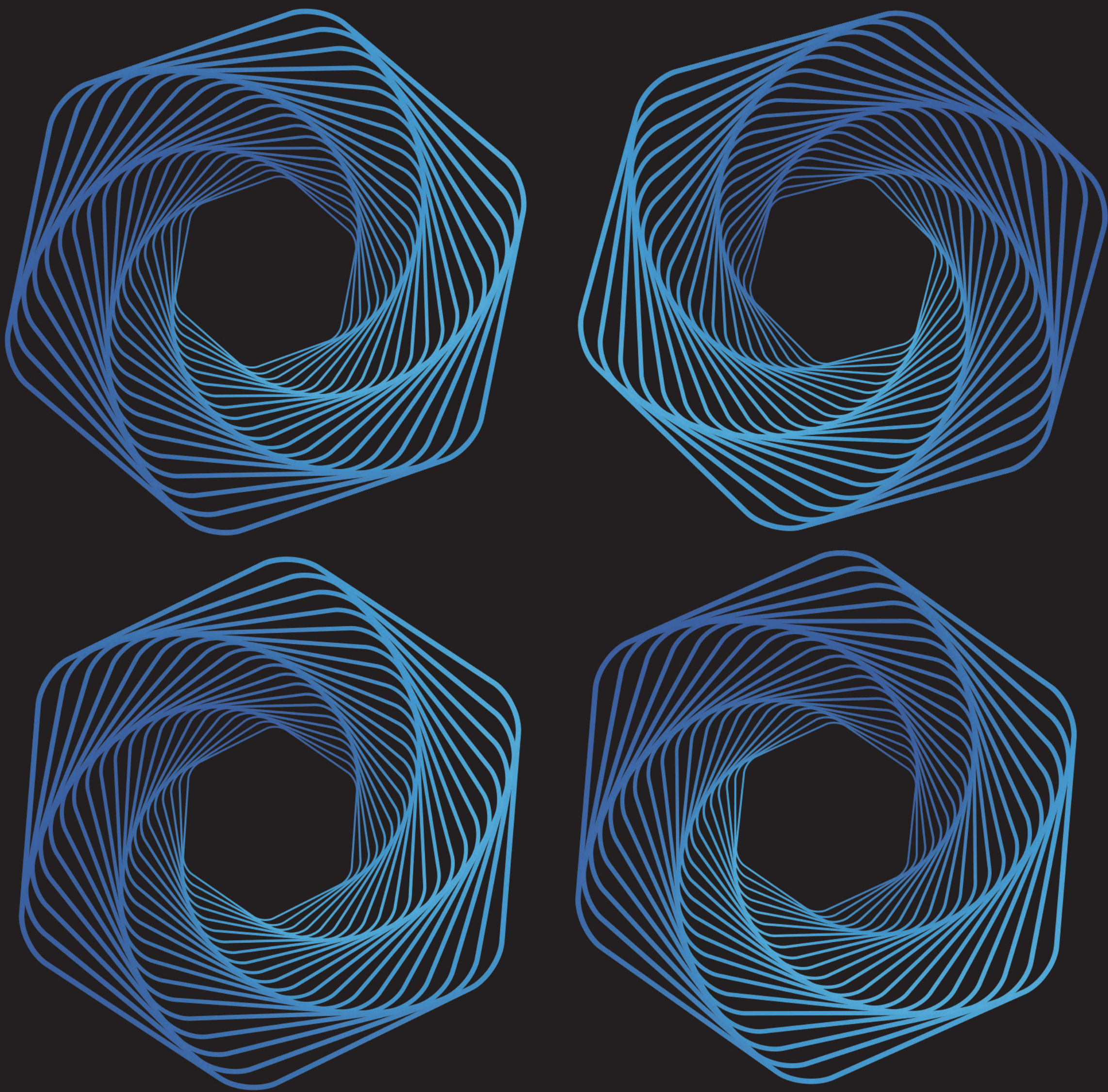
CENGAGE



MATEMÁTICAS IV
ÁLGEBRA LINEAL

RON LARSON

MATEMÁTICAS IV
ÁLGEBRA LINEAL

8/1

MATEMÁTICAS IV
ÁLGEBRA LINEAL

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Traducción
Oliver Davidson Véjar
Traductor profesional

Revisiones técnicas de esta edición
MSc. Harold Vacca González
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá (Colombia)

Mtro. Francisco Javier Avilés Urbiola
Instituto Tecnológico de Querétaro

CENGAGE

Australia • Brasil • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE

Matemáticas IV. Álgebra lineal
Primera edición.
Ron Larson

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor de desarrollo:
Omegar Martínez

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:
© Por Oleksii Lishchyshyn/Shuterstock

Composición tipográfica:
José Jaime Gutiérrez Aceves

Esta es una traducción/adaptación del libro:
Elementary linear algebra. Seventh Edition.
Publicado en inglés por Cengage Learning © 2013
ISBN: 978-1-133-11087-3

Datos para catalogación bibliográfica:
Larson, Ron
Matemáticas IV. Álgebra lineal. Primera edición.
ISBN: 978-607-526-820-0

Visite nuestro sitio web en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 22 21 20 19

Contenido

Prefacio

Matemáticas IV, Álgebra lineal es una adaptación del muy reconocido *Fundamentos de álgebra lineal* de Ron Larson. La adaptación fue hecha por el maestro Joel Ibarra del Instituto Tecnológico de Toluca para el uso del texto según las necesidades y requisitos de los planes de estudio de las sedes del Tecnológico Nacional de México. Este libro incluye una completamente nueva unidad 1 con ejemplos, ejercicios y sección de proyectos. Adicionalmente, en esta entrega se han mejorado por completo varios capítulos del libro y se han agregado y actualizado ejercicios, ejemplos, casos y definiciones en todas sus secciones. A la vez que ha sido completamente replanteado, el volumen conserva, amplía y da énfasis a los ejercicios y al sistema que ha dado tanto reconocimiento a los libros de su autor original, haciéndolo más enfocado sin perder valor.

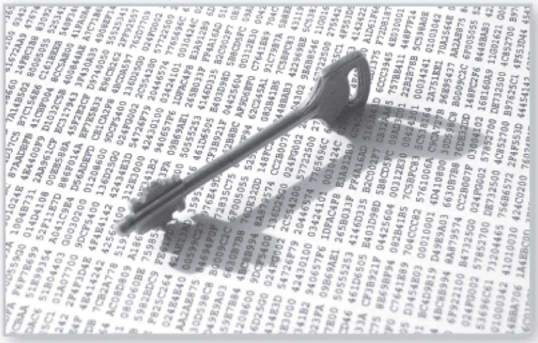
Este libro cuenta, además de con tres capítulos adicionales en CengageBrain, con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles únicamente en inglés y solo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio al cliente.

Al igual que los recursos impresos adicionales, las direcciones de los sitios web señaladas a lo largo del texto, y que se incluyen a modo de referencia, no son administradas por Cengage Learning Latinoamerica, por lo que esta no es responsable de los cambios y actualizaciones de las mismas.

8/1

3 Matrices y determinantes

3.1 Operaciones con matrices
3.2 Propiedades de las operaciones con matrices
3.3 Inversa de una matriz
3.4 Matrices elementales



Encriptación de datos

Dinámica de fluidos computacional

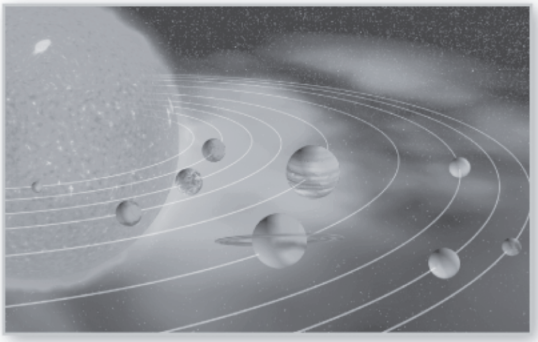
Deflexión de vigas

Recuperación de información

Calendarios de la tripulación de vuelo

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Cousin_Avi/www.shutterstock.com; Goncharuk/www.shutterstock.com; Gunnar Pippel/www.shutterstock.com; © Sean Locke/iStockphoto.com; nostal6ie/www.shutterstock.com

3.5 Determinante de una matriz
3.6 Determinantes y operaciones elementales
3.7 Propiedades de los determinantes
3.8 Adjunta de una matriz y regla de Cramer



Órbitas planetarias

Publicación de libros de texto

Ingeniería y control

Sudoku

Volumen de un sólido

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Orla/www.shutterstock.com; Dirk Ercken/Shutterstock.com; viviamo/www.shutterstock.com; RTimages/Shutterstock.com; rgerhardt/Shutterstock.com

3.1 Operaciones con matrices

- Determinar si dos matrices son iguales.
- Sumar y restar matrices y multiplicar una matriz por un escalar.
- Multiplicar dos matrices.
- Usar matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Particionar una matriz y escribir una combinación lineal de vectores columna.

OPERACIONES CON MATRICES

En la sección 2.2 usted utilizó matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este capítulo introduce algunos fundamentos de teoría de matrices y aplicaciones adicionales de matrices.

Por un acuerdo matemático común, las matrices se pueden representar en alguna de las siguientes tres formas:

1. Una matriz puede denotarse por una letra mayúscula como A, B o C
2. Una matriz puede denotarse por un elemento representativo escrito entre corchetes $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ o $[c_{ij}]$.
3. Una matriz puede denotarse por un arreglo rectangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como se mencionó en la unidad 2, las matrices en este texto son fundamentalmente *matrices reales*. Es decir, sus elementos son números reales.

Decimos que dos matrices son *iguales* si sus elementos correspondientes son iguales.

Definición de la igualdad de matrices

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si tienen el mismo tamaño ($m \times n$) y $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

COMENTARIO

La frase "si y solo si" significa que la expresión es válida en ambas direcciones. Por ejemplo, "*p* si y solo si *q*" quiere decir que *p* implica a *q* y *q* implica a *p*.

EJEMPLO 1 Igualdad de matrices

Considere las cuatro matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B **no** son iguales, ya que tienen diferente tamaño. De manera similar, B y C tampoco lo son. Las matrices A y D son iguales si y solo si $x = 3$.

Una matriz que solo tiene una columna, como la matriz B del ejemplo 1, se denomina **matriz columna** o **vector columna**. De manera similar, una matriz que solo tiene un renglón, como la matriz C del ejemplo 1, se denomina **matriz renglón** o **vector renglón**. A menudo se utilizan letras negritas minúsculas para designar matrices columna o renglón. En este caso, la matriz A del ejemplo 1 puede dividirse en dos matrices columna $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ de la siguiente manera.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right] = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2]$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Usted puede **sumar** dos matrices (del mismo tamaño) sumando sus elementos correspondientes.

