c$ entre a y b la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a la velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil viajaba 180 km en 2 horas, entonces el velocímetro debe tener una lectura de 90 km/h por lo menos una vez.

En general, el teorema del valor medio puede interpretarse diciendo que existe un número en el cual la razón de cambio instantáneo es igual a la razón de cambio promedio a lo largo de un intervalo.

El principal significado del teorema del valor medio es que nos permite obtener información acerca de una función a partir de aquella acerca de su derivada. En el caso siguiente se proporciona un ejemplo de este principio.

V EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Partimos del hecho de que f es derivable (y, por tanto, continua) en todo su dominio. En particular, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Existe un número $x = c$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

así que
$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Tenemos que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, así que, en particular, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2, tenemos $2f'(c) \leqslant 10$, así que

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El mayor valor posible para $f(2)$ es 7.

El teorema del valor medio puede utilizarse para establecer algunos de los hechos básicos del Cálculo Diferencial. Uno de estos hechos básicos es el siguiente teorema. Otros se encontrarán en las secciones siguientes.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquier en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, obtenemos un número $x = c$ tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$\boxed{6} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, tenemos $f'(c) = 0$, así que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante sobre (a, b).

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, f es constante; esto es, $f - g$ es constante.

NOTA Cuidado al utilizar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero f, evidentemente, no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$ y también sobre el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no es necesario utilizar el cálculo para demostrar esta identidad, la demostración mediante él es muy sencilla. Si $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x. Por tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, ponemos $x = 1$ [porque podemos evaluar $f(1)$ exactamente]. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

4.2 Ejercicios

1-4 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de Rolle?

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7 Técnicas de integración

Fotografía de Omega Centauri que contiene varios millones de estrellas y es el cúmulo globular más grande en nuestra galaxia. Los astrónomos utilizan estereografía estelar para determinar la densidad real de las estrellas en un cúmulo estelar de la densidad (en dos dimensiones) que puede ser analizada en una fotografía. En la sección 7.8 se le pedirá evaluar una integral para estimar la densidad aparente a partir de la densidad real.

Con el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar una función si conocemos una antiderivada; esto es, una integral indefinida. Aquí resumimos las integrales más importantes que hemos aprendido hasta ahora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

En este capítulo desarrollamos técnicas para utilizar estas fórmulas básicas de integración para obtener integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5, aprendimos el más importante método de integración, la regla de sustitución. La otra técnica general, la integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Después aprenderemos métodos especiales para clases de funciones particulares, como funciones trigonométricas y funciones racionales.

La integración no es tan sencilla como la derivación. No existen reglas que garanticen absolutamente la obtención de una integral indefinida de una función, así que discutiremos una estrategia para la integración en la sección 7.5.

7.1 Integración por partes

Cada regla de derivación tiene una correspondiente regla de integración. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto, se llama *integración por partes*.

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,
$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos reacomodar esta ecuación como

1
$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para la integración por partes**. Tal vez sea más fácil recordarla en la siguiente notación: sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, las diferenciales son $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, así que, por la regla de sustitución, la fórmula para la integración por partes se transforma en

2
$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 1 Supongamos que elegimos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos elegir *cualquier* antiderivada de g'.) Así, utilizando la fórmula 1, tenemos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Es muy aconsejable verificar derivando la respuesta. Si lo hacemos, obtendremos $x \operatorname{sen} x$, como es de esperarse.

Es útil utilizar el patrón

$$\begin{array}{ll} u = \square & dv = \square \\ du = \square & v = \square \end{array}$$

CON LA FÓRMULA 2 Sea

$$u = x \qquad dv = \text{sen}\, x\, dx$$

Entonces

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

así que

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = \int \overbrace{x}^{u}\; \overbrace{\text{sen}\, x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\; \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\; \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \text{sen}\, x + C$$

NOTA Nuestro objetivo al utilizar la integración por partes es obtener una integral más sencilla que la original. Así, en el ejemplo 1, la original es $\int x \,\text{sen}\, x\, dx$ y la expresamos en términos de la integral más sencilla $\int \cos x\, dx$. Si hubiéramos elegido $u = \text{sen}\, x$ y $dv = x\, dx$, entonces $du = \cos x\, dx$ y $v = x^2/2$, por lo que la integral por partes da

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = (\text{sen}\, x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\, dx$ es una integral más difícil que la que queremos resolver. En general, cuando decidimos escoger u y dv, usualmente tratamos de elegir $u = f(x)$ de manera que resulte fácil de derivar (o al menos no tan complicada), y que $dv = g'(x)\, dx$ sea fácil de integrar para obtener v.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí no tenemos opciones para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Entonces

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Se acostumbra escribir $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

Verifique su respuesta derivando.