Definición de suma de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de tamaño $m \times n$, entonces su **suma** es la matriz de tamaño $m \times n$ dada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

EJEMPLO 2 Suma de matrices

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ no está definida.

COMENTARIO

A menudo es conveniente reescribir una matriz B como cA, factorizando c de cada uno de los elementos de la matriz B. Por ejemplo, el escalar $\frac{1}{2}$ se ha factorizado de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando trabajamos con matrices nos referimos a los números reales como **escalares**. Usted puede multiplicar una matriz A por un escalar c, multiplicando cada elemento de la matriz A por el escalar c.

Definición de la multiplicación por un escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y c es un escalar, entonces el **múltiplo escalar** de A por c es la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$cA = [ca_{ij}]$. Para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Podemos utilizar $-A$ para representar el producto escalar $(-1)A$. Si A y B son del mismo tamaño, entonces $A - B$ representa la suma de A y $(-1)B$. Es decir $A - B = A + (-1)B$.

EJEMPLO 3 Multiplicación por un escalar y resta de matrices

Para las matrices A y B, determine **a)** $3A$, **b)** $-B$ y **c)** $3A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $-B = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $3A - B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La tercera operación básica es la **multiplicación de matrices**. Para ver la utilidad de esta operación, considere la siguiente aplicación, en la cual las matrices son de mucha ayuda para organizar información.

Un estadio de futbol tiene tres áreas concesionadas para locales comerciales, ubicadas en el sur, norte y oeste del mismo. Los artículos más vendidos son los cacahuates, los *hot dogs* y los refrescos. Las ventas para cierto día son registradas en la primera matriz abajo y los precios (en dólares) de los tres artículos aparecen en la segunda.

Número de artículos vendidos

$$\begin{array}{l} \\ \text{Local sur} \\ \text{Local norte} \\ \text{Local oeste} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Cacahuates} & \textit{Hot dogs} & \text{Refrescos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 250 & 305 \\ 207 & 140 & 419 \\ 29 & 120 & 190 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Precio de venta} \\ \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ 2.75 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Cacahuates} \\ \textit{Hot dogs} \\ \text{Sodas} \end{array} \end{array}$$

Para calcular el total de ventas de los tres productos más vendidos en el local sur, multiplique cada elemento en el primer renglón de la matriz de la izquierda por el precio correspondiente en la matriz columna de la derecha y sume los resultados. Las ventas del local sur son

$$(120)(2.00) + (250)(3.00) + (305)(2.75) = \$1828.75 \qquad \text{Ventas local sur}$$

De manera similar, calculamos las ventas de los otros dos locales de la siguiente forma.

$$(207)(2.00) + (140)(3.00) + (419)(2.75) = \$1986.25 \qquad \text{Ventas local norte}$$
$$(29)(2.00) + (120)(3.00) + (190)(2.75) = \$940.50 \qquad \text{Ventas local oeste}$$

Los cálculos anteriores son ejemplos de la multiplicación de matrices. Usted puede escribir el producto de la matriz de 3×3 indicando el número de artículos vendidos y la matriz de 3×1 indicando los precios de venta, de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 120 & 250 & 305 \\ 207 & 140 & 419 \\ 29 & 120 & 190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ 2.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1828.75 \\ 1986.25 \\ 940.50 \end{bmatrix}$$

El producto de estas matrices es la matriz de 3×1, que nos da el total de las ventas por cada uno de los tres locales.

La definición general del producto de dos matrices mostrada abajo, se basa en las ideas recién desarrolladas. A primera vista esta definición puede parecer inusual, no obstante, usted verá más adelante que tiene muchas aplicaciones prácticas.

Definición de la multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y si $B = [b_{ij}]$ es una matriz de tamaño $n \times p$, entonces el **producto** AB es una matriz de tamaño $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Para $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le p$.

Esta definición significa que el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del producto AB se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B y luego sumar los resultados. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

EJEMPLO 4 **Determinación del producto de dos matrices**

Encuentre el producto AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Primero, observe que el producto AB está definido porque el tamaño de A es 3×2 y el de B es 2×2. Además, el producto AB es de tamaño 3×2 y tiene la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Para determinar c_{11} (el elemento en el primer renglón y en la primera columna del producto), multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de A y la primera columna de B. Es decir

$$c_{11} = (-1)(-3) + (3)(-4) = -9$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Similarmente, para determinar c_{12} multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de A y la segunda columna de B para obtener

$$c_{12} = (-1)(2) + (3)(1) = 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Siguiendo este patrón obtenemos los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} c_{21} &= (4)(-3) + (-2)(-4) = -4 \\ c_{22} &= (4)(2) + (-2)(1) = 6 \\ c_{31} &= (5)(-3) + (0)(-4) = -15 \\ c_{32} &= (5)(2) + (0)(1) = 10 \end{aligned}$$

El producto es

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}.$$

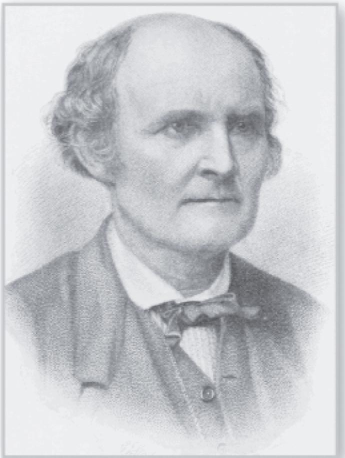
Asegúrese de entender que el producto de dos matrices está definido cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz; es decir,

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B} \quad = \quad \underset{m \times p}{AB}.$$

igual

tamaño de AB

Así, el producto BA de las matrices del ejemplo 4 no está definido.



Arthur Cayley (1821-1895)

El matemático inglés Arthur Cayley es reconocido por proporcionar una definición abstracta de una matriz. Cayley era egresado de la Universidad de Cambridge y era abogado de profesión. Comenzó su revolucionario trabajo en matrices mientras estudiaba la teoría de transformaciones. Cayley también fue fundamental para el desarrollo de los determinantes (mismos que se discuten en el capítulo 3). Se reconoce a Cayley y dos matemáticos estadounidenses, Benjamin Peirce (1809-1880) y su hijo, Charles S. Peirce (1839-1914), por el desarrollo del "álgebra matricial."

Bettmann/CORBIS

8/1

El patrón general de la multiplicación de matrices es el siguiente. Para obtener el elemento del i-ésimo renglón y la j-ésima columna del producto AB, use el i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

DESCUBRIMIENTO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule $A + B$ y $B + A$. ¿La suma de una matriz es conmutativa?
2. Calcule AB y BA. ¿La multiplicación de matrices es conmutativa?

EJEMPLO 5 Multiplicación de matrices

a) $$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}}$$

b) $$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}$$

c) $$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

d) $$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}$$

e) $$\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}}$$

Note la diferencia entre los dos productos en los incisos **d)** y **e)** del ejemplo 5. En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Es decir, casi nunca se cumple que el producto AB sea igual al producto BA. (Véase la sección 2.2 para un análisis más profundo de la no conmutatividad de la multiplicación de matrices.)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una aplicación práctica de la multiplicación de matrices es la representación de un sistema de ecuaciones lineales. Observe cómo el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

puede escribirse como la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son matrices columna.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

EJEMPLO 6 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Resuelva la ecuación matricial $A\mathbf{x} = 0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Como un sistema de ecuaciones lineales, $A\mathbf{x} = 0$ lo representamos como

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada de este sistema, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema tiene un número infinito de soluciones. En este caso, una elección conveniente de parámetro es $x_3 = 7t$, y puede escribir el conjunto solución como

$$x_1 = t, \quad x_2 = 4t, \quad x_3 = 7t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

En términos de matrices, encontramos que la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene un número infinito de soluciones, representado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ 7t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad t \text{ es cualquier escalar.}$$

Esto es, cualquier múltiplo escalar de la matriz columna de la derecha es una solución. A continuación se muestran algunas soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{y} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden ejecutar la suma de matrices, multiplicación escalar y la multiplicación de matrices. Si usted utiliza una aplicación gráfica, sus pantallas para el ejemplo 6 se verán como:

```
[A]
          [[1  -2  1 ]
           [2  3   -2]]
[B]
                 [[1]
                  [4]
                  [7]]
[A]*[B]
                 [[0]
                  [0]]
```

Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas del ejemplo 6 están disponibles en **Online Technology Guide**, college.cengage.com/pic/larsonEL6e.

PARTICIÓN DE MATRICES

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede representarse de una forma más conveniente, dividiendo las matrices A y $\mathbf{x}$ de la siguiente manera. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

son las matrices de coeficientes, la matriz columna de incógnitas y la matriz del lado derecho, respectivamente, del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de tamaño $m \times n$, entonces podemos escribir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

En otras palabras

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las columnas de la matriz A. La expresión

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se llama **combinación lineal** de las matrices columna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ con **coeficientes** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Combinaciones lineales de vectores columna

La matriz producto $A\mathbf{x}$ es una combinación lineal de los vectores columna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ $\mathbf{a}_n$ que forman la matriz de coeficientes A.

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y solo si $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal tal, en la que los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.

EJEMPLO 7 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 6 \end{aligned}$$

puede reescribirse como una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de la siguiente forma

$$x_1\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$$

Aplicando la eliminación gaussiana podemos demostrar que este sistema tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

$$1\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$$

Es decir, $\mathbf{b}$ puede expresarse como una combinación lineal de las columnas de A. Esta representación de un vector columna en función de otros es un tema fundamental del álgebra lineal. ■

El dividir A en columnas y x en renglones, se emplea a menudo para reducir una matriz de tamaño $m \times n$ a matrices más pequeñas. Por ejemplo, la matriz abajo a la izquierda puede dividirse como se muestra en la matriz a la derecha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz también puede dividirse en matrices columna

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

o matrices renglón

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_3\end{bmatrix}.$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Muchas aplicaciones en la vida real de los sistemas lineales involucran enormes cantidades de ecuaciones y variables. Por ejemplo, un problema con los calendarios de la tripulación de vuelo de American Airlines requirió la manipulación de matrices con 837 renglones y más de 12 750 000 columnas. Esta aplicación de *programación lineal* exigía que el problema se dividiera en piezas más pequeñas y después se resolviera en una supercomputadora Cray. *(Fuente: Very Large-Scale Lineal Programming. A Case Study in Combining Interior Point y Simplex Methods, Bixby, Robert E., et al., Operations Research, 40, no. 5)*

© Sean Locke/iStockphoto.com

3.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Igualdad de matrices En los ejercicios 1 a 4, encuentre x e y

1. $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -5 & x \\ y & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices En los ejercicios 5 a 12, determine **a)** $A + B$, **b)** $A - B$, **c)** $2A$, **d)** $2A - B$ y **e)** $B + \frac{1}{2}A$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

13. Encuentre **a)** c_{21} y **b)** c_{13}, donde $C = 2A - 3B$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Encuentre **a)** c_{23} y **b)** c_{32}, donde $C = 5A + 2B$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 11 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

15. Resuelva la ecuación matricial para x, y, y z.

$$4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}.$$

16. Resuelva la ecuación matricial para x, y, z, y w.

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}.$$

Determinación de los productos de dos matrices En los ejercicios 17 a 30, halle **a)** AB y **b)** BA (si están definidas).

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & 13 & 8 & -17 & 20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Tamaño de la matriz En los ejercicios 31 a 38, sean A, B, C, D y E matrices con el tamaño dado.

A: 3 × 4 B: 3 × 4 C: 4 × 2 D: 4 × 2 E: 4 × 3

Si está definida, determine el tamaño de la matriz. Si no lo está, proporcione una explicación.

31. $A + B$

32. $C + E$

33. $\frac{1}{2}D$

34. $-4A$

35. AC

36. BE

37. $E - 2A$

38. $2D + C$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 39 y 40, resuelva la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

39. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 41 a 48, escriba el sistema de ecuaciones lineales en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y resuelva esta ecuación matricial para $\mathbf{x}$.

41. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= -4 \\ 6x_1 + x_2 &= -36 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} -4x_1 + 9x_2 &= -13 \\ x_1 - 3x_2 &= 12 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -20 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2x_2 + 5x_3 &= -16 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 17 \\ x_1 + 3x_2 &= -11 \\ -6x_2 + 5x_3 &= 40 \end{aligned}$

Escriba una combinación lineal En los ejercicios 49 a 52, exprese la matriz columna $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de las columnas de A.

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -22 \\ 4 \\ 32 \end{bmatrix}$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 53 y 54, resuelva la ecuación matricial para A.

53. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 55 y 56, resuelva la ecuación matricial para a, b, c y d.

55. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal Una matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se llama matriz diagonal si todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero. En los ejercicios 57 y 58, encuentre el producto AA para la matriz diagonal dada.

57. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

58. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Determinación de los productos de matrices diagonal En los ejercicios 59 y 60, determine los productos AB y BA para las matrices diagonales.

59. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

60. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

61. Demostración guiada. Pruebe que si A y B son matrices diagonales (del mismo tamaño), entonces $AB = BA$.

Inicio: para demostrar que las matrices AB y BA son iguales, primero necesita demostrar que sus elementos correspondientes son iguales.

i) Empiece su demostración haciendo que $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ sean dos matrices diagonales $n \times n$.

ii) El ij-ésimo elemento del producto AB es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

iii) Evalúe el elemento c_{ij} para los casos en los que $i \neq j$ e $i = j$.

iv) Repita este análisis para el producto BA.

62. Escriba Sean A y B matrices de 3×3, donde A es diagonal.

a) Describa el producto AB. Ilustre su respuesta con ejemplos.

b) Describa el producto BA. Ilustre su respuesta con ejemplos.

c) ¿Cómo cambian los resultados de los incisos **a)** y **b)** si los elementos de la diagonal de A son iguales?

Traza de una matriz En los ejercicios 63 a 66, determine la traza de la matriz. La traza de una matriz A de $n \times n$ es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

63. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **64.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **66.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

67. Prueba Demuestre que cada una de las expresiones es verdadera si A y B son matrices cuadradas de tamaño n y c es un escalar.

$\mathbf{Tr}(A + B) = \mathbf{Tr}(A) + \mathbf{Tr}(B)$

$\mathbf{Tr}(cA)c\mathbf{Tr}(A)$

68. Prueba Demuestre que si A y B son matrices cuadradas de tamaño n, entonces $\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA)$.

69. Determine las condiciones en w, x, y y z tales que $AB = BA$ en las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

70. Verifique $AB = BA$ para las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} \text{Cos}\,\alpha & -\text{Sen}\,\alpha \\ \text{Sen}\,\alpha & \text{Cos}\,\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \text{Cos}\,\beta & -\text{Sen}\,\beta \\ \text{Sen}\,\beta & \text{Cos}\,\beta \end{bmatrix}$$

71. Demuestre que la ecuación matricial no tiene solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

72. Demuestre que no existen matrices de 2×2 que satisfagan la ecuación matricial

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

73. Exploración Sea $i = \sqrt{-1}$ y sea

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine A^2, A^3 y A^4. (*Nota:* $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2A$, etc.) Identifique cualquier similitud entre i^2, i^3 e i^4.

b) Determine e identifique B^2.

74. Demostración guiada. Pruebe que si el producto AB es una matriz cuadrada, entonces el producto BA está definido.

Inicio: para probar que el producto BA está definido, necesita demostrar que el número de columnas de B es igual al número de renglones de A.

i) Comience su demostración haciendo notar que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

ii) Después usted puede suponer que A es de tamaño $m \times n$ y B es de tamaño $n \times p$.

iii) Utilice la hipótesis de que el producto AB es una matriz cuadrada.

75. Prueba Demuestre que si ambos productos: AB y BA están definidos, entonces AB y BA son matrices cuadradas.

76. Sean A y B dos matrices tales que el producto AB está definido. Demuestre que si A tiene dos renglones idénticos, entonces los dos renglones correspondientes AB también son idénticos.

77. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si el i-ésimo renglón de A tiene todos sus elementos iguales a cero, entonces el i-ésimo renglón de AB tiene todos sus elementos iguales a cero. Proporcione un ejemplo utilizando matrices de 2×2 para demostrar que la conversión es falsa.

78. REMATE Sean A y B matrices de tamaño 3×2 y 2×2, respectivamente. Responda las siguientes preguntas y explique su razonamiento.

a) ¿Es posible que $A = B$?

b) ¿$A + B$ está definido?

c) ¿AB está definido? Si es así, ¿es posible que $AB = BA$?

79. Agricultura Un agricultor tiene dos cosechas de fruta, manzanas y peras. Cada una de estas cosechas es enviada a tres diferentes mercados. El número de unidades de la cosecha i que es enviada al mercado j se representa por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{bmatrix}$$

La ganancia por unidad es representada por la matriz $B = [\$3.50 \quad \$6.00]$

Determine el producto BA y explique qué representa cada elemento de este producto.

80. Manufactura Una corporación tiene tres fábricas, cada una de las cuales produce guitarras acústicas y guitarras eléctricas. El número de guitarras del tipo i producidas en la fábrica j en un día se representa por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}$$

Determine los niveles de producción de cada fábrica, si la producción se incrementa 20 por ciento.

81. Política La matriz

$$\begin{array}{c c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \mathrm{D} & \mathrm{I} \end{array}}^{\text{De}} \\ P = & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{c} \mathrm{R} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{I} \end{array}\right\} \mathrm{A} \end{array}$$

representa la proporción de votantes que cambió del partido i al partido j en una elección dada. Es decir, p_{ij} $(i \neq j)$ representa la proporción de votantes que cambiaron del partido i al partido j y p_{ii} representa la proporción que permanece leal al partido i de una elección a la siguiente. Determine el producto de P consigo mismo. ¿Qué representa este producto?

82. Población Las matrices muestran la población (en miles de personas) que vivía en diferentes regiones de Estados Unidos en 2009 y la población (en miles de personas) estimada que vivirá en estas regiones en 2015. Las poblaciones regionales se separaron en tres categorías de edad. (*Fuente:* U.S. Census Bureau)

2009

$$\begin{array}{l} \\ \text{Noreste} \\ \text{Medio oeste} \\ \text{Sur} \\ \text{Montaña} \\ \text{Pacífico} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0\text{–}17 & 18\text{–}64 & 65+ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12{,}399 & 35{,}137 & 7747 \\ 16{,}047 & 41{,}902 & 8888 \\ 27{,}959 & 70{,}571 & 14{,}608 \\ 5791 & 13{,}716 & 2616 \\ 12{,}352 & 31{,}381 & 5712 \end{bmatrix} \end{array}$$

2015

$$\begin{array}{l} \\ \text{Noreste} \\ \text{Medio oeste} \\ \text{Sur} \\ \text{Montaña} \\ \text{Pacífico} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0\text{–}17 & 18\text{–}64 & 65+ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12{,}441 & 35{,}289 & 8835 \\ 16{,}363 & 42{,}250 & 9955 \\ 29{,}373 & 73{,}496 & 17{,}572 \\ 6015 & 14{,}231 & 3337 \\ 12{,}826 & 33{,}292 & 7086 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) La población total en 2009 fue 307 000 000 y la población total estimada para 2015 fue 322 000 000. Reescriba las matrices para obtener la información como porcentajes de la población total.

b) Escriba una matriz que proporcione los porcentajes en cambios estimados de población por regiones y por grupos de edad de 2009 a 2015.

c) Basado en el resultado del inciso **b)**, ¿qué grupo(s) de edad se estima mostrará(n) un crecimiento relativo de 2009 a 2015?

Multiplicación por bloques En los ejercicios 83 y 84, ejecute la multiplicación por bloques indicada de las matrices A y B. Si las matrices A y B se dividen en cuatro submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

entonces puede multiplicar por bloques A y B, asignando el tamaño de las submatrices para las cuales la suma y la multiplicación están definidas.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

83. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

84. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right]$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85 y 86 determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, dé una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que demuestre que la expresión no es válida para todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

85. a) Para que el producto de dos matrices esté definido, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda matriz.

b) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y solo si $\mathbf{b}$ puede ser expresada como una combinación lineal, donde los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.

86. a) Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times r$, entonces el producto AB es una matriz de $m \times r$.

b) La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son las matrices columna, puede utilizarse para representar un sistema de ecuaciones lineales.

87. Las columnas de la matriz T muestran las coordenadas de los vértices de un triángulo. La matriz A es una matriz de transformación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre AT y AAT. Después dibuje el triángulo original y los dos triángulos transformados. ¿Qué transformación representa A?

b) Un triángulo está determinado por AAT. Describa el proceso de transformación que produce el triángulo determinado por AT y luego el triángulo determinado por T.

3.2 Propiedades de las operaciones con matrices

- Usar las propiedades de la suma de matrices, multiplicación escalar y matrices cero.
- Usar las propiedades de multiplicación de matrices y matriz identidad.
- Encontrar la transpuesta de una matriz.

ÁLGEBRA DE MATRICES

En la sección 3.1 su atención se centró en la mecánica de las tres operaciones básicas con matrices: suma de matrices, multiplicación escalar y multiplicación de matrices. Esta sección comienza con el desarrollo del **álgebra de matrices**. Observará que esta álgebra comparte muchas (pero no todas) de las propiedades del álgebra de los números reales. Enseguida aparece una lista de algunas propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar.