La integración por partes es eficaz en este ejemplo porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más sencilla que f.

V EJEMPLO 3 Encuentre $\int t^2 e^t\, dt$.

SOLUCIÓN Observe que t^2 resulta más sencilla cuando la derivamos (mientras que e^t no cambia si la derivamos o la integramos), así que elegimos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\, dt$$

Entonces

$$du = 2t\, dt \qquad v = e^t$$

La integración por partes nos da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t\, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t\, dt$$

La integral que hemos obtenido, $\int t e^t\, dt$, es más sencilla que la original; pero aún no está resuelta porque no tiene solución inmediata. Es necesario utilizar la integración por partes por segunda vez, haciendo $u = t$ y $dv = e^t\, dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$ y

$$\begin{aligned} \int t e^t\, dt &= t e^t - \int e^t\, dt \\ &= t e^t - e^t + C \end{aligned}$$

Poniendo esto en la ecuación $\boxed{3}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t\, dt &= t^2 e^t - 2 \int t e^t\, dt \\ &= t^2 e^t - 2(t e^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C \end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

En el ejercicio 50 del apéndice H, se da un método más fácil, utilizando números complejos.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se simplifican cuando se derivan, pero de cualquier manera intentamos eligiendo $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces $du = e^x\, dx$ y $v = -\cos x$, así que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

La integral que obtenemos, $\int e^x \cos x\, dx$, no es más sencilla que la original, pero al menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo anterior al integrar por partes dos veces, perseveramos e integramos por partes nuevamente. Esta vez utilizamos $u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$. Entonces $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

La figura 1 ilustra el ejemplo 4 con las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como verificación visual de nuestro trabajo, note que $f(x) = 0$ cuando F tiene un máximo o un mínimo.

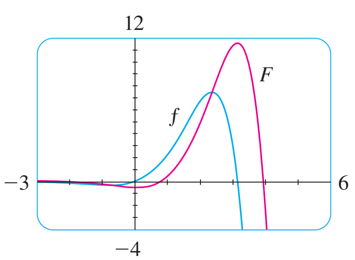


FIGURA 1

A primera vista parece que no hemos avanzado mucho, porque hemos llegado a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$, que es de donde partimos. Sin embargo, si sustituimos la expresión para $\int e^x \cos x\, dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4 obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Esto puede verse como una ecuación que se resuelve para la integral incógnita. Sumando $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos lados, obtenemos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de integración, resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Si combinamos la fórmula para la integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, podemos evaluar integrales definidas por partes. Evaluando ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

6 $$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

Así que la fórmula 6 da

$$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1\cdot\tan^{-1}1 - 0\cdot\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Ya que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 puede interpretarse como el área de la región que se muestra en la figura 2.

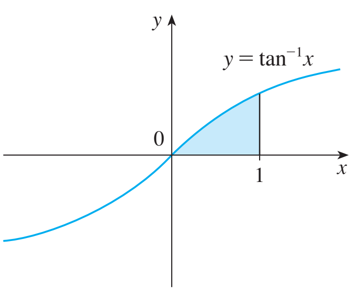


FIGURA 2

Para evaluar esta integral utilizamos la sustitución $t = 1 + x^2$ (ya que u tiene otra connotación en este ejemplo). Entonces $dt = 2x\,dx$, así que $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Por tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

EJEMPLO 6 Demuestre la siguiente fórmula de reducción

La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n se *reduce* a $n-1$ y $n-2$.