TEOREMA 3.1 Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación por un escalar

Si A, B y C son matrices de $m \times n$; c, d, 1, escalares, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A + B = B + A$ Propiedad conmutativa de la suma
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ Propiedad asociativa de la suma
3. $(cd)A = c(dA)$ Propiedad asociativa de la multiplicación de escalares
4. $1A = A$ Identidad multiplicativa
5. $c(A + B) = cA + cB$ Propiedad distributiva izquierda
6. $(c + d)A = cA + dA$ Propiedad distributiva derecha

DEMOSTRACIÓN

La demostración de estas seis propiedades se concluyen directamente a partir de las definiciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, así como de las propiedades correspondientes a los números reales. Por ejemplo, para demostrar la propiedad conmutativa de la *suma de matrices*, sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Entonces, aplicando la propiedad conmutativa de la *suma de números reales*, escribimos

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A.$$

De igual forma, para demostrar la propiedad 5, aplicamos la propiedad distributiva (de los números reales) de la multiplicación sobre la suma, para escribir

$$c(A + B) = [c(a_{ij} + b_{ij})] = [ca_{ij} + cb_{ij}] = cA + cB.$$

Las demostraciones de las cuatro propiedades restantes se dejan como ejercicios (véase los ejercicios 57 a 60). ■

En la sección anterior, la suma de matrices se definió como la suma de *dos* matrices, haciéndola así una operación binaria. La propiedad asociativa de la suma de matrices ahora permite escribir expresiones como $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$. Este mismo razonamiento se aplica a la suma de cuatro o más matrices.

EJEMPLO 1 **Suma de más de dos matrices**

Sumando los elementos correspondientes, podemos obtener la siguiente suma de cuatro matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ■

Una propiedad importante de la suma de números reales es que el número 0 sirve como la identidad aditiva. Esto es, $c + 0 = c$ para cualquier número real c. Para las matrices se cumple una propiedad semejante. Específicamente, si A es una matriz de $m \times n$ y 0_{mn} es la matriz de $m \times n$ consistente únicamente de ceros, entonces $A + 0_{mn} = A$. La matriz 0_{mn} se denomina **matriz cero** y sirve como la **identidad aditiva** para el conjunto de todas las matrices de $m \times n$. Por ejemplo, la siguiente matriz funciona como la identidad aditiva para el conjunto de todas las matrices de 2×3.

$$0_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando se sobreentiende el tamaño de la matriz, las matrices cero pueden denotarse simplemente por **0**.

Las siguientes propiedades de las matrices cero son fáciles de probar, por lo que sus demostraciones se dejan como ejercicio. (Véase ejercicio 61.)

COMENTARIO

La propiedad 2 puede describirse diciendo que la matriz $-A$ es el **inverso aditivo** de A.

TEOREMA 3.2 Propiedades de las matrices cero

Si A es una matriz de $m \times n$ y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A + 0_{mn} = A$
2. $A + (-A) = 0_{mn}$
3. Si $cA = 0_{mn}$, entonces $c = 0$ o $A = 0_{mn}$

El álgebra de los números reales y el álgebra de matrices tienen numerosas similitudes. Por ejemplo, compare las siguientes soluciones.

Números reales (resolver para x)	Matrices de $m \times n$ (resolver para X)
$+ \quad =$	$X + A = B$
$x + a + (-a) = b + (-a)$	$X + A + (-A) = B + (-A)$
$x + 0 = b - a$	$X + 0 = B - A$
$x = b - a$	$X = B - A$

El proceso de resolución de una ecuación matricial se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación matricial

Resuelva para X en la ecuación $3X + A = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Empecemos por resolver la ecuación para X, para obtener

$$\begin{aligned} 3X &= B - A \\ X &= \tfrac{1}{3}(B - A). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando las matrices dadas tiene

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

COMENTARIO

Observe que la propiedad conmutativa para la multiplicación de matrices no está en la lista que aparece en el teorema 3.3. Aunque el producto *AB* está definido, podemos ver fácilmente que *A* y *B* no tienen el tamaño adecuado que defina el producto *BA*. Por ejemplo, si *A* es de tamaño 2×3 y *B* es de 3×3, entonces el producto *AB* está definido, no así el producto *BA*. El siguiente ejemplo muestra que incluso si los productos *AB* y *BA* están definidos, estos pueden no ser iguales.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En el siguiente teorema, el álgebra de matrices se extiende para incluir algunas propiedades más utilizadas de la multiplicación de matrices. La demostración de la propiedad 2 se presenta abajo. Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicio. (Véase el ejercicio 62.)

TEOREMA 3.3 Propiedades de la multiplicación de matrices

Si A, B y C son matrices (con tamaños tales que los productos matriciales dados están definidos) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A(BC) = (AB)C$ — Propiedad asociativa de la multiplicación
2. $A(B + C) = AB + AC$ — Propiedad distributiva izquierda
3. $(A + B)C = AC + BC$ — Propiedad distributiva derecha
4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 2, muestre que las matrices $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales. Suponga que A es de tamaño $m \times n$, B es de tamaño $n \times p$ y C es de tamaño $n \times p$. Aplicando la definición de la multiplicación de matrices, el elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de

$A(B + C)$ es $a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj})$.

Además, el elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $AB + AC$ es

$$(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{in}c_{nj}).$$

Distribuyendo y reagrupando, puede ver que estos dos ij-ésimos elementos son iguales. Así

$$A(B + C) = AB + AC.$$

La propiedad asociativa de la multiplicación de matrices le permite escribir estos productos matriciales como ABC sin ambigüedad, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 La multiplicación de matrices es asociativa

Determine el producto matricial ABC agrupando primero los factores como $(AB)C$ y luego como $A(BC)$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado con ambos procesos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Agrupando los factores como $(AB)C$, obtiene

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Agrupando los factores como $A(BC)$, obtiene el mismo resultado

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

El siguiente ejemplo muestra que aun cuando los productos de AB y BA estén definidos, podrían no ser iguales.

EJEMPLO 4 La multiplicación de matrices no es conmutativa

Demuestre que AB y BA no son iguales para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

A partir del ejemplo 4 no podemos concluir que los productos matriciales AB y BA *nunca* son iguales. Algunas veces sí lo son. Por ejemplo, intente multiplicar las siguientes matrices, primero en el orden AB y después del modo BA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Usted puede ver que los dos productos son iguales. El punto es este: aunque AB y BA son en ocasiones iguales, a menudo no lo son.

Otra cualidad importante del álgebra matricial es que no existe la propiedad de cancelación para la multiplicación de matrices. Es decir, si $AC = BC$, no es necesariamente cierto que $A = B$. Esto se demuestra en el ejemplo 5. (En la siguiente sección verá que, para algunos tipos especiales de matrices, la cancelación es válida.)

EJEMPLO 5 Ejemplo en el cual la cancelación no es válida

Demuestre que $AC = BC$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$AC = BC$, aun cuando $A \neq B$.

Ahora verá un tipo especial de matriz cuadrada que tiene números 1 en la diagonal principal y números 0 en otro lugar.

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

Por ejemplo, si $n = 1$, 2 o 3, tenemos

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando se sobreentienda que el orden de la matriz es n, puede denotar I_n simplemente como I.

Como se establece en el teorema 3.4, en la siguiente página, la matriz I_n sirve como identidad para la multiplicación de matrices; recibe el nombre de **matriz identidad de orden n**. La demostración de este teorema se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 63.)

COMENTARIO

Observe que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $AI_n = I_nA = A$.

TEOREMA 3.4 Propiedades de la matriz identidad

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces estas propiedades son verdaderas.

1. $AI_n = A$ **2.** $I_mA = A$

EJEMPLO 6 Multiplicación por una matriz identidad

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Para la multiplicación repetida de matrices cuadradas, puede utilizar la misma notación exponencial usada con los números reales. Es decir, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, y para un entero positivo k, A^k es

$$A^k = \underbrace{AA \cdot \cdot \cdot A}_{k \text{ factores}}.$$

También esto es conveniente para definir $A^0 = I_n$ (donde A es una matriz cuadrada de orden n). Estas definiciones nos permiten establecer las propiedades (1) $A^jA^k = A^{j+k}$ y (2) $(A^j)^k = A^{jk}$ donde j y k son enteros no negativos.

EJEMPLO 7 Multiplicación repetida de una matriz cuadrada

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

En la sección 2.1 usted vio que un sistema de ecuaciones lineales debe tener exactamente una solución, un número infinito de soluciones o bien, no tiene solución. Aplicando el álgebra matricial desarrollada antes, ahora puede demostrar que esto es cierto.

TEOREMA 3.5 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales en n variables, precisamente una de las siguientes declaraciones es verdadera.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema tiene un número infinito de soluciones.
3. El sistema no tiene solución.

DEMOSTRACIÓN

Represente el sistema por la matriz $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si el sistema tiene exactamente una solución o no tiene solución, entonces no hay nada que demostrar. Así, puede suponer que el sistema tiene al menos dos soluciones diferentes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. La demostración puede completarse si usted demuestra que esta suposición implica que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Como $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones, tiene que $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ y $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$. Esto implica que la columna de la matriz distinta de cero $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = 0$. Con esto podemos decir que para cualquier escalar c,

$$A(\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_1 + A(c\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + c(A\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + c0 = \mathbf{b}.$$

Así que $\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier escalar c. Debido a que hay un número infinito de valores posibles de c y cada valor genera una solución diferente, puede concluir que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

DESCUBRIMIENTO

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y

$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calcule $(AB)^T$, A^TB^T y B^TA^T.
2. Haga una conjetura sobre la transpuesta del producto de dos matrices cuadradas.
3. Seleccione otras dos matrices cuadradas para verificar su conjetura.

COMENTARIO

Advierta que la matriz cuadrada en el inciso **c)** del ejemplo 8 es igual a su transpuesta. Esta matriz se denomina **simétrica**. Una matriz A es simétrica si $A = A^T$. Partiendo de esta definición, es evidente que una matriz simétrica debe ser cuadrada. Además, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz simétrica, entonces $a_{ij} = a_{ji}$ para toda $i \neq j$.

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La **transpuesta** de una matriz se forma al escribir sus columnas como renglones. Por ejemplo, si A es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tamaño: $m \times n$

entonces la transpuesta, denotada por A^T, es la matriz de $n \times m$ de abajo

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tamaño: $n \times m$

EJEMPLO 8 Transpuesta de una matriz

Encuentre la transpuesta de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$ **b)** $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

c) $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $D^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

TEOREMA 3.6 Propiedades de la transpuesta

Si A y B son matrices (de tamaño tal que las operaciones con matrices dadas están definidas) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $(A^T)^T = A$ Transpuesta de la transpuesta
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ Transpuesta de una suma
3. $(cA)^T = c(A^T)$ Transpuesta de la multiplicación por un escalar
4. $(AB)^T = B^TA^T$ Transpuesta de un producto

DEMOSTRACIÓN

Debido a que con la transposición de una matriz se intercambian renglones y columnas, la propiedad 1 parece tener sentido. Para demostrar la propiedad 1, sea A una matriz de $m \times n$. Observe que A^T tiene el tamaño $n \times m$ y $(A^T)^T$ es de $m \times n$, igual que A. Para demostrar que $(A^T)^T = A$ usted debe demostrar que el ij-ésimo elemento es el mismo. Sea a_{ij} el ij-ésimo elemento de A. Entonces a_{ij} es el ji-ésimo elemento de A^T y el ij-ésimo elemento de $(A^T)^T$. Esto demuestra la propiedad 1. La demostración de las demás propiedades se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 64.)

COMENTARIO

Recuerde que debe *invertir el orden* de la multiplicación al formar la transpuesta de un producto. Es decir, la transpuesta de AB es $(AB)^T = B^TA^T$ y normalmente *no* es igual a A^TB^T.

Las propiedades 2 y 4 pueden generalizarse para abarcar sumas o productos de cualquier número finito de matrices. Por ejemplo, la transpuesta de la suma de tres matrices es

$$(A + B + C)^T = A^T + B^T + C^T$$

y la transpuesta del producto de tres matrices es

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T.$$

EJEMPLO 9 Transpuesta de un producto

Demuestre que $(AB)^{\mathrm{T}}$ y B^TA^T son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = B^TA^T$$

EJEMPLO 10 Producto de una matriz y su transpuesta

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, encuentre el producto AA^T y demuestre que es simétrico.

COMENTARIO

La propiedad demostrada en el ejemplo 10 es generalmente cierta. Es decir, para toda matriz A, la matriz AA^T es simétrica. La matriz A^TA también es simétrica. Se le pedirá que demuestre estos resultados en el ejercicio 65.

SOLUCIÓN

Debido a que $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -5 \\ -6 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

se tiene que $AA^T = (AA^T)^T$, así que AA^T es simétrica.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los sistemas de recuperación de información como los sistemas de búsqueda de internet utilizan una teoría de matrices y álgebra lineal para llevar el registro de, por ejemplo, palabras clave que ocurren en una base de datos. Para ilustrar con un ejemplo simplificado, suponga que usted quisiera realizar una búsqueda en algunas de las palabras clave m disponibles en una base de datos de documentos n. Usted puede representar la búsqueda con la matriz columna de $\mathbf{x}$ $m \times 1$, en la cual un 1 representa una palabra clave que usted está buscando y 0 representa una palabra clave que no está buscando. Usted puede representar las apariciones de las palabras clave m en los documentos n con A, una matriz $m \times n$ en la cual una entrada es 1 si la palabra clave ocurre en el documento y 0 si no ocurre en el documento. Entonces, la matriz producto $A^T\mathbf{x}$ de $n \times 1$ representaría el número de palabras clave en su búsqueda que ocurren en cada uno de los documentos n.

3.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Evaluación de una expresión En los ejercicios 1 a 6, evalúe la expresión.

1. $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $4\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right)$

4. $\frac{1}{2}([5 \quad -2 \quad 4 \quad 0] + [14 \quad 6 \quad -18 \quad 9])$

5. $-3\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right) - 2\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

6. $-\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -2 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\right)$

Operaciones con matrices En los ejercicios 7 a 12, realice las operaciones indicadas cuando $a = 3$, $b = -4$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. $aA + bB$ **8.** $A + B$

9. $ab(B)$ **10.** $(a + b)B$

11. $(a - b)(A - B)$ **12.** $(ab)0$

13. Resuelva para X cuando

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) $3X + 2A = B$ **b)** $2A - 5B = 3X$

c) $X - 3A + 2B = 0$ **d)** $6X - 4A - 3B = 0$

14. Resuelva para X cuando

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) $X = 3A - 2B$ **b)** $2X = 2A - B$

c) $2X + 3A = B$ **d)** $2A + 4B = -2X$

Operaciones con matrices En los ejercicios 15 a 20, realice las operaciones indicadas siempre que $c = -2$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. $B(CA)$ **16.** $C(BC)$

17. $(B + C)A$ **18.** $B(C + O)$

19. $(cB)(C + C)$ **20.** $B(cA)$

Asociatividad de la multiplicación de matrices En los ejercicios 21 y 22, encuentre la matriz producto ABC al **a)** agrupar los factores como $(AB)C$ y **b)** agrupar los factores como $A(BC)$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado de ambos procesos.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

No conmutatividad de multiplicación de matrices En los ejercicios 23 y 24, muestre que AB y BA no son iguales para las matrices dadas.

23. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Productos de matrices iguales En los ejercicios 25 y 26, muestre que $AC = BC$ a pesar de que $A \neq B$

25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Producto de matriz cero En los ejercicios 27 y 28, demuestre que si $AB = 0$, aunque $A \neq 0$ o $B \neq 0$.

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices En los ejercicios 29 a 34, realice las operaciones indicadas cuando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

29. IA **30.** AI

31. $A(I + A)$ **32.** $A + IA$

33. A^2 **34.** A^4

Escriba En los ejercicios 35 y 36, explique por qué la fórmula no es válida para matrices. Ilustre su razonamiento con ejemplos.

35. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

36. $(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$

Encontrando la transpuesta de una matriz En los ejercicios 37 y 38, encuentre la transpuesta de la matriz.

37. $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ **38.** $D = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 19 \\ -7 & 0 & 23 \\ 19 & 23 & -32 \end{bmatrix}$

Encontrando de la transpuesta del producto de dos matrices En los ejercicios 39 a 42, verifique que $(AB)^T = B^TA^T$.

39. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Multiplicación con la transpuesta de una matriz En los ejercicios 43 a 46, encuentre **a)** A^TA y **b)** AA^T. Muestre que cada uno de estos productos es simétrico.

43. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 14 & -2 & 12 & -9 \\ 6 & 8 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 47 y 48, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

47. a) La suma de matrices es conmutativa.

b) La multiplicación de matrices es asociativa.

c) La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de sus transpuestas. Es decir, $(AB)^T = A^TB^T$.

d) Para toda matriz C, la matriz CC^T es simétrica.

48. a) La multiplicación de matrices es conmutativa.

b) Toda matriz A tiene inversa aditiva.

c) Si las matrices A, B y C satisfacen $AB = AC$, entonces $B = C$.

d) La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus transpuestas.

49. Considere las siguientes matrices.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine escalares a y b tales que $Z = aX + bY$.

b) Demuestre que no existen escalares a y b tales que $W = aX + bY$

c) Demuestre que si $aX + bY + cW = 0$, entonces $a = b = c = 0$.

d) Determine escalares a, b y c, no todos iguales a cero, tales que $aX + bY + cZ = 0$.

50. REMATE En la ecuación matricial

$$aX + A(bB) = b(AB + IB)$$

X, A, B e I son matrices cuadradas, y a y b son escalares distintos de cero. Justifique cada paso en la solución dada a continuación.

$$\begin{aligned} aX + (Ab)B &= b(AB + B) \\ aX + bAB &= bAB + bB \\ aX + bAB + (-bAB) &= bAB + bB + (-bAB) \\ aX &= bAB + bB + (-bAB) \\ aX &= bAB + (-bAB) + bB \\ aX &= bB \\ X &= \frac{b}{a}B \end{aligned}$$

Determinación de una potencia de una matriz En los ejercicios 51 y 52, calcule la potencia de A para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

51. A^{19} **52.** A^{20}

Determinación de la *n*-ésima raíz de una matriz Una raíz n-ésima de una matriz B es una matriz A tal que $A^n = B$. En los ejercicios 53 y 54, encuentre la raíz n-ésima de la matriz B.

53. $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad n = 2$

54. $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}, \quad n = 3$

Función polinomial En los ejercicios 55 y 56, use la definición dada para determinar $f(A)$: si f es la función polinomial.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$,

entonces para una matriz A de $n \times n$, $f(A)$ está definida así

$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$.

55. $f(x) = x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

56. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

57. Demostración guiada Demuestre la propiedad asociativa de la suma de matrices: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Inicio: para probar que $A + (B + C)$ y $(A + B) + C$ son iguales, demuestre que sus elementos correspondientes son iguales.

i) Comience su demostración haciendo que A, B y C sean matrices de $m \times n$.

ii) Observe que el ij-ésimo elemento de $B + C$ es $b_{ij} + c_{ij}$.

iii) Además, el ij-ésimo elemento de $A + (B + C)$ es $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$.

iv) Determine el ij-ésimo elemento de $(A + B) + C$.

58. Prueba Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación escalar: $(cd)A = c(dA)$

59. Prueba Demuestre que el escalar 1 es la identidad para la multiplicación por un escalar: $1A = A$

60. Prueba Demuestre la siguiente propiedad distributiva: $(c + d)A = cA + dA$.

61. Prueba Demuestre el teorema 3.2.

62. Prueba Complete la demostración del teorema 3.3.

a) Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación: $A(BC) = (AB)C$

b) Demuestre la propiedad distributiva: $(A + B)C = AC + BC$

c) Demuestre la propiedad: $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

63. Prueba Demuestre el teorema 3.4

64. Prueba Demuestre las propiedades 2, 3 y 4 del teorema 3.6.

65. Demostración guiada Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$, entonces AA^T y A^TA son matrices simétricas.

Inicio: para demostrar que AA^T es simétrica es necesario que demuestre que es igual a su transpuesta, $(AA^T)^T = AA^T$.

i) Comience su demostración con la expresión matricial del lado izquierdo $(AA^T)^T$.

ii) Aplique las propiedades de la transpuesta de un matriz para demostrar que se puede simplificar e igualar con la expresión del lado derecho, AA^T.

iii) Repita este análisis para el producto A^TA.

66. Prueba Sean A y B dos matrices simétricas de $n \times n$.

a) Proporcione un ejemplo que muestre que el producto AB no necesariamente es simétrico.

b) Demuestre que AB es simétrica si y solo si $AB = BA$.

Matrices simétricas y cuasi-simétricas Una matriz cuadrada es denominada cuasi–simétrica si $A^T = -A$. En los ejercicios 67 a 70, determine cuál de las matrices es simétrica, cuasi-simétrica o ninguna de las dos.

67. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

68. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

69. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

70. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

71. Prueba Demuestre que la diagonal principal de una matriz cuasi-simétrica consiste únicamente de ceros.

72. Prueba Demuestre que si A y B son dos matrices cuasi-simétricas de $n \times n$, entonces $A + B$ es cuasi-simétrica.