7 $$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un número entero.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen}x\,dx$$

Entonces $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx$$

Dado que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, resolvemos esta ecuación para la integral deseada tomando el último término del lado derecho y pasándolo al lado izquierdo:

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

La fórmula de reducción $\boxed{7}$ es útil porque, al utilizarla repetidamente, podemos expresar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 Ejercicios

1-2 Evalúe las siguientes integrales utilizando integración por partes con las elecciones de u y dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta \cos\theta\,d\theta$; $u = \theta$, $dv = \cos\theta\,d\theta$

3-36 Evalúe las siguientes integrales.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int ye^{0.2y}\,dy$

5. $\int te^{-3t}\,dt$

6. $\int (x-1)\operatorname{sen}\pi x\,dx$

7. $\int (x^2+2x)\cos x\,dx$

8. $\int t^2 \operatorname{sen}\beta t\,dt$

9. $\int \ln\sqrt[3]{x}\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5 \ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int z^3 e^z\,dz$

20. $\int x\tan^2 x\,dx$

21. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

23. $\int_0^{1/2} x\cos\pi x\,dx$

24. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

25. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

26. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

27. $\int_1^3 r^3 \ln r\,dr$

28. $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora   1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

30. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cos x\,\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

35. $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

37-42 Empiece eligiendo una sustitución y después utilice integración por partes para evaluar las siguientes integrales.

37. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

38. $\displaystyle\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

39. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

40. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

41. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

42. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

43-46 Evalúe las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable, graficando la funciones y su antiderivada (tome $C = 0$).

43. $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$

44. $\displaystyle\int x^{3/2}\ln x\,dx$

45. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} 2x\,dx$

47. a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

b) Utilice el inciso a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

48. a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.

c) Use los incisos a) y b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

49. a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

c) Utilice el inciso a) para demostrar que, para potencias impares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

50. Demuestre que, para funciones pares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

51-54 Utilice la integración por partes para demostrar las siguientes fórmulas de reducción.

51. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

52. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

53. $\displaystyle\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

54. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

55. Utilice el ejercicio 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\,dx$.

56. Use el ejercicio 52 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

57-58 Encuentre las siguientes áreas de la región limitada por las curvas dadas.

57. $y = x^2\ln x, \quad y = 4\ln x$

58. $y = x^2e^{-x}, \quad y = xe^{-x}$

59-60 Utilice una gráfica para aproximar la coordenada x de los puntos de intersección de las curvas dadas. Después encuentre (aproximadamente) el área de la región limitada por las curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}(\tfrac{1}{2}x), \quad y = 2 - x^2$

60. $y = x\ln(x+1), \quad y = 3x - x^2$

61-63 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para encontrar el volumen generado al rotar la región limitada por las curvas dadas alrededor de los ejes especificados.

61. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$ alrededor del eje y

62. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ alrededor del eje y

63. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ alrededor de $x = 1$

64. Calcule el volumen generado al rotar la región limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 2$ alrededor de cada eje.

a) el eje y

b) el eje x

65. Calcule el valor promedio de $f(x) = x \sec^2 x$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.

66. Al acelerar, un cohete quema combustible de manera que su masa disminuye con el tiempo. Supongamos que la masa inicial del cohete al despegar (incluyendo su combustible) es m, el combustible se consume con una rapidez r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t está dado por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $m = 30\,000\,\mathrm{kg}$, $r = 160\,\mathrm{kg/s}$ y $v_e = 3\,000\,\mathrm{m/s}$, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

67. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a una velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?

68. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, demuestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

69. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

70. a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* utilice el inciso a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interpretación geométrica del inciso b).

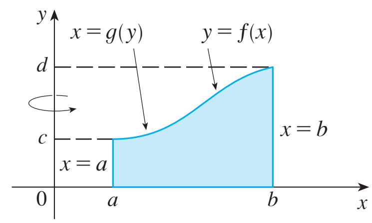
d) Utilice el inciso b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

71. Utilizando cascarones cilíndricos, obtuvimos la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, pero ahora podemos utilizar integración por partes para demostrarla por medio del método de las rebanadas de la sección 6.2, al menos para el caso en el que f es uno a uno y, por tanto, tiene una función inversa g. Recurra a la figura para demostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Haga la sustitución $y = f(x)$ y después utilice integración por partes sobre la integral resultante, para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



72. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

a) Demuestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

b) Utilice el ejercicio 50 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

c) Use los incisos a) y b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

d) Utilice el inciso c) y los ejercicios 49 y 50 para demostrar que

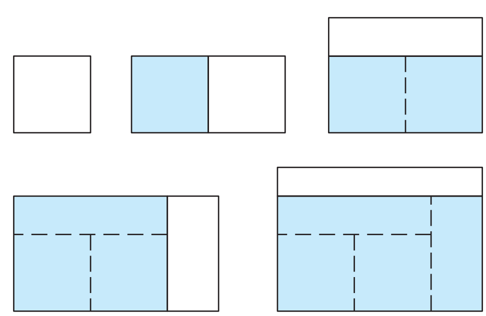
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Usualmente, esta fórmula se expresa como el producto infinito