73. Prueba Sea A una matriz cuadrada de orden n.

a) Demuestre que $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica.

b) Demuestre que $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es cuasi-simétrica.

c) Demuestre que A puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica B y una matriz cuasi-simétrica C, $A = B + C$.

d) Escriba la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

como la suma de una matriz cuasi-simétrica y una matriz simétrica.

74. Prueba Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$, entonces $A - A^T$ es cuasi-simétrica.

75. Considere matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Escriba una matriz de 2×2 y otra de 3×3 en la forma de A.

b) Utilice una aplicación gráfica o un software computacional para elevar cada una de las matrices a potencias más altas. Describa el resultado.

c) Utilice el resultado del inciso **b)** para hacer una conjetura sobre las potencias de A si A es una matriz de 4×4. Use una aplicación gráfica para verificar su conjetura.

d) Utilice los resultados de los incisos **b)** y **c)** para hacer una conjetura sobre las potencias de A si A es una matriz de $n \times n$.

3.3 Inversa de una matriz

- Encontrar la inversa de una matriz (si existe).
- Usar las propiedades de matrices inversas.
- Usar una matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

MATRICES Y SUS INVERSAS

La sección 3.2 analizó algunas de las semejanzas entre el álgebra de los números reales y el álgebra de matrices. Esta sección también desarrolla el álgebra de matrices para incluir las soluciones de ecuaciones matriciales que implican la multiplicación de matrices. Para empezar, considere la ecuación con números reales $ax = b$. Para resolver esta ecuación para x, multiplique ambos lados de la ecuación por a^{-1} (siempre que $a \neq 0$).

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

El número a^{-1} se denomina *inverso multiplicativo* de a, ya que $a^{-1}a$ da como resultado 1 (elemento identidad para la multiplicación). La definición del inverso multiplicativo de una matriz es similar.

Definición de la inversa de una matriz

Una matriz A de $n \times n$ es **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. La matriz B se denomina **inversa** (multiplicativa) de A. La matriz A que no tiene una inversa se denomina **no invertible** (o **singular**).

Las *matrices no cuadradas no tienen inversas*. Para ver esto, advierta que si A es de tamaño $m \times n$ y B es de tamaño $n \times m$ (donde $m \neq n$), entonces los productos AB y BA son de tamaño diferente y no pueden ser iguales entre sí. Efectivamente, no todas las matrices cuadradas poseen inversa. (Véase el ejemplo 4.) El siguiente teorema, sin embargo, nos dice que si una matriz tiene inversa, entonces esta es única.

TEOREMA 3.7 Unicidad de la inversa de una matriz

Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de A se denota por A^{-1}.

DEMOSTRACIÓN

Ya que A es invertible, sabemos que al menos tiene una inversa B tal que

$$AB = I = BA.$$

Suponga que A tiene otra inversa C tal que

$$AC = I = CA.$$

Entonces usted puede demostrar que B y C son iguales, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} AB &= I \\ C(AB) &= CI \\ (CA)B &= C \\ IB &= C \\ B &= C \end{aligned}$$

En consecuencia, $B = C$ y tenemos que la inversa de una matriz es única.

Debido a que la inversa A^{-1} de una matriz invertible A es única, podemos denominarla como la inversa de A y escribimos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

COMENTARIO

Recuerde que no siempre es verdad que $AB = BA$, incluso si ambos productos están definidos. Si A y B son matrices cuadradas y $AB = I_n$, entonces puede demostrar que $BA = I_n$. Aunque se omite la demostración de este hecho, esto implica que en el ejemplo 1 usted solo necesita verificar que $AB = I_2$.

Demuestre que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Usando la definición de matriz inversa, puede ver que B es la inversa de A para demostrar que $AB = I = BA$, de la siguiente manera

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar un sistema de ecuaciones para determinar la inversa de una matriz.

EJEMPLO 2 Encontrar la inversa de una matriz

Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Para determinar la inversa de A, resuelva la ecuación matricial $AX = I$ para X.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, igualando los elementos correspondientes, obtiene los dos sistemas de ecuaciones que se muestran

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el primer sistema, tenemos que la primera columna de X es $x_{11} = -3$ y $x_{21} = 1$. De manera similar, resolviendo el segundo sistema, tenemos que la segunda columna de X es $x_{12} = -4$ y $x_{22} = 1$. La inversa de A es

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilice la multiplicación de matrices para verificar este resultado.

La generalización del método aplicado para resolver el ejemplo 2 proporciona un procedimiento conveniente para encontrar la inversa. Primero observe que los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

tienen la *misma matriz de coeficientes*. En lugar de resolver los dos sistemas representados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

separadamente, puede hacerlo de manera simultánea. Usted puede hacer esto **adjuntando** la matriz identidad a la matriz de coeficientes para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, puede resolver *ambos* sistemas con un sencillo proceso de eliminación, como el siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 + (-4)R_2 \rightarrow R_1$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz "doblemente aumentada" $[A \quad I]$, usted obtiene la matriz $[I \quad A^{-1}]$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A \qquad\quad I} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{I \qquad\quad A^{-1}}$$

Este procedimiento (o algoritmo) funciona para una matriz arbitraria de $n \times n$. Si A no puede reducirse por renglones a I_n, entonces A es no invertible (o singular). Este procedimiento se justificará formalmente en la siguiente sección, después de exponer el concepto de matriz elemental. Por el momento, el algoritmo se resume de la siguiente manera.

Determinación de la inversa de una matriz por eliminación de Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. Escriba la matriz de $n \times 2n$, que consta de la matriz A dada a la izquierda y la matriz identidad I de $n \times n$ a la derecha para obtener $[A \quad I]$. Observe que las matrices A e I están separadas por una línea punteada. Este proceso se denomina **adjuntar** la matriz I a la matriz A.
2. Si es posible, reduzca por renglones A a I utilizando operaciones elementales por renglones en toda la matriz $[A \quad I]$ con la idea de obtener la matriz $[I \quad A^{-1}]$. Si esto no es posible, entonces A es no invertible (singular).
3. Verifique su trabajo multiplicando por AA^{-1} y A^{-1} para ver que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Recuerde la Ley de Hooke, que dice que para deformaciones relativamente pequeñas de un objeto elástico, la cantidad de deflexión es directamente proporcional a la fuerza que causa la deformación. En una viga elástica soportada de manera simple, sujeta a múltiples fuerzas, la deflexión **d** se relaciona con la fuerza **w** por la ecuación matricial

$$\mathbf{d} = F\mathbf{w}$$

donde F es una matriz de flexibilidad cuyas entradas dependen del material de la viga. La inversa de la matriz de flexibilidad, F^{-1}, se denomina la matriz de rigidez. En los ejercicios 61 y 62, se le pedirá que encuentre la matriz de rigidez F^{-1} y la matriz de fuerza **w** para un conjunto dado de matrices de flexibilidad y deflexión.

nostal6ie/www.shutterstock.com

EJEMPLO 3 **Encontrar la inversa de una matriz**

Determine la inversa de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Empiece adjuntando la matriz identidad a A para formar la matriz

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, utilizando operaciones elementales por renglones, reescriba esta matriz en la forma

$$[I \quad A^{-1}]$$

de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + (-1)R_1 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (6)R_1 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (4)R_2 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad (-1)R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + R_3 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 + R_2 \to R_1$$

La matriz A es invertible y esta inversa es

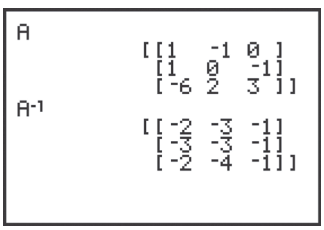
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Confirme esto demostrando que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ &= A^{-1}A. \end{aligned}$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de computadora pueden calcular la inversa de una matriz cuadrada. Si usted usa una aplicación gráfica, las pantallas para el ejemplo 3 se verán como las mostradas más abajo. Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas aplicables al ejemplo 3 se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*.



El proceso mostrado en el ejemplo 3 se aplica a cualquier matriz de $n \times n$ y permite hallar la inversa de la matriz A, si es posible. Si la matriz A no tiene inversa, el proceso puede decírselo también. En el siguiente ejemplo se aplica el proceso a una matriz singular (una que no tiene inversa).

EJEMPLO 4 **Matriz singular**

Demuestre que la matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Adjunte la matriz identidad a A para formar

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y aplique la eliminación de Gauss-Jordan de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que la "parte A" de la matriz tiene un renglón de ceros, puede concluir que no es posible reescribir la matriz $[A \quad I]$ en la forma $[I \quad A^{-1}]$. Esto significa que A no tiene inversa o es no invertible (o singular). ■

Aplicar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar la inversa de una matriz funciona bien (incluso como una técnica de computadora) para matrices de tamaño 3×3 o mayores. Sin embargo, para matrices de 2×2 puede utilizar una fórmula para determinar la inversa de una matriz en lugar de la eliminación de Gauss-Jordan.

Si A es una matriz de 2×2 representada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

COMENTARIO

El denominador $ad - bc$ se llama **determinante** de A. Usted podrá estudiar los determinantes con más detalles en la sección 3.5.

entonces A es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$. Además, si $ad - bd \neq 0$, entonces la inversa es representada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5 **Determinar la inversa de una matriz de 2 × 2**

Si es posible, determine la inversa de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) Para la matriz A aplique la fórmula para la inversa de una matriz de 2×2 para obtener $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-2) = 4$. Debido a que esta cantidad no es cero, la inversa se forma intercambiando los elementos en la diagonal principal y cambiando los signos de los otros dos elementos y multiplicando por la escalar $\frac{1}{4}$ como sigue.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

b) Para la matriz B, tiene que $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-6) = 0$, lo que significa que B es no invertible. ■

PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSAS

Algunas propiedades importantes de las matrices inversas se listan enseguida.

TEOREMA 3.8 Propiedades de las matrices inversas

Si A es una matriz invertible, k es un entero positivo y c es un escalar diferente de cero, entonces A^{-1}, A^k, cA y A^T son invertibles y se cumple lo siguiente.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k$

3. $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

DEMOSTRACIÓN

La clave de la demostración de las propiedades 1, 3 y 4 es el hecho de que la inversa de una matriz es única (teorema 3.7). Es decir, si $BC = CB = I$, entonces C es la inversa de B.

La propiedad 1 establece que la inversa de A^{-1} es A misma. Para probar esto, observe que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, lo que significa que A es la inversa de A^{-1}. Así, $A = (A^{-1})^{-1}$.

De manera similar, la propiedad 3 establece que $\frac{1}{c}A^{-1}$ es la inversa de (cA), $c \neq 0$. Para probar esto, utilice las propiedades de la multiplicación escalar dada en los teoremas 3.1 y 3.3 de la siguiente manera.

$$(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \left(c\frac{1}{c}\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

$$\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)(cA) = \left(\frac{1}{c}c\right)A^{-1}A = (1)I = I$$

Así, $\frac{1}{c}A^{-1}$ es la inversa de (cA), lo cual implica $\frac{1}{c}A^{-1} = (cA)^{-1}$. La demostración de las propiedades 2 y 4 se dejan como ejercicio. (Véanse los ejercicios 65 y 66) ■

Para matrices no singulares, la notación exponencial utilizada para la multiplicación repetida de matrices *cuadradas* puede extenderse para incluir exponentes que sean enteros negativos. Esto puede lograrse si se define A^{-k} como sigue

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k.$$

Usando esta convención usted puede demostrar que las propiedades $A^jA^k = A^{j+k}$ y $(Aj)^k = A^{jk}$ son verdaderas para cualesquiera enteros j y k.

DESCUBRIMIENTO

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calcule $(AB)^{-1}$, $A^{-1}B^{-1}$ y $B^{-1}A^{-1}$.
2. Haga una conjetura acerca de la inversa de un producto de dos matrices no singulares.
3. Elija otras dos matrices no singulares y vea si su conjetura es válida.

EJEMPLO 6 **Inversa de una matriz**

Calcule A^{-2} en dos formas diferentes y demuestre que los resultados son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Una forma de determinar A^{-2} es encontrando $(A^2)^{-1}$ al elevar la matriz A al cuadrado para obtener

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

y utilizando la fórmula para la inversa de una matriz de 2×2 para obtener

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Otro modo de determinar A^{-2} es encontrando $(A^{-1})^2$ después de hallar A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y después elevando al cuadrado esta matriz para obtener

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Observe que cada método produce el mismo resultado.

El siguiente teorema proporciona una fórmula para calcular la inversa del producto de dos matrices.

TEOREMA 3.9 La inversa de un producto

Si A y B son dos matrices invertibles de tamaño n, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, usted solo necesita mostrar que esta cumple con la definición de la inversa de una matriz. Esto es

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

De una manera similar puede demostrar que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ y concluir que AB es invertible y que tiene la inversa indicada.

El teorema 3.9 establece que la inversa del producto de dos matrices invertibles es el producto de sus inversas tomado en el orden contrario. Esto puede generalizarse para incluir el producto de algunas matrices invertibles:

$$(A_1A_2A_3 \cdot \cdot \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \cdot \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

EJEMPLO 7 Inversa del producto de una matriz

Halle $(AB)^{-1}$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando el hecho de que A^{-1} y B^{-1} están representadas por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Advierta que *invirtió el orden* de la multiplicación para encontrar la inversa de AB. Esto es, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y la inversa de AB a menudo no es igual a $A^{-1}B^{-1}$.

SOLUCIÓN

Utilizando el teorema 2.9 obtenemos

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overset{B^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -8 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

■

Una propiedad importante en el álgebra de los números reales es la propiedad de cancelación. Es decir, si $ac = bc$ $(c \neq 0)$, entonces a = b. Las matrices *invertibles* tienen una propiedad de cancelación similar.

TEOREMA 3.10 Propiedades de cancelación

Si C es una matriz invertible, entonces las siguientes propiedades son válidas.

1. Si $AC = BC$, entonces $A = B$. Propiedad de cancelación por la derecha

2. Si $CA = CB$, entonces $A = B$. Propiedad de cancelación por la izquierda

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 1, utilice el hecho de que C es invertible y escriba

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ (AC)C^{-1} &= (BC)C^{-1} \\ A(CC^{-1}) &= B(CC^{-1}) \\ AI &= BI \\ A &= B. \end{aligned}$$

La segunda propiedad puede demostrarse de forma semejante. (Véase el ejercicio 68.)

■

Asegúrese de recordar que el teorema 3.10 puede aplicarse solo si C es una matriz *invertible*. Si no lo es, entonces a menudo la cancelación no es válida. Así, en la sección 3.2 el ejemplo 5 proporciona el modelo de una ecuación matricial $AC = BC$ en la cual $A \neq B$, ya que C no es invertible en el ejemplo.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Para sistemas *cuadrados* (los que tienen el mismo número de ecuaciones que de variables), puede utilizar el siguiente teorema para determinar cuál de los sistemas tiene una solución única.

TEOREMA 3.11 Sistemas de ecuaciones con una solución única

Si A es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector columna $\mathbf{b}$ de n componentes, dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que A no es singular, los siguientes pasos son válidos.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Esta solución es única, ya que si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son dos soluciones, usted podría aplicar la propiedad de cancelación para la ecuación $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2$ para concluir que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. ■

Reemplazar lo resaltado por Un uso del teorema 3.11 aparece cuando se resuelven varios sistemas en los cuales todos tienen la misma matriz de coeficientes A. En este caso usted debe encontrar la matriz inversa y luego resolver cada sistema calculando el producto $A^{-1}\mathbf{b}$.

EJEMPLO 8 Solución de un sistema de ecuaciones utilizando una matriz inversa

Utilice una matriz inversa para resolver cada sistema.

a) $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ 3x + 3y + z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$

SOLUCIÓN

Primero observe que la matriz de coeficientes de cada sistema es $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan encontrará que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

a) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ La solución es $x = 2$, $y = -1$, y $z = -2$.

b) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ La solución es $x = 4$, $y = 1$, y $z = -7$.

c) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ La solución es trivial: $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$. ■

3.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

La inversa de una matriz En los ejercicios 1 a 6, demuestre que B es la inversa de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 7 a 30, encuentre la inversa de la matriz (si esta existe)

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ 0.7 & -1 & 0.2 \\ 1 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -7 & 14 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz de 2 × 2 En los ejercicios 31 a 36, utilice la fórmula en la página 73 para encontrar la inversa de una matriz de 2 × 2 (si existe).

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa del cuadrado de una matriz En los ejercicios 37-40, calcule A^{-2} de dos maneras diferentes y muestre que los resultados son iguales.

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **38.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **40.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de las inversas de productos y transpuestas En los ejercicios 41 a 44, utilice matrices invertidas para determinar **a)** $(AB)^{-1}$, **b)** $(A^T)^{-1}$ y **c)** $(2A)^{-1}$.

41. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

42. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

43. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

44. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8/1

Resolución de un sistema de ecuaciones usando una inversa En los ejercicios 45 a 48, utilice una matriz inversa para resolver cada sistema de ecuaciones lineales.

45. **a)** $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - 2y &= -6 \end{aligned}$

46. **a)** $\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 2x + y &= -3 \end{aligned}$

47. **a)** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$

48. **a)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

Resolución de un sistema de ecuaciones usando una inversa En los ejercicios 49 a 52, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidad matricial para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa.

49. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= -3 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}$

51. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 &= -16 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 &= -12 \\ -5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 3x_6 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 + x_6 &= -15 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 6x_6 &= 25 \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - x_6 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= -11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= -9 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 - 5x_6 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_5 + 2x_6 &= -12 \end{aligned}$

Matriz igual a su propia inversa En los ejercicios 53 a 54, determine el valor de x tal que la matriz sea igual a su inversa.

53. $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **54.** $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Matriz singular En los ejercicios 55 y 56, determine el valor de x tal que la matriz sea singular.

55. $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **56.** $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

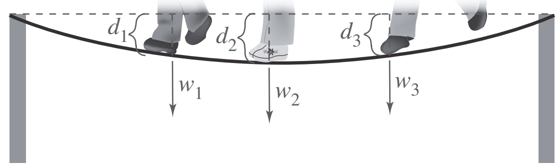
Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 57 y 58, determine el valor de A tal que

57. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **58.** $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 59 y 60, demuestre que la matriz es invertible y encuentre su inversa.

59. $A = \begin{bmatrix} \text{Sen}\,\theta & \text{Cos}\,\theta \\ -\text{Cos}\,\theta & \text{Sen}\,\theta \end{bmatrix}$ **60.** $A = \begin{bmatrix} \text{Sec}\,\theta & \text{Tan}\,\theta \\ \text{Tan}\,\theta & \text{Sec}\,\theta \end{bmatrix}$

Deflexión de vigas En los ejercicios 61 y 62, las fuerzas w_1, w_2 y w_3 (en libras) actúan en una elástica soportada de manera simple, lo que resulta en las deflexiones d_1, d_2 y d_3 (en pulgadas) en la viga (véase la figura).



Utilice la ecuación matricial $d = F\mathbf{w}$ donde

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

y F es la *matriz de flexibilidad* 3×3 para la viga, para encontrar la matriz de rigidez F^{-1} y la matriz de fuerza **w**. Las unidades de las entradas de F se presentan en pulgadas por libra.

61. $F = \begin{bmatrix} 0.008 & 0.004 & 0.003 \\ 0.004 & 0.006 & 0.004 \\ 0.003 & 0.004 & 0.008 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.585 \\ 0.640 \\ 0.835 \end{bmatrix}$

62. $F = \begin{bmatrix} 0.017 & 0.010 & 0.008 \\ 0.010 & 0.012 & 0.010 \\ 0.008 & 0.010 & 0.017 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 63 y 64, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es cierta, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite una expresión apropiada a partir del texto.

63. **a)** Si las matrices A, B y C satisfacen $BA = CA$ y A es invertible, entonces $B = C$.

b) La inversa del producto de dos matrices es el producto de sus inversas, esto es $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

c) Si A puede ser reducida por la matriz identidad, entonces A es no singular.

64. **a)** La inversa de la inversa de una matriz no singular A, $(A^{-1})^{-1}$ es igual a A misma.

b) La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible si $ab - dc \neq 0$.

c) Si A es una matriz cuadrada, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.

65. **Prueba** Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.8: si A es una matriz invertible y k un entero positivo, entonces

$$(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factor}} = (A^{-1})^k$$

66. **Prueba** Demuestre la propiedad 4 del teorema 3.8: si A es una matriz invertible, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

67. **Demostración guiada** Demuestre que la inversa de una matriz simétrica no singular es simétrica.

Inicio: para demostrar que la inversa de A es simétrica, necesita probar que $(A^{-1})^T = A^{-1}$

i) Sea A una matriz simétrica no singular.

ii) Esto significa que $A^T = A$ y A^{-1} existen.

iii) Utilice las propiedades de la transpuesta para demostrar que $(A^{-1})^T$ es igual a A^{-1}.

68. **Prueba** Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.10: si C es una matriz invertible tal que $CA = CB$, entonces $A = B$.

69. **Prueba** Demuestre que si $A^2 = A$, entonces

$I - 2A = (I - 2A)^{-1}$.

70. **Prueba** Demuestre que si A, B y C son matrices cuadradas y $ABC = I$, entonces B es invertible y $B^{-1} = CA$.

71. **Prueba** Demuestre que si A es invertible y $AB = O$, entonces $B = O$.