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se conoce como el *producto de Wallis*.

e) Construimos rectángulos como los siguientes: empezamos con un cuadrado de área 1 y le adjuntamos alternativamente rectángulos de área 1 junto al rectángulo anterior o encima de éste (véase la figura). Encuentre el límite de las razones del ancho y la altura de estos rectángulos.



7.2 Integrales trigonométricas

En esta sección utilizaremos identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Empezamos con las potencias del seno y el coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN No es útil sustituir simplemente $u = \cos x$, ya que entonces $du = -\text{sen } x\, dx$. Para integrar potencias del coseno, necesitamos un sen x como factor extra. Del mismo modo, una potencia del seno requiere un cos x como factor adicional. Debido a esto, podemos separar un factor coseno y convertir el factor restante $\cos^2 x$ en una expresión que involucre al seno, utilizando la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \text{sen}^2 x) \cos x$$

Con esto podemos evaluar la integral sustituyendo $u = \text{sen } x$, $du = \cos x\, dx$ y, así

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \text{sen}^2 x) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \text{sen } x - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3 x + C \end{aligned}$$

En general, intentamos escribir una integral que involucra potencias de seno y coseno en una forma en la que haya sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos del coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos del seno). La identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ posibilita esta conversión entre potencias pares del seno y el coseno, una en términos de otra.

V EJEMPLO 2 Encuentre $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Podríamos convertir $\cos^2 x$ a $1 - \text{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de sen x sin ningún factor extra cos x. En cambio, si separamos un solo factor seno y reescribimos el factor restante $\text{sen}^4 x$ en términos de cos x:

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \text{ sen } x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \text{ sen } x$$

En la figura 1 se muestra la gráfica del integrando $\text{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

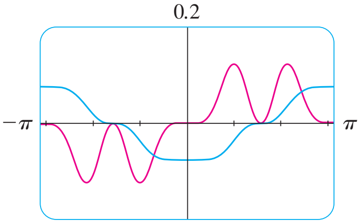


FIGURA 1

Sustituyendo $u = \cos x$, tenemos $du = -\text{sen } x\, dx$, así que

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \text{ sen } x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \text{ sen } x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores, una potencia impar del seno o el coseno nos permiten separar un factor y el resto convertirlo en una potencia par. Si el integrando contiene potencias pares del seno y el coseno, esta estrategia falla. En este caso, podemos aprovechar las siguientes identidades del ángulo medio (veánse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

V EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

El ejemplo 3 muestra que el área de la región en la figura 2 es $\pi/2$.

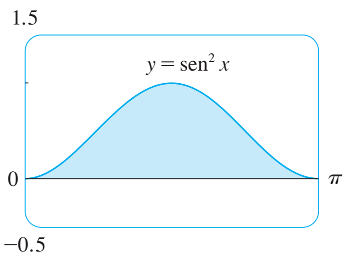


FIGURA 2

SOLUCIÓN Si escribimos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se facilita la evaluación de la integral. Sin embargo, utilizando la fórmula del ángulo medio para $\operatorname{sen}^2 x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Observe que hicimos mentalmente la sustitución $u = 2x$ cuando integramos $\cos 2x$. En el ejercicio 47 de la sección 7.1, vimos otro método para evaluar esta integral.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 47 de la sección 7.1), pero un mejor método es expresar $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y utilizar la fórmula del ángulo medio:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx\end{aligned}$$

Ya que vuelve a aparecer $\cos^2 2x$, usamos otra vez la fórmula del ángulo medio

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

lo cual da

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C\end{aligned}$$

Para resumir, proporcionamos una guía para evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$ son números enteros.