72. **Demostración guiada** Demuestre que si $A^2 = A$, entonces una de dos cosas: $A = I$ o A es singular.

Inicio: usted debe demostrar que A es singular o que A es igual a la matriz

i) Comience su demostración observando que A es singular o no singular.

ii) Si A es singular, la demostración está hecha.

iii) Si A es no singular, entonces utilice la matriz inversa A^{-1} y la hipótesis de que $A^2 = A$ para demostrar que $A = I$.

73. **Escriba** ¿La suma de dos matrices invertibles es invertible? Explique por qué sí o por qué no. Ilustre su conclusión con un ejemplo apropiado.

74. **Escriba** ¿Bajo qué condiciones la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es invertible? Si A es invertible, encuentre la inversa.

75. Use el resultado del ejercicio 74 para determinar A^{-1} para cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

76. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Demuestre que $A^2 - 2A + 5I = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$.

c) Demuestre que, en general, para cualquier matriz cuadrada que satisfaga la ecuación $A^2 - 2A + 5I = 0$, la inversa de A está dada por $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$.

77. **Prueba** Sea $\mathbf{u}$ la matriz columna $n \times 1$ que satisface $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$. La matriz de $n \times n$, $H = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ se llama **matriz de Householder**.

a) Demuestre que H es simétrica y no singular.

b) Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ y calcule la matriz de Householder H.

78. **Prueba** Sean A y B matrices n x n. Demuestre que si la matriz $I - AB$ es no singular, entonces también lo es $I - BA$.

79. Sean A, D y P matrices de $n \times n$ que satisfacen $AP = PD$. Si P es no singular, resuelva esta ecuación para A. ¿Debe cumplirse que $A = D$?

80. Encuentre un ejemplo de una matriz singular de 2×2 que satisfaga $A^2 = A$.

81. **Escriba** Explique cómo determinar si la inversa de una matriz existe. Si es así, explique cómo encontrar la inversa.

82. **REMATE** Como se mencionó en la página 73, si A es una matriz de 2×2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces A es invertible si y solo si $ad - cb \neq 0$. Verifique que la inversa de A esté dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

83. **Escriba** Explique en sus propias palabras cómo escribir un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables como una ecuación matricial, $AX = B$, así como la manera de resolver el sistema usando una matriz inversa.

3.4 Matrices elementales

- Factorizar una matriz en un producto de matrices elementales.
- Encontrar y utilizar una factorización *LU* de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

MATRICES ELEMENTALES Y OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLONES

En la sección 2.2 se presentaron las tres operaciones elementales sobre renglones aplicadas a las matrices; estas son:

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.

En esta sección, usted podrá ver cómo la multiplicación matricial puede emplearse para ejecutar estas operaciones.

COMENTARIO

De acuerdo con esta definición, la matriz identidad I_n es elemental, ya que puede obtenerse a partir de sí misma al multiplicar cualquiera de sus renglones por 1.

Definición de matriz elemental

Una matriz de $n \times n$ se denomina **matriz elemental** si puede ser obtenida a partir de la matriz identidad I_n por una sola operación elemental de renglón.

EJEMPLO 1 **Matrices elementales y no elementales**

¿Cuáles de las siguientes matrices son elementales? Para aquéllas que lo sean, describa la operación elemental de renglón.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) Esta matriz es elemental. Puede obtenerse multiplicando el segundo renglón de I_3 por 3.

b) Esta matriz *no* es elemental, ya que no es cuadrada.

c) Esta matriz *no* es elemental, ya que fue obtenida al multiplicar el tercer renglón de I_3 por 0 (la multiplicación de renglones debe ser por una constante diferente de cero).

d) Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse intercambiando el segundo y el tercer renglón de I_3.

e) Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse al multiplicar el primer renglón de I_2 por 2 y sumar el resultado al segundo renglón.

f) Esta matriz *no* es elemental, ya que se requieren dos operaciones por renglones para obtenerla a partir de I_3.

Las matrices elementales resultan útiles porque permiten usar la multiplicación matricial para realizar operaciones elementales por renglones, como se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Matrices elementales y operaciones elementales por renglones

a) En el siguiente producto de matrices, E es una matriz elemental en la cual los dos primeros renglones de I_3 se han intercambiado.

$$\underset{E}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que los dos primeros renglones de A se han intercambiado en la multiplicación *por la izquierda* por E.

b) En el siguiente producto de matrices, E es la matriz elemental en la cual el segundo renglón de I_3 se ha multiplicado por $\frac{1}{2}$.

$$\underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí el tamaño de A es 3×4. A puede, sin embargo, ser cualquier matriz de $3 \times n$ y multiplicarse por la izquierda por E y mantener el resultado de multiplicar el segundo renglón de A por $\frac{1}{2}$.

c) En el siguiente producto, E es la matriz elemental en la que se ha sumado dos veces el primer renglón de I_3 al segundo renglón.

$$\underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que en el producto EA se ha sumado dos veces el primer renglón al segundo. ■

COMENTARIO

Asegúrese de tener en mente que en el teorema 3.12 A es multiplicada por la *izquierda* por la matriz elemental E. La multiplicación por la derecha por matrices elementales, la cual implica operaciones por columnas, no se considera en este texto.

En cada uno de los tres productos del ejemplo 2, usted fue capaz de ejecutar operaciones elementales por renglones para multiplicar por la *izquierda* por una matriz elemental. Esta propiedad de las matrices elementales se generaliza en el siguiente teorema, el cual se enuncia sin demostrar.

TEOREMA 3.12 Representación de operaciones elementales por renglones

Sea E la matriz elemental obtenida al ejecutar una operación elemental por renglones en I_m. Si esta misma operación es realizada en una matriz A de $m \times n$, entonces el resultado está dado por el producto EA.

Muchas aplicaciones de las operaciones elementales por reglones requieren de una secuencia de operaciones. Por ejemplo, la eliminación gaussiana a menudo precisa de varias operaciones elementales por renglones para reducir una matriz. Para matrices elementales, esta secuencia se traduce en la multiplicación (por la izquierda) por varias matrices elementales. El orden de la multiplicación es importante; la matriz elemental inmediata para la izquierda de A corresponde a la operación con renglones ejecutada primero. Este proceso se demuestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicación de matrices elementales

Encuentre una sucesión de matrices elementales que puedan utilizarse para escribir la matriz A en forma escalonada por renglones.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Matriz	Operación elemental por renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$	$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Las tres matrices elementales E_1, E_2 y E_3 pueden utilizarse para ejecutar la misma eliminación.

$$B = E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

COMENTARIO

El procedimiento demostrado en el ejemplo 3 es primordialmente de interés teórico. En otras palabras, este procedimiento no se recomienda como un método práctico para realizar la eliminación gaussiana.

Las dos matrices en el ejemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por renglones, ya que usted puede obtener B al ejecutar una secuencia de operaciones por renglones en A. Es decir, $B = E_3E_2E_1A$.

La definición de matrices equivalentes por reglones puede ser reexpresada usando matrices elementales de la siguiente manera.

Definición de equivalencia por renglones

Sean A y B matrices de $m \times n$. La matriz B es **equivalente por renglones** con A si existe un número finito de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$B = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1A.$$

Usted sabe, de la sección 3.3, que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Sin embargo, toda matriz elemental es invertible. Además, la inversa de una matriz elemental es en sí misma una matriz elemental.

TEOREMA 3.13 Las matrices elementales son invertibles

Si E es una matriz elemental, entonces E^{-1} existe y es una matriz elemental.

La inversa de una matriz elemental E es la matriz elemental que convierte E de nuevo en I_n. Por ejemplo, puede encontrar la inversa de cada una de la tres matrices elementales mostradas en el ejemplo 3 de la siguiente manera.

COMENTARIO

E_2^{-1} está como se muestra porque al convertir E_2 a I_3, en E_2 se tendría que sumar dos veces el primer renglón al tercero.

Matriz elemental		Matriz inversa	
$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_3 + (2)R_1 \rightarrow R_3$
$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$(2)R_3 \rightarrow R_3$

Intente utilizar la multiplicación de matrices para verificar estos resultados.

El siguiente teorema establece que toda matriz invertible puede ser escrita como el producto de dos matrices elementales.

TEOREMA 3.14 Propiedad de las matrices invertibles

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si puede ser escrita como el producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN

La frase "si y solo si" significa que el teorema tiene dos partes. En una, usted debe demostrar que *si A* es invertible, *entonces* puede escribirse como el producto de matrices elementales. Luego debe demostrar que si A puede ser escrita como el producto de matrices elementales, *entonces* es invertible.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, suponga que A es invertible. Del teorema 3.11 sabe que el sistema de ecuaciones lineales representado por $A\mathbf{x} = 0$ tiene solo la solución trivial. Pero esto implica que la matriz aumentada $[A \quad 0]$ puede reescribirse en la forma $[I \quad 0]$ (usando operaciones elementales por renglones correspondientes $E_1, E_2, \ldots$ y E_k). Ahora tenemos $E_k \ldots E_3E_2E_1A = I$ y esto seguido de $A = E_1^{-1}\, E_2^{-1}\, E_3^{-1} \ldots E_k^{-1}$. A puede escribirse como el producto de dos matrices elementales y la demostración está completa.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, asuma que A es el producto de matrices elementales. Entonces, debido a que cada matriz elemental es invertible y el producto de matrices invertibles es invertible, se sigue que A es invertible. Esto completa la demostración. ■

La primera parte de esta demostración se ilustra en el ejemplo 4.

8/1

¿Sabías qué? Los fractales son representaciones geométricas de la teoría del caos, cambiantes e impredecibles, que nos invitan a pensar en dimensiones y teorías maravillosas que solo el estudio analítico, cualitativo y cuantitativo del cálculo y del álgebra lineal nos permitiría entender. Es por esta razón que en esta edición de matemáticas los fractales son parte fundamental de la imagen que representa esta nueva colección.

Matemáticas IV, Álgebra lineal forma parte de una serie de libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En esta nueva edición de ***Matemáticas IV, Álgebra lineal*** podrás estudiar:

- Números complejos
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Matrices y determinantes
- Espacios vectoriales
- Transformaciones lineales
- Eigenvalores, eigenvectores y formas cuadráticas

Estos temas establecen una manera singular de abordar el álgebra lineal mediante ejemplos, explicaciones, recursos didácticos, definiciones, teoremas y demostraciones, las cuales se presentan de manera clara, accesible y con un estilo directo y legible, lo que hace de esta obra un clásico instantáneo.

Acompáñanos a conocer el álgebra lineal desde una perspectiva clara y eficaz.

ISBN-13: 978-607-526-844-6
ISBN-10: 607-526-844-8

9 786075 268446

CENGAGE

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com