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraemos un factor coseno y utilizamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx &= \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \operatorname{sen} x$.

b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor seno y usamos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x\, \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\, \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \cos x$. [Observe que si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse a) o b).]

c) Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil utilizar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Podemos aplicar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Dado que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, podemos separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante a una expresión que involucra la tangente, utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O bien, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, podemos separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de la tangente a secante.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2 x$, podemos expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Entonces, podemos evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\begin{aligned}\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \\ &= \int \tan^6 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx \\ &= \int u^6 (1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\ &= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2\theta$, como en el ejemplo anterior, nos queda un factor $\sec^5\theta$ que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si separamos un factor $\sec\theta \tan\theta$, podemos convertir la potencia restante de la tangente en una expresión que involucra sólo a la secante, por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Así, la integral puede evaluarse sustituyendo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores muestran estrategias para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para los dos casos que aquí se resumen.

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), extraemos un factor $\sec^2 x$ y utilizamos $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x \, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor $\sec x \tan x$ y utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \sec x$.

Para otros casos, no hay guías claras. Podemos necesitar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de ingenio. Algunas veces será necesario integrar $\tan x$

utilizando la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

También necesitamos la integral indefinida de la secante:

La fórmula 1 fue descubierta por James Gregory en 1668 (véase su biografía en la página 199). Gregory utilizó esta fórmula para resolver un problema en la elaboración de tablas náuticas.

$$\boxed{1} \qquad \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Podríamos verificar la fórmula 1 derivando el lado derecho, o como sigue. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

Si sustituimos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$, por lo que la integral resulta $\int (1/u)\,du = \ln|u| + C$. Así, tenemos

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\int \tan^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí sólo aparece $\tan x$, así que utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x \tan^2 x\,dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

En la primera integral sustituimos mentalmente $u = \tan x$, de modo que $du = \sec^2 x\,dx$.

Si aparece una potencia par de la tangente con una potencia impar de la secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de la $\sec x$. Las potencias de la $\sec x$ pueden requerir integración por partes, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Encuentre $\int \sec^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, podemos integrar por partes con

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$

$$du = \sec x \tan x\,dx \qquad v = \tan x$$

CÁLCULO de una variable, Trascendentes tempranas es ampliamente reconocido por su precisión matemática, claridad de la exposición y notables ejemplos y conjuntos de problemas. Millones de estudiantes en todo el mundo han estudiado el cálculo a través del estilo registrado de Stewart, mientras que los instructores han adoptado su planteamiento una y otra vez. En la séptima edición, Stewart continúa estableciendo el estándar para el curso al tiempo que añade contenido cuidadosamente revisado. Las pacientes explicaciones, los excelentes ejercicios centrados en la resolución de problemas y las series de ejercicios cuidadosamente graduadas que han hecho de los textos de Stewart *best sellers*, continúan proporcionando una base sólida para esta edición. Desde los estudiantes con menos preparación hasta los más talentosos matemáticos, la redacción y la presentación de Stewart les sirven para mejorar el entendimiento y fomentar la confianza.

Características

- Cuatro pruebas de diagnóstico cuidadosamente diseñadas en el álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría aparecen al principio del texto. Éstas proporcionan a los estudiantes una manera conveniente de poner a prueba su conocimiento previo y poner al día las técnicas y habilidades que necesitan para comenzar con éxito el curso. Las respuestas están incluidas y los estudiantes que necesiten mejorar se remiten a los puntos en el texto o en la página web del libro donde pueden buscar ayuda.

- Cada concepto se apoya en ejemplos resueltos con precisión, muchos de ellos con explicaciones paso a paso y ejercicios cuidadosamente seleccionados. La calidad de este sistema pedagógico es lo que distingue a los textos de Stewart de otros.

- Los ejemplos no son sólo modelos para resolver problemas o un medio para demostrar las técnicas, sino que los estudiantes también desarrollan una visión analítica del tema. Para proporcionar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, muchos de estos ejemplos detallados muestran soluciones que se presentan gráfica, analítica y/o de forma numérica. Las notas al margen amplían y aclaran los pasos de la solución.

- El tema de las ecuaciones diferenciales es unificado con el tema del modelaje. A los enfoques cualitativos, numéricos y analíticos se les da la misma consideración.

- Se han incrementado el número de problemas a la serie de ejercicios más difíciles de la sección "Problemas adicionales" al final de cada capítulo. Estas secciones refuerzan los conceptos que requieren los estudiantes para aplicar las técnicas de más de un capítulo del texto y la paciencia mostrada en la forma de abordar un problema difícil.

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481784-3
ISBN-10: 607481784-7

9 786074 817843